

Б. М. РОГАЧЕВСКИЙ, Г. А. ШТАМБЕРГЕР

(Новосибирск)

**К ВОПРОСУ ОБ АППРОКСИМАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК  
НЕЛИНЕЙНЫХ ИНДУКТИВНЫХ И ЕМКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ АРКТАНГЕНСОМ  
И КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ**

Для математического анализа цепей, содержащих нелинейные элементы, часто используется тот или иной вид аппроксимации их реальных характеристик. Важнейшими требованиями при выборе вида аппроксимирующей функции являются: хорошее совпадение с реальной характеристикой нелинейного элемента; возможность получения аналитических выражений, удобных для анализа; наиболее полное соответствие выводов, полученных в результате математического анализа, данным эксперимента. Кроме того, выбор функции аппроксимации в значительной степени зависит еще и от характера изучаемого процесса, происходящего в преобразователе, выполненном на нелинейном элементе [1—3].

Так, использование различных видов приближенного представления средней (между восходящей и нисходящей ветвями предельной петли гистерезиса) кривой намагничивания ферромагнитного материала дает возможность с удовлетворительным приближением провести анализ спектрального состава э. д. с. в обмотке, охватывающей сердечник из этого материала, но совершенно не позволяет ответить на вопрос о фазовых соотношениях составляющих спектра э. д. с.

Учитывая сложность выбора вида аппроксимирующих функций, целесообразно проводить их сравнение на соответствие перечисленным выше требованиям для определения области рационального применения.

Целью настоящей работы является сравнение двух видов аппроксимации нелинейных реактивных элементов (кусочно-линейной и с помощью функции арктангенса), которые могут быть использованы при анализе процессов, происходящих в магнитных и диэлектрических (на варикондах) усилителях и модуляторах.

Несмотря на различие физических процессов, обуславливающих нелинейность характеристик элементов, содержащих ферромагнитные и сегнетоэлектрические материалы, одинаковый характер их петель гистерезиса позволяет применять и одинаковые методы математического анализа [4, 5].

При этом для перехода от уравнений, составленных для цепи, содержащей нелинейную индуктивность, к уравнениям для цепи с нелинейной емкостью (с варикондами) достаточно заменить  $B$  (магнитную индукцию),  $H$  (магнитное поле),  $e \equiv \frac{dB}{dt}$  (э. д. с.) соответственно на  $Q$  (заряд),  $E$  (электрическое поле),  $i = \frac{dQ}{dt}$  (ток через конденсатор).

Используя возможность замены предельной петли гистерезиса средней кривой намагничивания при больших амплитудах переменного поля [1], проведем сравнение двух методов аппроксимации ее применительно к расчету спектрального состава э. д. с. и чувствительности магнитных модуляторов ММ (магнитомодуляционных датчиков ММД), работающих, как известно, при весьма значительных полях возбуждения.

Основные выводы, полученные в результате этого сравнения, будут справедливы и для варикондов, используемых при больших переменных электрических полях.

Следует также заметить, что кусочно-линейная функция и арктангенс могут быть применены для аппроксимации вольт-амперной характеристики  $I=f(U)$  термосопротивления с положительным температурным коэффициентом, например, лампы с металлической нитью накаливания [2].

Проводимый ниже анализ основывается на результатах работ [6—14], при выводе которых приняты следующие допущения: 1) не учитывается влияние гистерезиса и вихревых токов; 2) возбуждающее магнитное поле изменяется во времени по синусоидальному или косинусоидальному закону; 3) сопротивление нагрузки значительно больше выходного сопротивления ММД или ММ; 4) измерительная обмотка плотно намотана на сердечник и расположена в его центральной части. Кроме того, анализ проводится для одного полуэлемента ММ и ММД, поскольку процессы, происходящие во втором полуэлементе ММ и ММД, выполненных по дифференциальной схеме, будут аналогичны.

### КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

На основании [6—9] при воздействии возбуждающего  $H = H_m \cos \omega t$  и измеряемого  $H_0$  магнитных полей выражение для э. д. с. на выходе измерительной обмотки ММ и ММД имеет следующий вид:

$$e(t) = \sum_{N=1}^{\infty} E_N \sin N \omega t, \quad (1)$$

где

$$E_N = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e(t) \sin N \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} w S \mu_{\lambda m} H_m \omega \sin \omega t \times \\ \times \sin N \omega t d(\omega t); \quad (2)$$

$w$  — число витков измерительной обмотки;  
 $S$  — сечение сердечника в  $m^2$ ;

$\mu_{дм}$  — максимальное значение дифференциальной магнитной проницаемости в гн/м;  
 $H_m$  — амплитудное значение поля возбуждения в а/м;  
 $\omega$  — частота возбуждающего поля в гц;

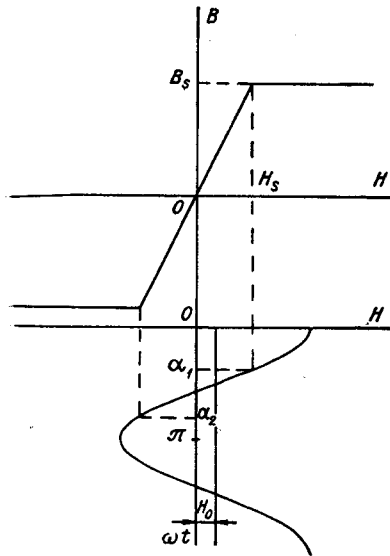


Рис. 1.

$$\alpha_1 = \arccos \frac{H_s - H_0}{H_m};$$

$$\alpha_2 = \pi - \arccos \frac{H_s + H_0}{H_m} \quad (\text{рис. 1}).$$

Необходимо обратить особое внимание на определение  $\alpha_2$ . Так, в [6, 7] принято, что  $\alpha_2 = \arccos \frac{H_s + H_0}{H_m}$ . Если такое допущение не сказывается на правильности полученного в этих работах выражения для э. д. с. четных гармоник, то э. д. с. нечетных гармоник не могут быть верно вычислены из общего выражения, приведенного, например, в [7], которое получено на основании указанного допущения. Так, в соответствии с этим выражением при  $H_0 = 0$  и  $H_m \neq 0$  э. д. с. нечетных гармоник равна нулю, что несправедливо.

Из (2) следует, что

$$E_N = \frac{2}{\pi} \omega \omega S \mu_{дм} H_m \left[ \frac{\sin(N-1)\omega t}{2(N-1)} \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \frac{\sin(N+1)\omega t}{2(N+1)} \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \right]. \quad (3)$$

Для четных гармоник, т. е. при  $N=2n$

$$\sin(N-1) \left( \pi - \arccos \frac{H_s + H_0}{H_m} \right) = \sin(2n-1) \arccos \frac{H_s + H_0}{H_m};$$

$$\sin(N+1) \left( \pi - \arccos \frac{H_s + H_0}{H_m} \right) = \sin(2n+1) \arccos \frac{H_s + H_0}{H_m}$$

и, следовательно,

$$E_{2n} = \frac{2}{\pi} \omega \omega S \mu_{дм} H_m \left\{ \frac{1}{2(2n-1)} \left[ \sin(2n-1) \arccos \frac{H_s + H_0}{H_m} - \sin(2n-1) \arccos \frac{H_s - H_0}{H_m} \right] - \frac{1}{2(2n+1)} \left[ \sin(2n+1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \arccos \frac{H_s + H_0}{H_m} - \sin(2n+1) \arccos \frac{H_s - H_0}{H_m} \right] \right\}. \quad (4)$$

Поскольку  $\sin n \arccos x = U_n(x)$  [12], где  $U_n(x)$  — полином Чебышева второго рода, то

$$E_{2n} = \frac{2}{\pi} \omega \omega S \mu_{дм} H_m \left\{ \frac{1}{2(2n-1)} \left[ U_{2n-1} \left( \frac{H_s + H_0}{H_m} \right) - \right. \right.$$

$$- U_{2n-1} \left( \frac{H_s - H_0}{H_m} \right) \left] - \frac{1}{2(2n+1)} \left[ U_{2n+1} \left( \frac{H_s + H_0}{H_m} \right) - \right. \\ \left. - U_{2n+1} \left( \frac{H_s - H_0}{H_m} \right) \right] \}. \quad (5)$$

Формула для расчета э. д. с. нечетных гармоник ( $N=2n-1$ ) находится аналогичным образом:

$$E_{2n-1} = \frac{2}{\pi} \omega S \mu_{\lambda m} H_m \left\{ \frac{1}{4n} \left[ U_{2n} \left( \frac{H_s + H_0}{H_m} \right) + U_{2n} \left( \frac{H_s - H_0}{H_m} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{4(n-1)} \left[ U_{2n-2} \left( \frac{H_s + H_0}{H_m} \right) + U_{2n-2} \left( \frac{H_s - H_0}{H_m} \right) \right] \right\}. \quad (6)$$

