

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

УДК 681.2.08

В. И. РАБИНОВИЧ

(Новосибирск)

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

(состояние и задачи)

В последние годы наблюдается интенсивное развитие теории измерительных информационных систем [1]. Обогащение теории происходит, с одной стороны, за счет постановки новых задач, диктуемых жизнью, с другой — за счет привлечения методов исследования, присущих смежным научным дисциплинам. Запросы практики ведут к созданию сложных измерительных систем различного назначения и разнообразных как по структуре, так и по функциональным особенностям их составных частей. Те же причины заставляют искать эффективные способы согласования измерительных систем с системами связи и управления. В этих условиях особенно остро ощущается необходимость в общем языке. Он нужен не только для описания средств получения измерительной информации и их «взаимодействия» с устройствами иного назначения. Создание общего языка можно рассматривать как первый этап в решении коренных проблем автометрии — анализа и синтеза измерительных информационных систем. Одна из возможностей создания такого языка связана с использованием теоретико-информационного подхода.

Цель статьи состоит в том, чтобы отразить состояние исследований по основным направлениям информационной теории измерений, не придавая изложению характер детального обзора.

Для оценки средств и процессов измерения в статике используется целый ряд различных критериев [2—8], основанных на понятии количества информации, введенном Шенноном. Выбор того или иного информационного критерия связан с соответствующей содержательной интерпретацией определенных понятий теории информации в применении к практике измерений.

Одним из показателей высокого качества измерительного прибора естественно считать сравнительно малую неопределенность, возникающую при решении задачи нахождения истинного значения измеряемой величины по показаниям прибора. В терминах теории информации это означает, что «достоинством» прибора является малая условная энтропия измеряемой величины при фиксированном показании прибора  $H(x/z)$ , т. е. большое значение среднего количества информации, содержащегося в показаниях прибора  $z$  о значениях измеряемой величины  $x$ . Следует отметить, что именно эта концепция является основной в большинстве работ по информационной теории измерений.

Рассмотрение различных математических моделей процесса измере-

ния приводит к отличающимся друг от друга соотношениям для вычисления количества информации. Можно выделить две основные информационные модели, наиболее подробно изученные в отечественной литературе [4, 7]. Поясним их смысл и разницу между ними на примере задачи оценки качества цифрового прибора, под которым здесь понимается устройство, производящее квантование смеси измеряемого сигнала  $x$  с мешающим воздействием  $y$ .

В этом случае первый из указанных подходов заключается в следующем: «наблюдателя» интересует точное значение измеряемой величины, которая, вообще говоря, имеет непрерывное распределение, т. е. совокупность ее возможных значений есть некоторый интервал на прямой, и существует плотность вероятности  $f(x)$ . Информационной оценкой прибора тогда будет среднее значение неопределенности, снимаемое в результате измерения, т. е. величина  $I(x, z) = H(x) - H(x/z)$ , где  $H(x)$  и  $H(x/z)$  — соответственно дифференциальная энтропия измеряемой величины и условная дифференциальная энтропия. Эта формула в точности совпадает с шенноновским определением количества информации в случайной величине  $z$  — показаниях прибора о случайной величине  $x$ .

Особенность второго подхода состоит в том, что «наблюдателя» интересует не точное значение измеряемой величины, а лишь вопрос об интервале, в котором эта величина находится. Рассмотрение измерения в таком «событийном» аспекте естественно приводит к тому, что под неопределенностью измеряемой величины понимается  $H_q(x) = - \sum_i p_i \ln p_i$ ,

где  $p_i$  — вероятность того, что  $x$  находится в  $i$ -м кванте,  $q$  — шаг квантования по уровню; аналогично интерпретируется условная неопределенность. Обобщенной информационной оценкой в этом случае считается  $I_q(x, z) = H_q(x) - H_q(x/z)$ . В терминах шенноновского определения  $I_q(x, z)$  — это количество информации, содержащееся в показаниях реального прибора о выходе идеального (в смысле отсутствия случайной погрешности  $y$ ) квантователя, преобразующего ту же измеряемую величину, т. е. второй подход характеризует в определенном смысле близость измерительного прибора к идеалу; малость величины  $H_q(x/z)$  означает, что прибор мало отличается от идеального квантователя.

