А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1967

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

УДК 681.2.08

М. Л. ЕЗЕРСКИЙ, А. М. КУПЕРМАН

(Ленинград)

О ВЫБОРЕ ШАГА КВАНТОВАНИЯ ПО УРОВНЮ И ПО ВРЕМЕНИ ПРИ ЦИФРОВОМ ОСРЕДНЕНИИ*

Осреднение (сглаживание) является разновидностью статистической обработки результатов измерения x_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, осуществляемой по алгоритму

$$\tilde{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{1}$$

Осреднение используется для выделения полезного сигнала на фоне шумов. В частности, шумом можно считать случайную составляющую инструментальной погрешности измерения. В этом случае осреднение приводит к повышению точности измерения. В дальнейшем рассматривается сглаживание случайного стационарного процесса $X(t)$, эргодического относительно математического ожидания $\overline{X}$, для которого выражение (1) определяет несмещенную оценку $\tilde{X}$ величины $\overline{X}$ по значениям процесса $X(t)$, полученным в моменты времени t_i.

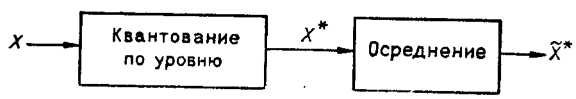

Рис. 1. Цифровое осреднение сигнала X.

При цифровом осреднении (рис. 1) сглаживанию подвергается квантованный по уровню сигнал X^*:

$$\tilde{X}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^*. \tag{2}$$

Это выражение определяет несмещенную оценку величины $\overline{X}$ при условии

$$M(X^*) = \overline{X}. \tag{3}$$

---

* Материал доложен на VIII Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1966 года в Новосибирске.

При нарушении этого равенства в результате осреднения появляется систематическая погрешность, равная разности $M(X^*)-\overline{X}$. Качество цифрового осреднения характеризуется уменьшением дисперсии $D(\widetilde{X}^*)$ сглаженного сигнала по сравнению с дисперсией $D(X)$ входного процесса.

Как известно [1], квантованный по уровню случайный стационарный процесс также является стационарным. Поэтому для величины $D(\widetilde{X}^*)$ можно записать

$$D(\widetilde{X}^*) = \frac{D(X^*)}{N}\left[1 + 2\sum_{i=1}^{N}\left(1 - \frac{i}{N}\right)K_{X^*}(i\,\Delta\,t)\right], \tag{4}$$

где $K_{X^*}(\tau)$ — автокорреляционная функция квантованного по уровню сигнала X^*; Δt — шаг квантования по времени; $\Delta t(N-1)=T$ — время осреднения.

Величины $D(X^*)$ и $K_{X^*}(i\,\Delta\,t)$ в этом выражении зависят от шага h квантования по уровню. При выборе шага h следует учитывать [1], что если двумерная характеристическая функция $F_X(u_1, u_2)$ входного сигнала X обращается в нуль при

$$|u_1| \geqslant \frac{2\pi}{h}, \quad |u_2| \geqslant \frac{2\pi}{h}, \tag{5}$$

то

$$D(X^*) = D(X) + \frac{h^2}{12};$$

$$K_{X^*}(\tau) = K_X(\tau).$$

Для большинства практически встречающихся законов распределения условие (5) выполняется при достаточно малом шаге квантования по уровню. Выбор величины h ограничивается, с одной стороны, ростом сложности схем с уменьшением шага h, а с другой — появлением систематических ошибок в результате осреднения при его увеличении. Так, в случае нормального закона распределения условие (3) приводит к соотношению [2]

$$h < 2\sqrt{D(X)}.$$

В первой части нашей работы рассматривается способ исключения систематической ошибки из результата осреднения при увеличении шага квантования по уровню. Идея этого способа является обобщением примера, рассмотренного в [2].

При выборе шага квантования по времени Δt следует учитывать [3], что для случайных стационарных процессов существует оптимальная величина $N \neq \infty$, обеспечивающая минимум дисперсии оценки (1) при выполнении условий:

$$\int_0^T K_X(\tau)\left(1 - \frac{2\pi}{T}\right)d\,\tau > 0; \tag{6}$$

величины $\dfrac{dK_X(\tau)}{d\,\tau}$ и $\dfrac{d^2Kx(\tau)}{d\,\tau^2}$ ограниченны.

Во второй части работы определяется величина Δt, близкая к оптимальной, в случае автокорреляционной функции $K_{X*}(\tau)=D(X^*)e^{-\mu(\tau)}$ Приводятся рекомендации по выбору Δt для получения заданной дисперсии $D(\widetilde{X^*})$.

СПОСОБ ИСКЛЮЧЕНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСРЕДНЕНИЯ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ШАГА КВАНТОВАНИЯ ПО УРОВНЮ

Пусть на вход квантующего устройства (рис. 2) поступает сигнал X с математическим ожиданием $\overline{X}$ и характеристической функцией $F_X\ (u)\ e^{j\,x\,u}$. Добавим к сигналу X центрированный шум Y, не зависящий от значений X и равномерно распределенный в пределах шага

Рис. 2. Квантование по уровню с добавлением к сигналу X шума Y.

квантования h с характеристической функцией $F_Y\,(u) = \dfrac{\sin\dfrac{h}{2}\,u}{\dfrac{h}{2}\,u}$.