Соотношения (4), (5) и (6) удобны для определения спектрального состава э. д. с. на выходе ММ и ММД, поскольку полиномы Чебышева протабулированы. Выражение э. д. с. первой гармоники ( $n=1$ ) может быть получено после раскрытия неопределенности вида  $\frac{0}{0}$ , которую дают вторые квадратные скобки уравнения (6) при  $n=1$ :

$$E_1 = \frac{2}{\pi} \omega S \mu_{\lambda m} H_m \left\{ \frac{1}{4} \left[ U_2 \left( \frac{H_s + H_0}{H_m} \right) + U_2 \left( \frac{H_s - H_0}{H_m} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ \arcsin \frac{H_s + H_0}{H_m} + \arcsin \frac{H_s - H_0}{H_m} \right] \right\}. \quad (7)$$

В случае малых измеряемых магнитных полей ( $H_0 \ll H_m$ ) (6) и (7) значительно упрощаются:

$$E_{2n-1} = \frac{2}{\pi} \omega S \mu_{\lambda m} H_m \left\{ \frac{1}{2n} U_{2n} \left( \frac{H_s}{H_m} \right) - \frac{1}{2(n-1)} U_{2n-2} \left( \frac{H_s}{H_m} \right) \right\}; \quad (8)$$

$$E_1 = \frac{2}{\pi} \omega S \mu_{\lambda m} H_m \left\{ \frac{1}{2} U_2 \left( \frac{H_s}{H_m} \right) + \arcsin \frac{H_s}{H_m} \right\}. \quad (9)$$

При больших значениях  $H_m$ , когда  $\frac{H_s}{H_m} \rightarrow 0$ ,

$$U_{2n} \left( \frac{H_s}{H_m} \right) \rightarrow (-1)^{n+1} 2n \frac{H_s}{H_m}; \quad (10)$$

$$U_{2n-2} \left( \frac{H_s}{H_m} \right) \rightarrow (-1)^n (2n-2) \frac{H_s}{H_m} \quad (11)$$

и тогда

$$E_{2n-1} \rightarrow (-1)^{n+1} \frac{4\omega S B_s}{\pi}. \quad (12)$$

Амплитуда э. д. с. любой четной гармоники при  $H_0 \ll H_m$  может быть определена следующим образом [9]:

$$E_{2n} = \frac{4}{\pi} \omega S \mu_{\lambda m} H_0 \sin 2n \alpha, \quad (13)$$

где  $\alpha = \arccos \frac{H_s}{H_m}$ ;  $E_{2n}$  достигает своего максимального значения, когда  $2n\alpha = \frac{\pi}{2}(2k-1)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Это значение одинаково для всех четных гармоник и равно

$$E_{2n(\max)} = \frac{4}{\pi} \omega S \omega \mu_{\lambda m} H_0. \quad (14)$$

Поскольку скважность импульсов магнитной проницаемости имеет величину

$$q = \frac{\pi}{2\alpha}, \quad (15)$$

то  $E_{2n} = E_{2n(\max)}$  будет иметь место при

$$q = \frac{2n}{2k-1}, \quad (16)$$

где  $k=1, 2, 3, \dots$ .

Из (16) следует интересный вывод, что максимального значения амплитуда э. д. с. любой четной гармоники достигает при скважности прямоугольных импульсов  $\mu_{\lambda}(t)$ , равной номеру гармоники (если  $k=1$ ).

#### АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЕЙ АРКТАНГЕНСА

Количественные соотношения, основанные на использовании аппроксимации кривой намагничивания сердечника функцией арктангенса, представлены в [1, 10, 11, 13, 14]. Ниже приведем те из них, которые необходимы для сравнения с результатами, полученными при использовании кусочно-линейного метода аппроксимации.

Для  $H_0 \ll H_m$  в [14] получено выражение, позволяющее вычислять амплитуду э. д. с. нечетных гармоник на выходе полуэлемента ММД,

$$E_{2n-1} = 2S \omega \omega b \left[ \frac{\sqrt{1 + (\alpha H_m)^2} - 1}{\alpha H_m} \right]^{2n-1} \times \\ \times \left[ 1 - 2n(n-1) \frac{(\alpha H_0)^2}{1 + (\alpha H_m)^2} \right] (-1)^{n+1}, \quad (17)$$

где

$$b = \frac{2B_s}{\pi}; \quad \alpha = \frac{\pi \mu_{\lambda m}}{2B_s};$$

$B_s$  — индукция насыщения в *мл*.