Интересно, что  $I(x, z)$  и  $I_q(x, z)$  при любых статистических характеристиках входа и погрешности связаны неравенством [9]

$$I_q(x, z) \leq I(x, z),$$

т. е. каждая из этих величин может служить оценкой для другой; при отсутствии случайной погрешности  $I_q(x, z) = I(x, z)$ .

Следует отметить встречающиеся в ряде работ методические модификации указанных подходов [10—12]. Целью таких модификаций является придание большей метрологической наглядности информационному критерию. Так, примером производной характеристики информационного критерия является эквивалентное число делений  $N_s$ , определенное следующим образом [10]:  $N_s = \exp \{I(x, z)\} / N_s = \exp \{I_q(x, z)\}$ , иначе говоря,  $N_s$  — число делений измерительного прибора, не имеющего случайной погрешности и позволяющего при равномерном распределении измеряемой величины получить такое же количество измерительной информации, как и данный прибор. Иногда удобно характеризовать прибор величиной эквивалентного кванта  $q = \frac{L}{N_s}$ , где  $L$  — диапазон измерения. Методическими модификациями информационного

критерия, близкими к рассмотренным, являются такие характеристики, как энтропийная погрешность, энтропийный коэффициент [11, 12] и т. п.

Практическое применение информационных критериев существенно затрудняется следующими двумя обстоятельствами: во-первых, формулы для вычисления количества информации достаточно сложны; во-вторых, для пользования этими формулами требуется весьма большой объем априорных сведений — знание функций плотности  $f(x)$  и  $f(y/x)$ . Поэтому закономерно появление обширной литературы, относящейся как к выработке инженерной методики вычислений для наиболее употребительных распределений измеряемой величины и погрешности, так и к получению оценок для количества информации, которые характеризуются либо сравнительной простотой вычислений, либо меньшим количеством априорных статистических сведений, необходимых для их определения. В качестве примера приближенной формулы для вычисления количества информации укажем следующую: при  $q=0$  (аналоговое измерительное устройство)  $I(x, z) \approx H(x) - H(y)$ .

Естественно, что при выводе этой и других подобных формул накладываются определенные ограничения на распределения измеряемой величины и погрешности, а также на способ взаимодействия между ними (в частности, в данном случае требуется гладкость функции  $f(x)$  и малость диапазона изменения погрешности). Другим примером приближенной формулы, пользование которой позволяет обойтись без подробных знаний о вероятностных свойствах величин, фигурирующих при измерении, является следующая [9]:

$$H_q(x/z) \approx -2 \frac{\bar{|y|}}{2q} \ln \frac{\bar{|y|}}{2q} - \left(1 - \frac{\bar{|y|}}{q}\right) \ln \left(1 - \frac{\bar{|y|}}{q}\right).$$

Здесь  $\bar{|y|}$  — первый абсолютный момент погрешности. Приведенная формула весьма точна при условии, что погрешность не зависит от полезного сигнала, имеет симметричное распределение и  $|y|_{\max} \leq q$ . Если учесть, что для ее применения достаточно знать лишь  $\bar{|y|}$ , то ее употребление при выполнении указанных условий целесообразно, так как экспериментальное определение  $\bar{|y|}$  требует значительно меньшего объема серии статистических испытаний, чем при определении плотностей вероятностей.

