АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1967

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

УДК 681.088

В. А. ФЕДОРОВ

(Новосибирск)

АНАЛИЗ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С ЛИНЕЙНЫМИ ФЛЮКТУИРУЮЩИМИ ДАТЧИКАМИ И УСТРОЙСТВОМ ОСРЕДНЕНИЯ

Известно, что точность результата измерения может быть улучшена путем многократного измерения одной и той же величины и последующей обработки полученных результатов. Обычно обработка заключается в осреднении чисел. Полученное среднее является состоятельной оценкой математического ожидания результата измерения. Технически такая обработка реализуется относительно просто. Среднеквадратическое отклонение оценки $\hat{N} = \frac{1}{n}\sum_{i=1} N_i$ от $M(\hat{N})$ определяется известной формулой [1]:

$$\sigma_{\hat{N}} = \frac{\sigma_{N_1}}{\sqrt{n}}. \qquad (1)$$

В (1) предполагается, что $\sigma_{N_1} = \sigma_{N_i}$, а случайные величины N_i не коррелированы.

Принцип осреднения сигналов может быть применен и с целью улучшения работы измерительных преобразователей. При этом режим многократного использования одного измерительного преобразователя осуществить трудно, так как потребовалось бы запоминающее устройство аналоговых величин. Более перспективными являются преобразователи со структурой, изображенной на рис. 1. Оценка среднеквадратического отклонения формируемого сигнала $\hat{\Theta}$ от его математического ожидания $M(\hat{\Theta})$ может быть определена (при выполнении отмеченных выше условий) по формуле (1).

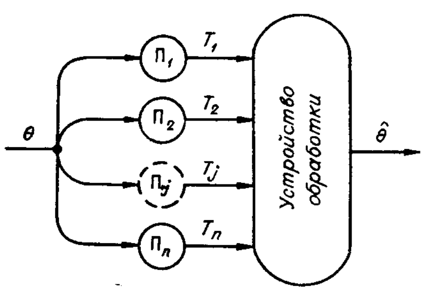

Рис. 1.

Рассмотрим более общий случай, когда характеристики датчиков в системе (см. рис. 1) взаимокоррелированы и неидентичны.

Введем следующие условные обозначения*: Θ — входное воздействие; Π_j — преобразователь входного воздействия в случайную величину T_j; j — номер канала ($j=1, 2, \ldots, n$); T_j — выходная (по отношению к Π_j) случайная величина; $\hat{\Theta}$ — случайная величина на выходе системы. Приведем также используемые исходные предположения.

1. Преобразователь Π_j — линейная система со случайным параметром S_j:

$$\tau_j = s_j \vartheta. \tag{1a}$$

2. Случайная величина S_j представляет собой сумму случайных величин Γ_j и $\dot{B}_j$:

$$s_j = \gamma_j + \beta_j. \tag{2}$$

Случайные величины Γ_j и $\dot{B}_j$ выражают технологический и эксплуатационный разбросы параметров соответственно.

3. Случайные величины Γ_j и $\dot{B}_j$ заданы числовыми характеристиками:

$$M(\Gamma_j); \quad M(\dot{B}_j) = 0; \quad D(\Gamma_j); \quad D(\dot{B}_j).$$

Случайные величины Γ_j и $\dot{B}_j$ независимы.

4. Случайные величины $\dot{B}_1, \dot{B}_2, \ldots, \dot{B}_j, \ldots, \dot{B}_i, \ldots, \dot{B}_n$ обладают взаимной корреляцией.

Коэффициент корреляции λ одинаков для всех пар каналов: $\lambda_{ji} = \lambda$ при $j = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $j \neq i$.

Такая ситуация часто имеет место на практике.

5. Устройство обработки случайных величин T_j осуществляет осреднение

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \tau_j. \tag{3}$$

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\hat{\Theta}$.