Там же показано, что в целом ряде случаев для расчета  $E_{2n-1}$  можно использовать значительно более простое выражение:

$$E_{2n-1} = (-1)^{n+1} 2S \omega \omega b \left[ \frac{\sqrt{1 + (\alpha H_m)^2} - 1}{\alpha H_m} \right]^{2n-1}. \quad (18)$$

Если  $\alpha H_m \rightarrow \infty$ , то

$$E_{2n-1} \rightarrow (-1)^{n+1} 2S \omega \omega b. \quad (19)$$

Э. д. с. четных гармоник при  $H_0 \ll H_m$  определяется следующим образом [11]:

$$E_{2n} = \frac{4S \omega \omega b n H_0}{\sqrt{1 + (\alpha H_m)^2}} \left[ \frac{\sqrt{1 + (\alpha H_m)^2} - 1}{\alpha H_m} \right]^{2n}. \quad (20)$$

Поле возбуждения, при котором  $E_{2n}$  достигает своего максимального значения, равно

$$\alpha H_{m \text{ опт}} = \sqrt{2n(n + \sqrt{n^2 + 1})}. \quad (21)$$

Используя приведенные выше соотношения, можно провести сравнение двух указанных методов аппроксимации. При сравнении принимается, что максимальные значения дифференциальной магнитной проницаемости и индукции насыщения одинаковы как при использовании кусочно-линейного метода, так и арктангенсного.

Наиболее важные предельные величины, полученные из (12)—(14), (18)—(21), представлены в таблице, при составлении которой было использовано также следующее соотношение:

$$\alpha H_m = \frac{\pi}{2} \frac{H_m}{H_s}, \quad (22)$$

так как  $\alpha = \frac{\pi \mu_{дм}}{2B_s}$ , а  $\frac{H_s}{H_m} = \frac{B_s}{\mu_{дм} H_m}$ .

Из таблицы видно, что некоторые основные величины ( $E_{2n-1}$  при  $H_m \rightarrow \infty$ ;  $\alpha H_m$  при  $G_{2n} = G_{2n \text{ max}}$ ), полученные различными методами аппроксимаций, практически равны друг другу.

Следует, однако, отметить большую (в 1,75—1,85 раза) чувствительность, определенную методом кусочно-линейной аппроксимации, в

Основные величины	Кусочно-линейный метод	Арктангенсный метод
$E_{2n-1}$ при $H_m \rightarrow \infty$	$\frac{4S\omega\omega B_s}{\pi}$	$\frac{4S\omega\omega B_s}{\pi}$
$G_2 = \left(\frac{E_2}{H_0}\right)_{\text{max}}$	$1,273 \mu_{дм} S \omega \omega$	$0,688 \mu_{дм} S \omega \omega$
$\alpha H_m$ при $G_2 = G_{2\text{max}}$	$2,21 (H_m = \sqrt{2} H_s)$	$2,197$
$G_4 = \left(\frac{E_4}{H_0}\right)_{\text{max}}$	$1,273 \mu_{дм} S \omega \omega$	$0,72 \mu_{дм} S \omega \omega$
$\alpha H_m$ при $G_4 = G_{4\text{max}}$	$4,1 (H_m = 2,61 H_s)$	$4,12$
$G_6 = \left(\frac{E_6}{H_0}\right)_{\text{max}}$	$1,273 \mu_{дм} S \omega \omega$	$0,73 \mu_{дм} S \omega \omega$
$\alpha H_m$ при $G_6 = G_{6\text{max}}$	$6,06 (H_m = 3,86 H_s)$	$6,08$