Информационный критерий, являющийся интегральным, отражает многие свойства измерительного устройства и измеряемой величины. Изучение степени влияния различных факторов на количество информации, получаемое в результате измерения, является в настоящее время одной из актуальных проблем. Необходимо отметить, что исследование этого вопроса до сих пор в основном находится на уровне качественного анализа. Так, например, известно, что количество информации не является монотонной функцией числа делений (имеются примеры, показывающие, что прибор с меньшим числом делений может на некоторых распределениях измеряемой величины давать большую информацию, чем прибор с большим числом квантов) [9]. С другой стороны, ясно, что для наиболее часто встречающихся распределений увеличение числа делений «благоприятно» влияет на количество информации, даваемое средством измерения. Однако условия, при которых такая монотонность имеет место (и даже термины, в которых такие условия должны быть сформулированы!), совершенно не изучены. Среди других качественных выводов, полученных в последнее время, можно отметить следующие: 1) при определенных ограничениях  $H(z)$  мало от-

личается от  $H(x)$ ; 2) найдены (достаточно грубые) условия, при которых влияние распределения измеряемой величины на  $H_q(x/z)$  незначительно. Еще менее ясным является вопрос о влиянии различных метрологических характеристик процесса измерения на количество информации, получаемое при его выполнении. Правда, в последнее время на этот счет получен достаточно общий результат [13], который формулируется ниже.

Будем понимать под функцией штрафов любую функцию  $G(x, z)$ , а под критерием, основанным на этой функции, такой, что сравнение по нему двух приборов сводится к сравнению средних значений  $G(x, z)$ , вычисленных по  $f_1(x, z)$  и  $f_2(x, z)$  соответственно [ $f_i(x, z)$  — совместная плотность распределения вероятностей измеряемой величины и показаний  $i$ -го прибора]. Будем рассматривать класс критериев  $K$ , на функции штрафов которых наложено следующее естественное ограничение: большей ошибке соответствует больший штраф. Очевидно, что все общепотребительные метрологические критерии, основанные на осреднении (средний квадрат, средний модуль ошибки измерения и т. д.), входят в описанный класс. Оказывается, ни один из критериев, входящих в  $K$ , не эквивалентен критерию количества информации, т. е. для любого критерия  $G$  найдется пара приборов  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  и такое распределение измеряемой величины, что  $\Pi_1$  лучше  $\Pi_2$  по  $G$  и хуже его по информационному критерию на данном распределении. Отсюда следует, что нельзя найти такой метрологической характеристики прибора, что ее «улучшение» заведомо приводит к увеличению количества информации, даваемой прибором. Представляет интерес выяснение условий, при которых количество информации монотонно зависит от заданных метрологических характеристик. Такие условия могут быть выражены в виде ограничений на множество рассматриваемых приборов и на класс возможных распределений измеряемой величины.

Исключительно важным методом выяснения взаимосвязей между метрологическими и информационными свойствами средств измерения является рассмотрение различного рода экстремальных задач, роль которых особенно велика при решении проблемы оптимального синтеза измерительных систем.

Одной из классических вариационных задач, рассмотренной еще Шенноном, является задача [14, 15], которая в терминах теории измерений может быть сформулирована следующим образом: выбирается некоторая функция штрафов  $G(x, z)$ ; фиксируется ее среднее значение  $M_{x, z} G(x, z) = a$ ; требуется по фиксированному распределению измеряемой величины  $f(x)$  выбрать прибор [иначе говоря, выбрать функцию  $f(y/x)$ ], который приносит на этом распределении больше (меньше) информации, чем любой другой, для которого  $M_{x, z} G(x, z) = a$ . Содержательный смысл решения — нахождение «наихудшей» и «наилучшей» погрешностей.

Практический интерес представляет также следующее видоизменение изложенной задачи: фиксированы  $M_{x, z} G(x, z)$  и  $f(y/x)$ ; требуется найти  $f(x)$  — распределение измеряемой величины, на котором данный прибор дает максимальное количество информации.

Задачи нахождения характеристик прибора (или распределения измеряемой величины), дающих экстремальное значение математическому ожиданию функции штрафов при фиксированном значении количества информации, тесно связаны с вопросом о ценности информации [16, 17].

Все перечисленные выше задачи имеют аналоги, суть которых состоит в том, что вид искомой функции известен и требуется найти опти-

мальные значения входящих в нее параметров, т. е. вариационная задача заменяется задачей на нахождение экстремума функции многих переменных.