Учитывая (1a) и (2), можно написать

$$\vartheta = \frac{\theta}{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \gamma_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \right]. \tag{4}$$

Введем обозначения

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j = \xi; \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j = \psi. \tag{6}$$

---

* Соответствующими малыми буквами обозначаются возможные значения случайных величин.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины Ξ определяются так:

$$M(\Xi) = \sum_{j=1}^{n} M(\Gamma_j); \quad D(\Xi) = \sum_{j=1}^{n} D(\Gamma_j). \tag{7}$$

Для определения математического ожидания и дисперсии случайной величины Ψ проделаем следующее. Перейдем от системы коррелированных случайных величин $\dot{B}_1, \ldots, \dot{B}_j, \ldots, \dot{B}_n$ к эквивалентной системе некоррелированных центрированных случайных величин $\dot{V}_1, \ldots, \dot{V}_j, \ldots, \dot{V}_n$, для чего сделаем замену переменных [2]:

$$\dot{B}_1 = \dot{V}_1;$$

$$\dot{B}_2 = a_{21}\dot{V}_1 + \dot{V}_2;$$

$$\dot{B}_3 = a_{31}\dot{V}_1 + a_{32}\dot{V}_2 + \dot{V}_3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{B}_\nu = a_{\nu 1}\dot{V}_1 + a_{\nu 2}\dot{V}_2 + \ldots + a_{\nu\mu}\dot{V}_\mu + \ldots + a_{\nu,\nu-1}\dot{V}_{\nu-1} + \dot{V}_\nu;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{B}_n = a_{n1}\dot{V}_1 + a_{n2}\dot{V}_2 + \ldots + a_{n,n-1}\dot{V}_{n-1} + \dot{V}_n. \tag{8}$$

Коэффициенты $a_{\nu\mu}$ и дисперсии $D(\dot{V}_\nu)$ случайной величины $\dot{V}_\nu$ можно вычислить по формулам (ограничимся случаем $n \leqslant 4$):

$$D(\dot{V}_1) = D(\dot{B}_1); \quad a_{21} = \lambda_{12}\frac{\sigma_{\beta_1}\sigma_{\beta_2}}{D(\dot{B}_2)};$$

$$D(\dot{V}_2) = D(\dot{B}_2) + |a_{21}|^2 D(\dot{B}_1); \quad a_{31} = \lambda_{13}\frac{\sigma_{\beta_1}\sigma_{\beta_3}}{D(\dot{B}_1)};$$

$$a_{32} = \frac{\lambda_{23}\sigma_{\beta_2}\sigma_{\beta_3} - a_{31}a_{21}D(\dot{B}_1)}{D(\dot{V}_2)};$$

$$D(\dot{V}_3) = D(\dot{B}_3) - |a_{31}|^2 D(\dot{B}_1) - |a_{32}|^2 D(\dot{V}_2); \tag{9}$$

$$a_{41} = \frac{\lambda_{14}\sigma_{\beta_1}\sigma_{\beta_4}}{D(\dot{B}_1)}; \quad a_{42} = \frac{\lambda_{24}\sigma_{\beta_2}\sigma_{\beta_4} - a_{41}a_{21}D(\dot{B}_1)}{D(\dot{V}_2)};$$

$$a_{43} = \frac{\lambda_{34}\tau_{\beta_2}\sigma_{\beta_4} - a_{42}a_{32}D(\dot{V}_2)}{D(\dot{V}_3)};$$

$$D(\dot{V}_4) = D(\dot{B}_4) - |a_{41}|^2 D(\dot{B}_1) - |a_{42}|^2 D(\dot{V}_2) + |a_{43}|^2 D(\dot{V}_3).$$

Коэффициенты $a_{\nu\mu}$ и дисперсии $D(\dot{V}_\nu)$ с учетом пункта 4 могут быть приведены к виду:

$$D(\dot{V}_1) = D(\dot{B}_1); \quad a_{21} = \lambda\frac{\sigma_{\beta_2}}{\sigma_{\beta_1}};$$

$$D(\dot V_2) = D(\dot B_2)(1-\lambda^2); \quad a_{31} = \lambda \frac{\sigma_{\beta_3}}{\sigma_{\beta_1}};$$

$$a_{32} = \lambda \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{\sigma_{\beta_3}}{\sigma_{\beta_2}}; \qquad a_{41} = \lambda \frac{\sigma_{\beta_4}}{\sigma_{\beta_1}};$$

$$D(\dot V_3) = D(\dot B_3) \frac{2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 1}{1+\lambda^2}; \quad a_{42} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{\sigma_{\beta_4}}{\sigma_{\beta_3}}; \tag{10}$$

$$a_{43} = \frac{\lambda}{1+2\lambda} \frac{\sigma_{\beta_4}}{\sigma_{\beta_3}};$$

$$D(\dot V_4) = D(\dot B_4)\left[(1-\lambda)^2 - \lambda^2 \frac{(1-\lambda)^2}{1-\lambda^2} - \frac{(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1)^2}{(2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 1)(1-\lambda^2)}\right].$$