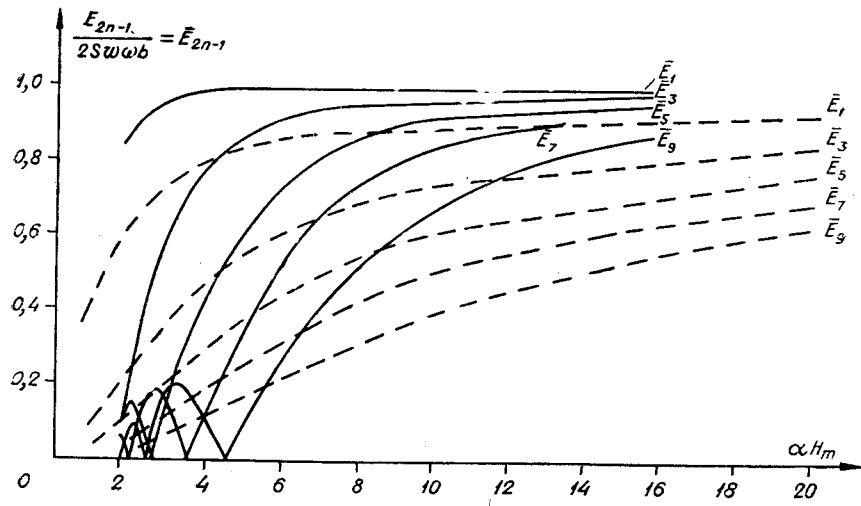


Рис. 2.

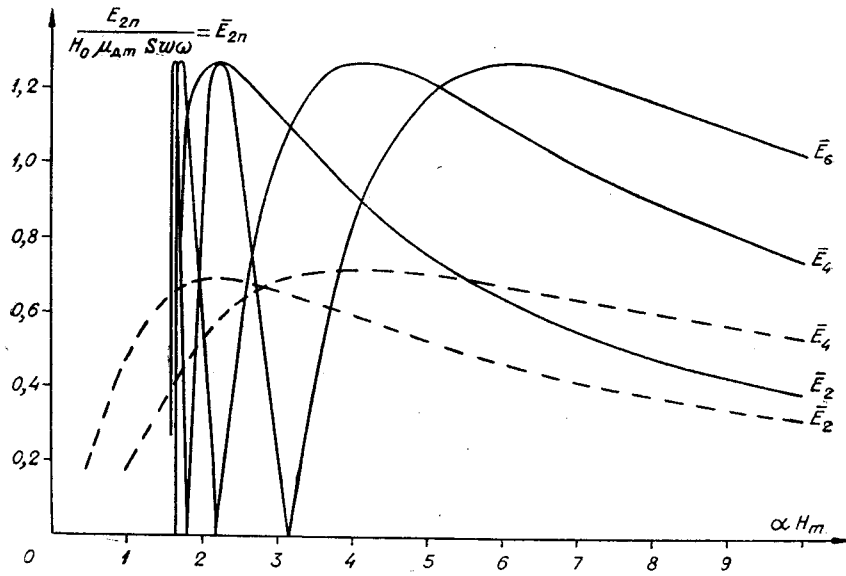


Рис. 3.

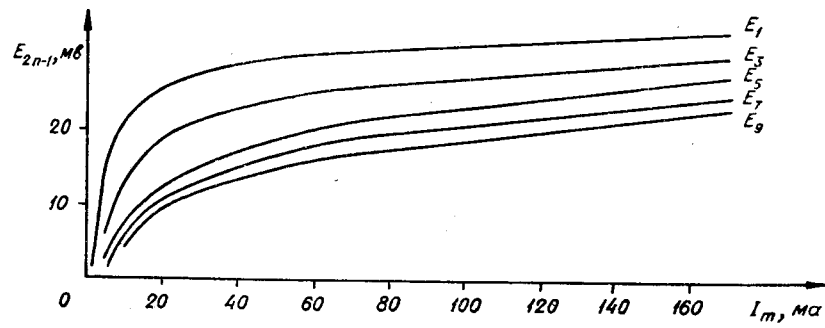


Рис. 4.

сравнении с чувствительностью, вычисленной с использованием арктангенсного метода. Этот факт весьма важен, поскольку при подборе сердечников для ММД или ММ необходимо обращать внимание на характер перегиба кривой намагничивания от  $\mu_{дм}$  к  $B_s$ . Чем ближе этот перегиб напоминает кусочно-линейное приближение, тем больше будет чувствительность по четным гармоникам.

На рис. 2 приведены кривые зависимости амплитуд нечетных и на рис. 3 четных гармоник выходной э. д. с. ММ и ММД от поля возбуждения  $a H_m$ . Кривые построены по формулам (8), (9), (13), (18) (20). Вид кривых, полученных при использовании кусочно-линейного метода (сплошные линии) аппроксимации, значительно отличается от кривых, построенных на основании использования в качестве аппроксимирующей функции арктангенсного метода (штриховые линии). Вид кривых, полученных при использовании значений соответствующих гармоник, вычисленных по формулам, полученным при аппроксимации кривой намагничивания функцией арктангенса.

Представленные на рис. 4, 5 экспериментальные кривые показывают, что наиболее правильно отражает характер зависимости  $E_{2n-1}$  и  $E_{2n}$  от поля возбуждения арктангенсный метод (отсутствуют неоднократные переходы через нуль э. д. с. высших гармоник).