Необходимо отметить, что если в теории связи методы решения экстремальных задач разработаны довольно глубоко, то в теории измерений делаются лишь первые попытки учесть при решении специфические особенности измерения (в частности, наличие погрешности квантования). Из результатов, полученных в этом направлении, можно отметить приближенный метод отыскания «наихудшей» погрешности цифрового прибора [9], а также рассмотрение вопроса об оптимальных в смысле информационного критерия соотношениях между случайной погрешностью и погрешностью квантования при фиксированном значении одной из метрологических характеристик прибор [10].

До сих пор не исследована в общем виде задача об оптимальном разбиении шкалы измерительного прибора по информационному критерию.

В связи с тем, что в современной практике измерительный прибор зачастую используется в сложных системах, в которых наряду со сбором информации осуществляется также ее хранение, передача и переработка, существенный интерес приобретает задача об уменьшении неопределенности выхода измерительного устройства. В частности, можно рассматривать вопрос о нахождении прибора, который при фиксированном значении  $I(x, z)$  (или какой-либо иной характеристики) имеет минимальную энтропию выхода  $H(z)$ .

При анализе информационными методами динамики процесса измерения возникают задачи, аналогичные рассмотренным ранее. Естественно, что при этом информационные критерии модифицируются. В качестве таких модификаций целесообразно рассматривать количество информации, приходящееся на одно измерение, количество информации в единицу времени, а также соответствующие разновидности эквивалентного числа делений и т. д. Критерий количества информации на одно измерение является естественным обобщением введенного ранее критерия  $I(x, z)$  или  $I_q(x, z)$ . При отсутствии статистической взаимосвязи между значениями измеряемой величины в моменты измерения эти критерии совпадают. Количество информации в единицу времени является характеристикой, не имеющей аналогов в статике, и в определенном смысле эквивалентно используемому в теории связи понятию скорости передачи информации.

Применение информационных критериев для оценки динамики процесса измерения связано с очень большими вычислительными трудностями, особенно при учете операции квантования. Кроме того, за небольшим исключением (например, нормальный процесс), в настоящее время отсутствуют удобные математические модели случайных процессов, пригодные для описания реального поведения измеряемых величин.

В связи с изложенным выше очевидна роль всякого рода приближенных формул, пригодных для практического использования. Однако приходится констатировать, что почти нет работ, посвященных выработке инженерных методик и обладающих достаточной математической строгостью. В последнее время предприняты попытки избежать вычислительных трудностей путем введения понятия входящего потока [18]; нужно отметить, что обоснование предлагаемого метода нуждается в определенных уточнениях.

При использовании динамических информационных критериев, помимо экстремальных задач, которые были описаны выше в применении к статическим ситуациям, возникает также ряд специфических проблем.

Так, весьма важным представляется вопрос об оптимальном согласовании свойств прибора с динамическими характеристиками измеряемого сигнала. Эта задача приобретает особый интерес при использовании циклических способов измерения. Представляется также интересным примыкающий к рассматриваемой тематике подход, связанный с учетом старения информации в процессе измерения [19].

В [20] математическая модель измерительного прибора учитывает способ уравнивания; при этом анализируется сравнительная эффективность различных способов. В качестве критерия эффективности используется среднее количество информации, приходящееся на одну операцию сравнения. Рассмотрена также следующая задача: по фиксированному методу уравнивания находится распределение измеряемой величины, на котором этот метод наиболее эффективен. Это позволяет выяснить как предельные возможности метода, так и ситуации, в которых его применение наиболее целесообразно. Однако остается неисследованным вопрос о влиянии случайных погрешностей прибора на показатель эффективности.

Рациональному проектированию средств измерения и оценке их качества, как правило, предшествует **сбор априорной информации об объекте исследования**. При этом важную роль играет получение статистических данных, например, о законах распределения измеряемых величин, параметрах этих законов и т. п. Сбор таких данных осуществляется при помощи обычных измерительных или специализированных приборов. Для оценки процесса их получения и эффективности работы приборов весьма удобными оказываются информационные критерии. Необходимо отметить, что целесообразность информационного подхода в статистике математиками уже давно признана бесспорной. Есть основания полагать, что использование информационных критериев в указанном аспекте в измерительной практике также окажется плодотворным. Первые результаты, полученные в этом направлении, подтверждают высказанную точку зрения.