Выражение (6) можно представить следующим образом:

$$\Psi_n(\lambda) = (1 + a_{21} + a_{31} + \ldots + a_{n1})\dot V_1 + (1 + a_{32} + a_{42} + \ldots + a_{n2}) \times$$
$$\times \dot V_2 + (1 + a_{43} + \ldots + a_{n3})\dot V_3 + \ldots = \eta_1 \dot V_1 + \eta_2 \dot V_2 + \eta_3 \dot V_3 + \ldots. \tag{11}$$

Принимая во внимание, что случайные величины $\dot V_1, \ldots, \dot V_2$ не коррелированы, мы можем записать:

$$M(\Psi_n) = 0; \tag{12}$$

$$D(\Psi_n) = \sum_{j=\nu=1}^{n} \eta_j^2 D(\dot V_\nu). \tag{13}$$

Таким образом, дисперсия случайной величины $\hat\Theta$ может быть выражена так:

$$D(\hat\Theta) = \frac{\vartheta^2}{n^2}\left[\sum_{j=1}^{n} D(\Gamma_j) + \sum_{\nu=j=1}^{n} \eta_j^2 D(\dot V_\nu)\right]. \tag{14}$$

Обозначим второе слагаемое в выражении (14) $\varphi_n(\lambda)$. На основании выражений (10) и (11) получим выражения для двух-, трех-, четырехканальных систем:

$$\varphi_2(\lambda) = D(\dot B_1) + D(\dot B_2) + 2\lambda\,\sigma_{\beta_1}\sigma_{\beta_2};$$

$$\varphi_3(\lambda) = D(\dot B_1) + D(\dot B_2) + D(\dot B_3) + [2\sigma_{\beta_1}(\sigma_{\beta_2} + \sigma_{\beta_3}) + 2\sigma_{\beta_2}\sigma_{\beta_3}]\,\lambda; \tag{15}$$

$$\varphi_4(\lambda) = D(\dot B_1) + D(\dot B_2) + D(\dot B_3) + D(\dot B_4) + [2\sigma_{\beta_1}(\sigma_{\beta_2} + \sigma_{\beta_3} + \sigma_{\beta_4}) +$$
$$+ 2\sigma_{\beta_2}(\sigma_{\beta_3} + \sigma_{\beta_4}) + 2\sigma_{\beta_3}\sigma_{\beta_4}]\,\lambda.$$

На основании наблюдаемой закономерности предполагается, что можно записать

$$\varphi_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} D(\dot B_j) + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_{\beta_k}\sigma_{\beta_j}. \tag{16}$$

Окончательное выражение для дисперсии $D_n(\hat{\Theta})$ будет иметь вид

$$D_n(\hat{\Theta}) = \frac{\vartheta^2}{n^2}\left[\sum_{j=1}^{n} D(\Gamma_j) + \sum_{j=1}^{n} D(\dot{B}_j) + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_{\beta_k}\sigma_{\beta_j}\right]. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь частный случай формулы (17):

$$\begin{aligned} D(\Gamma_1) &= D(\Gamma_2) = \ldots = D(\Gamma_n); \\ D(\dot{B}_1) &= D(\dot{B}_2) = \ldots = D(\dot{B}_n). \end{aligned} \quad (18)$$

Условимся дисперсию для такого случая обозначать $\overset{*}{D}_n(\hat{\Theta})$. Принимая во внимание условие (18), мы можем написать:

$$\overset{*}{D}_n(\hat{\Theta}) = \frac{\vartheta^2}{n}\left[n\,D(\Gamma_1) + n\,D(\dot{B}_1) + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_{\beta_k}\sigma_{\beta_j}\right].$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_{\beta_k}\sigma_{\beta_j} = n\,D(\dot{B}_1) \sum_{1}^{n-1} (1-k)$$