Что касается количественного совпадения экспериментальных данных с данными, полученными из формул арктангенсного приближения, то оно зависит от марки применяемого материала, толщины пластин сердечника,

режима его отжига, коэффициента размагничивания, частоты возбуждающего поля. Поэтому, например, имеющее место близкое совпадение экспериментальных и теоретических кривых данного сердечника на одной частоте может не повториться на другой.

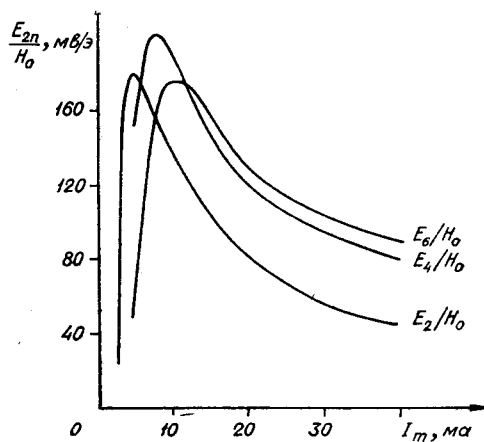


Рис. 5.

## ВЫВОДЫ

При анализе зависимости первой и второй гармоник э. д. с. на выходе полуэлемента ММ и ММД от параметров, определяющих режим работы модулятора, может быть использован как кусочно-линейный, так и арктангенсный методы аппроксимации. Применение того или другого метода определяется тем, к какому приближению наиболее близка реальная кривая намагничивания.

Исследование высших гармоник э. д. с. во всем диапазоне возбуждающих полей следует производить, основываясь на аппроксимации с



помощью функции арктангенса, поскольку, как видно из сравнения кривых рис. 2, 3 и 4, 5, от 0 до значений  $\alpha H_m$ , соответствующих последнему переходу через нуль кривой э. д. с. высшей гармоники, кусочно-линейный метод приводит к явлениям, которые обычно не имеют места в действительности. Для полей возбуждения, больших указанного значения  $\alpha H_m$ , при анализе высших гармоник можно использовать также и кусочно-линейный метод.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Розенблат. Магнитные усилители, ч. I. М., «Советское радио», 1960.
2. Л. А. Бессонов. Нелинейные электрические цепи. М., «Высшая школа», 1964.
3. Р. Л. Аронов. Аппроксимирование кривой намагничивания.— Электричество, 1948, № 4.
4. Т. Н. Вербицкая. Вариконды. М.—Л., Госэнергоиздат, 1958.
5. М. Д. Карасев. Некоторые общие свойства нелинейных реактивных элементов.— Успехи физических наук, 1959, т. XIX, вып. 2.
6. М. А. Розенблат. К расчету магнитомодуляционных датчиков напряженности магнитного поля.— Электричество, 1957, № 7.
7. В. Н. Михайловский, Ю. И. Спектор. Некоторые вопросы теории магнитных усилителей и магнитомодуляционных зондов типа «второй гармоники».— Автоматика и телемеханика, 1957, т. XVIII, № 8.
8. Л. Я. Мизюк. Входные преобразователи для измерения напряженности низкочастотных магнитных полей. Киев, «Наукова думка», 1964.
9. А. П. Лысенко. О высших четных гармониках э. д. с. феррозондов и магнитных модуляторов.— В сб. «Геофизическое приборостроение», вып. 9. Л., Гостоптехиздат, 1961.
10. Ю. Ф. Пономарев. Феррозонды с продольным возбуждением в малых переменных полях.— В сб. «Геофизическое приборостроение», вып. 10. Л., Гостоптехиздат, 1961.
11. Н. Н. Зацепин. Гармоники э. д. с. феррозондов с продольным возбуждением при измерении однородного постоянного магнитного поля.— В сб. «Геофизическое приборостроение», вып. 7. Л., Гостоптехиздат, 1960.
12. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1964.
13. Л. С. Гольдфарб, Г. Р. Герценберг. Определение амплитуд гармонии тока и напряжения в электрических цепях, содержащих железо.— Электричество, 1939, № 1.
14. Б. М. Рогачевский. О нечетных гармониках э. д. с. на выходе магнитомодуляционных датчиков.— Автометрия, 1966, № 4.

*Поступила в редакцию  
13 августа 1966 г.,  
окончательный вариант —  
8 октября 1966 г.*