Одной из наиболее типичных задач, возникающих на практике, является задача определения параметра распределения случайной величины при условии, что вид закона распределения известен. Такими величинами могут быть значения как измеряемого сигнала, так и погрешности измерительного устройства.

Для информационной оценки такого эксперимента Линдли [21, 22] была предложена излагаемая ниже методика. Считается известным некоторое априорное распределение вероятностей определяемого параметра. После проведения эксперимента имеется некоторое его апостериорное распределение. В этой ситуации можно вычислить количество информации (в смысле Шеннона) в результатах измерения об определяемом параметре, которое и называется информацией, даваемой экспериментом.

Важным достоинством методики Линдли является то, что она использует понятие количества информации, которое более содержательно, чем, например, понятие дифференциальной энтропии. Однако описанный выше метод информационной оценки статистического эксперимента требует знания априорного распределения параметра; такое знание при планировании измерительного эксперимента, как правило, отсутствует. В этой связи представляется целесообразным привлечение способов информационной оценки эксперимента, не требующих знания априорного распределения параметра. Один из возможных подходов заключается в том, что мера неопределенности нашего знания о параметре характеризуется энтропией его оценки [23—25]. При этом оказы-

ствы, но асимптотическая нормальность многих выверенных характеристик позволяет в определенной мере обойти эту трудность. Этот факт позволяет также выяснить в ряде случаев соотношение между информационными мерами Шеннона и Фишера при оценке статистического эксперимента.

Информационный подход может быть применен и для оценки статистического эксперимента, целью которого является определение функции распределения измеряемой величины [26].

Энтропийный метод оценки процесса сбора статистики еще недостаточно изучен. Здесь имеется очень много нерешенных задач, например, задач о выявлении связей между сходимостью по вероятности и по энтропии, соотношений между энтропийными и дисперсионными методами оценки и т. д.

\*\*  
\*

Несмотря на то, что круг исследований по информационной теории измерений расширяется весьма быстро, остается практически не рассмотренным еще целый ряд проблем, заслуживающих пристального внимания специалистов. Сюда относится анализ «потоков» информации в сложных измерительных системах, исследование возможностей применения таких информационных характеристик, как  $\epsilon$ -энтропия Колмогорова [27] и мера Калбэка [28]. Не получили еще развития работы по учету ценности измерительной информации, хотя для этого созданы достаточные предпосылки [16, 17, 29—31].

Автор выражает благодарность чл.-корр. АН СССР К. Б. Карандееву за многократные и полезные обсуждения основных положений статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Б. Карандеев. Измерительные информационные системы и автоматика.— Вестник АН СССР, 1961, № 10.
2. П. В. Новицкий. Использование кибернетических понятий в теории электроизмерительных устройств.— Измерительная техника, 1962, № 1.
3. М. И. Ланин, С. М. Мандельштам, В. В. Сидельников. Некоторые вопросы математического обоснования выбора числа областей квантования в аналого-дискретных преобразователях.— Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 4.
4. В. И. Рабинович, М. П. Цапенко. О количестве измерительной информации.— Измерительная техника, 1963, № 4.
5. В. И. Рабинович, М. П. Цапенко. Количество информации при равномерном распределении измеряемой величины и погрешности.— Измерительная техника, 1963, № 6.
6. Ф. Е. Темников. Некоторые аспекты теории информации.— Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964—1965 годы. М., МЭИ, 1965.
7. С. М. Персин. Количество информации при цифровом измерении.— Измерительная техника, 1964, № 7.
8. С. М. Персин. Информационные характеристики цифровых измерительных систем.— Автоматический контроль и методы электрических измерений (Труды V Всесоюзной конференции), т. II. Новосибирск, «Наука», 1966.
9. В. М. Ефимов, В. И. Рабинович, О. Е. Трофимов. О некоторых оценках количества информации при измерении.— VIII Всесоюзная конференция по автоматическому контролю и методам электрических измерений. Тезисы докладов и сообщений. Новосибирск, 1966.