и

$$\sum_{k=1}^{n-1} (1-k) = n - 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k,$$

найдем

$$\overset{*}{D}_n(\hat{\Theta}) = \frac{\vartheta^2}{n}\left\{D(\Gamma_1) + D(\dot{B}_1)\left[1 + 2\lambda < n - 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k >\right]\right\}.$$

Но так как $\frac{1}{n}\sum_{k}^{n-1} k = 0{,}5\,(n-1)$, получим окончательно

$$\overset{*}{D}_n(\hat{\Theta}) = \frac{\vartheta^2}{n}\,[D(\Gamma_1) + D(\dot{B}_1)] + \vartheta^2\lambda\,D(\dot{B}_1)\,\frac{n-1}{n}. \quad (19)$$

Введем новый параметр $k = \frac{D(\Gamma_1)}{D(\dot{B}_1)}$, характеризующий соотношение некоррелированных и коррелированных флюктуаций параметров датчиков. После этого формула (19) может быть представлена в следующем виде:

$$\overset{*}{D}_n(\hat{\Theta}) = \frac{\vartheta^2}{n}\,D(\dot{B}_1)\,(k + 1 - \lambda) + \vartheta^2\lambda\,D(\dot{B}_1). \quad (20)$$

Потенциально достижимый (при данном способе обработки сигналов датчиков) минимум дисперсии $\overset{*}{D}(\hat{\Theta})$ выходной переменной $\hat{\Theta}$ равен

$$\overset{*}{D}{}_{\min}^{(n=\infty)}(\hat{\Theta}) = \vartheta^2\lambda\,D(\dot{B}_1). \quad (21)$$

Близость же уровня дисперсии n-канальной системы ($n \neq \infty$ к потенциально достижимому ее минимуму может быть оценена по формуле
В частности, при $\lambda = 1$ имеем

$$\frac{\overset{*}{D}{}_{\min}^{(n=\infty)}(\overset{\Lambda}{\Theta})}{\overset{*}{D}_n(\overset{\Lambda}{\Theta})} = \frac{1}{\dfrac{k}{n} + 1}. \tag{23}$$

Из формулы (23) следует, что добавление каналов может быть полезно даже в случае, когда параметры датчиков изменяются синхронно ($\lambda = 1$).

Графики, соответствующие формуле (23), приведены на рис. 2.

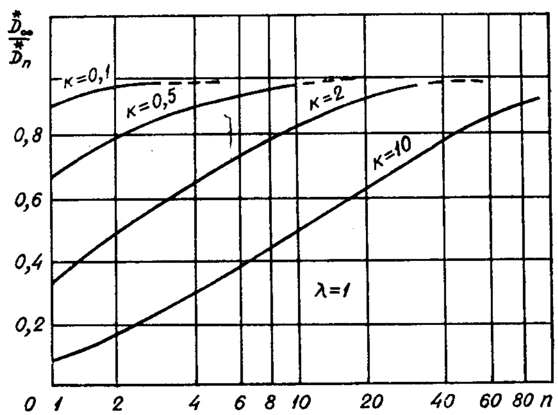

Рис. 2.

Большой интерес для практики имеет также вопрос о чувствительности дисперсии $D_n(\overset{\Lambda}{\Theta})$ к вариации параметров. Используя теоремы приращений функций при вариации аргументов [3], можно показать, что чувствительность n-канальной системы (см. рис. 1) к малым вариациям параметра λ пропорциональна отношению («коэффициенту чувствительности»)

$$r(\lambda) = \frac{2\lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=k+1}^{n} \sigma_{\beta_k} \sigma_{\beta_j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} D(\Gamma_j) + \sum\limits_{j=1}^{n} D(\dot{B}_j) + 2\lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=k+1}^{n} \sigma_{\beta_k} \sigma_{\beta_j}}.$$

Соответственно нормированный коэффициент чувствительности равен

$$r_{\text{н}}(\lambda) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} D(\Gamma_j) + \sum\limits_{j=1}^{n} D(\dot{B}_j) + 2 \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=k+1}^{n} \sigma_{\beta_k} \sigma_{\beta_j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} D(\Gamma_1) + \sum\limits_{j=1}^{n} D(\dot{B}_j) + 2\lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=k+1}^{n} \sigma_{\beta_k} \sigma_{\beta_j}} \lambda.$$