10. В. И. Рабинович, М. П. Чапенко. Количество информации при равномерном распределении измеряемой величины и нормальном распределении погрешности.— Измерительная техника, 1963, № 10.
11. П. В. Новицкий. Понятие энтропийного значения погрешности.— Измерительная техника, 1966, № 7.
12. П. В. Новицкий, В. Я. Иванова, Г. А. Кондрашкова. Об использовании энтропийного значения погрешности в качестве критерия точности приборов и измерений.— Измерительная техника, 1966, № 11.
13. З. А. Лившиц. О взаимоотношениях между критериями.— VI научно-техническая конференция «Кибернетические пути совершенствования измерительной аппаратуры». Тезисы докладов. Л., 1967.
14. К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике.— Математическая теория связи. М., 1963.
15. И. В. Кораблев, А. М. Родионов, В. В. Свечинский. Некоторые вопросы информационного анализа измерительных приборов.— VI научно-техническая конференция «Кибернетические пути совершенствования измерительной аппаратуры». Тезисы докладов. Л., 1967.
16. Р. Л. Стратонович. О ценности информации.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1965, № 5.
17. Б. А. Гришанин, Р. Л. Стратонович. Ценность информации и достаточные статистики при наблюдении случайного процесса.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1966, № 6.
18. С. М. Мандельштам. Оценка некоторых способов статистического согласования измерительного прибора с измеряемым параметром.— Автометрия, 1965, № 1.
19. А. Н. Ефимов, В. И. Покровский. К выбору оптимальных параметров измерительной системы, получающей стареющую информацию.— VI научно-техническая конференция «Кибернетические пути совершенствования измерительной аппаратуры». Тезисы докладов. Л., 1967.
20. В. И. Рабинович. О пропускной способности измерительных приборов ациклического развертывающего уравнивания.— Вопросы теории измерительных систем. Труды ИАЭ СО АН СССР, вып. 11. Новосибирск, РИО СО АН СССР, 1964.
21. Д. В. Линдли. О мере информации, даваемой экспериментом.— Математика, 1963, 3 : 3.
22. М. Сакогучи. Заметки по статистическим приложениям теории информации.— Математика, 1963, 3 : 3.
23. З. А. Лившиц, В. И. Рабинович, О. Е. Трофимов. Об информационном подходе к определению параметров распределения случайной величины.— Автометрия, 1967, № 3.
24. З. А. Лившиц, В. И. Рабинович, О. Е. Трофимов. Об информационных критериях в теории измерений.— XXIII Всесоюзная научная сессия НТОРиЭ им. А. С. Попова, посвященная 50-летию Советской власти и Дню радио. Тезисы докладов. М., 1967.
25. В. И. Рабинович, О. Е. Трофимов. О методах оценки статистического эксперимента, основанных на понятии энтропии.— VI научно-техническая конференция «Кибернетические пути совершенствования измерительной аппаратуры». Тезисы докладов. Л., 1967.
26. О. Е. Трофимов. Об одном способе информационной оценки статистического эксперимента.— X областная научно-техническая конференция НТОРиЭ им. А. С. Попова. Тезисы докладов. Новосибирск, 1967.
27. А. Н. Колмогоров. Теория передачи информации.— Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства. М., Изд-во АН СССР, 1957.
28. S. Kullback. Information theory and Statistic. New York, 1959.
29. А. А. Харкевич. О ценности информации.— В сб. «Проблемы кибернетики», вып. 4. М., Физматгиз, 1960.
30. М. М. Бонгард. О понятии «полезная информация».— В сб. «Проблемы кибернетики», вып. 9. М., Физматгиз, 1963.
31. Е. К. Войшвилло. Попытка семантической интерпретации статистических понятий информации и энтропии.— В сб. «Кибернетику на службу коммунизму», т. 3. М.—Л., «Энергия», 1966.

*Поступила в редакцию  
10 июня 1967 г.*