«Удельный вес» же каждого параметра можно оценить, рассмотрев двухканальную систему. Для нее при принятых предположениях справедливо соотношение

$$\delta D_2(\hat{\Theta}) = \frac{1}{D_2(\hat{\Theta})} \left[\sum_{j=1}^{2} \sigma_{\Gamma_j} \sum_{i=1}^{2} C^{i}_{(\delta\sigma_{\beta_1},\, \delta\sigma_{\beta_2})} + \sum_{j=1}^{2} \sigma_{\beta_j} \sum_{i=1}^{2} C^{i}_{(\delta\sigma_{\beta_1},\, \delta\sigma_{\beta_2})} + \right.$$

$$\left. + 2\lambda\, \sigma_{\beta_1} \sigma_{\beta_2} \left\langle \sum_{i=1}^{2} C^{i}_{(\delta\sigma_{\beta_1},\, \delta\sigma_{\beta_2})} (1 + \delta\lambda) + \delta\lambda \right\rangle \right],$$

где $C^{i}_{(\delta\sigma_{\beta_1},\, \delta\sigma_{\beta_2})}$ — сочетание из $\delta\sigma_{\beta_1}$, $\delta\sigma_{\beta_2}$ по i элементов, а $\delta x = \frac{\Delta x}{x}$.

Коэффициенты, стоящие перед членами с δ характеризуют «удельный вес», чувствительность дисперсии к вариации этого параметра.

Таким образом, получены соотношения, позволяющие выявить и оценить количественно закономерности, существующие в рассматриваемой системе. Эти соотношения могут быть использованы для анализа и интерпретации явлений, происходящих в рецептивных полях биологических анализаторных систем [4], а также самостоятельно как обобщенный вариант формулы (1) для оценки погрешности измерений. Анализ полученных соотношений позволяет утверждать, что измерительные преобразователи рассматриваемого типа имеют преимущества перед традиционными одноканальными преобразователями в смысле большей достоверности формируемых сигналов. Влияние разброса параметров здесь ослабляется за счет осреднения выходных сигналов. Таким образом, качественное преобразование может быть осуществлено на основе использования простых преобразователей с большими допусками на разброс параметров. Такие преобразователи «технологичны» в процессе производства. Отметим также, что влияние корреляции параметров датчиков не может быть полностью устранено путем увеличения числа каналов. Потенциально достижимый ($n \to \infty$; $\lambda \neq 0$; $k \neq \infty$) выигрыш (по сравнению с одноканальной системой) по дисперсии зависит от степени корреляции параметров датчиков и соотношения $\frac{D(\Gamma_1)}{D(\dot{B}_1)} = k$ дисперсий некоррелированных (Γ_1) и коррелированных $(\dot{B}_1)$ параметров датчиков. С увеличением k потенциальные возможности растут. Иными словами, системы, для которых справедлива формула (19) и k имеет большое значение, «усовершенствуются» с ростом числа каналов лучше, чем системы с малым k. Преобразователи данного типа уже создаются [5]. Полученные в работе соотношения могут быть полезны при формулировке технических условий на проектируемые преобразователи данного типа.

В заключение выражаю благодарность д-ру техн. наук М. П. Цапенко за полезные советы в процессе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Советское радио», 1963.
2. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
3. В. И. Пампуро. Теоремы приращений функций при вариации аргументов.— В сб. «Математическое моделирование и теория электрических цепей», вып. III. Киев, «Наукова думка», 1965.

4. Л. Е. Пинчук, Г. И. Салов, В. А. Федоров, М. П. Цапенко. Избыточность в рецептивных нейронных сетях и анализ некоторых путей ее использования для построения новых средств измерения.— Второй симпозиум по использованию избыточности в информационных системах. Тезисы докладов. Л., 1966.
5. В. С. Чаман, М. И. Коченов. Датчик мгновенного выполнения ряда измерений и определения среднего результата.— В сб. «Точность механизмов и автоматизированных измерительных средств». М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
13 октября 1966 г.