Характеристическая функция суммы $Z=X+Y$ имеет вид $F_Z\,(u) = F_X\ (u)\ \dfrac{\sin\dfrac{h}{2}\,u}{\dfrac{h}{2}\,u}\ e^{j\,\bar{x}\,u}$.

Найдем математическое ожидание сигнала Z^* на выходе квантователя (см. рис. 2). Характеристическую функцию сигнала Z^* запишем в виде [1]

$$F_{Z*}\,(u) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_Z\left(u + l\ \frac{2\pi}{h}\right)\ \frac{\sin\dfrac{h}{2}\left(u + l\ \dfrac{2\pi}{h}\right)}{\dfrac{h}{2}\left(u + l\ \dfrac{2\pi}{h}\right)}. \tag{7}$$

Отсюда

$$M\,(Z^*) = \frac{1}{j}\,F'_{Z*}\,(0) = \overline{X}\,F_X\,(0) + \frac{1}{j}\,F'_X\,(0).$$

Учитывая, что $\dfrac{1}{j}\,F'_X(0)=0$ для центрированного случайного процесса и $F_X\ (0)=1$, получим

$$M(Z^*)=\overline{X}. \tag{8}$$

Используя выражение (7), найдем дисперсию $D(Z^*)$ сигнала на выходе квантователя (см. рис. 2)

$$D(Z^*) = -F''_{Z^*}(0) - (\overline{X})^2 = \frac{h^2}{6} F_X(0) - j\overline{X}\,[j\overline{X} F_X(0) + F'_X(0)] -$$

$$- F''_X(0) - 2 \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \left[\dfrac{\sin \frac{h}{2}\left(u + l\,\frac{2\pi}{h}\right)}{\frac{h}{2}\left(u + l\,\frac{2\pi}{h}\right)} \right]}{\partial u} \Bigg|_{u=0} \right\}^2 \times$$

$$\times e^{j\overline{X}\, l\, \frac{2\pi}{h}} F_X\left(l\,\frac{2\pi}{h}\right) - (\overline{X})^2.$$

Учитывая, что $F_X(0) = 1$, $F'_X(0) = 0$, $F''_X(0) = -D(X)$,

$$\left\{ \frac{\partial \left[\dfrac{\sin \frac{h}{2}\left(u + l\,\frac{2\pi}{h}\right)}{\frac{h}{2}\left(u + l\,\frac{2\pi}{h}\right)} \right]}{\partial u} \Bigg|_{u=0} \right\}^2 = \frac{(-1)^{2l}}{l^2\, \frac{4\pi^2}{h^2}},$$

окончательно получим

$$D(Z^*) = \frac{h^2}{6} + D(X) - \frac{h^2}{2\pi^2} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{l^2}\, e^{j\overline{X}\, l\, \frac{2\pi}{h}} F_X\left(l\,\frac{2\pi}{h}\right). \qquad (9)$$

Для определения автокорреляционной функции $K_{Z^*}(\tau)$ квантованного сигнала Z^* воспользуемся известным выражением [1] двумерной характеристической функции

$$F_{Z^*}(u_1, u_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_Z\left(u_1 + l\,\frac{2\pi}{h},\quad u_2 + k\,\frac{2\pi}{h}\right) \times$$

$$\times \frac{\sin \frac{h}{2}\left(u_1 + l\,\frac{2\pi}{h}\right)}{\frac{h}{2}\left(u_1 + l\,\frac{2\pi}{h}\right)} \; \frac{\sin \frac{h}{2}\left(u_2 + k\,\frac{2\pi}{h}\right)}{\frac{h}{2}\left(u_2 + k\,\frac{2\pi}{h}\right)}, \qquad (10)$$

где

$$F_Z(u_1, u_2) = e^{j\overline{X}(u_1 + u_2)} F_X(u_1, u_2)\, F_Y(u_1, u_2). \qquad (11)$$

Положим, что шум Y, равномерно распределенный в пределах шага h, является случайным процессом с независимыми значениями. Тогда

$$F_Y(u_1, u_2) = \frac{\sin \frac{h}{2} u_1}{\frac{h}{2} u_1} \; \frac{\sin \frac{h}{2} u_2}{\frac{h}{2} u_2}. \qquad (12)$$

Учитывая (10)—(12) и известные свойства характеристических функций, можно получить

$$K_{Z*}(\tau) = - \frac{\partial^2 F_{Z*}(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}\Bigg|_{\substack{u_1 = 0 \\ u_2 = 0}} - (\overline{X})^2 = K_X(\tau). \tag{13}$$

Для квантователя (см. рис. 2) выражения (8), (9) и (13) позволяют сделать следующие выводы.

1. Добавление к сигналу X на входе квантователя центрированного шума Y, равномерно распределенного в пределах шага квантования, исключает систематическую ошибку из результата осреднения независимо от величины h. При этом дисперсия квантованного сигнала увеличивается и может быть рассчитана в общем случае по формуле (9).

2. Если шум Y является случайным процессом с независимыми значениями, то для любого шага h выполняется соотношение

$$K_{Z*}(\tau) = K_X(\tau).$$

Примером практического осуществления указанного способа квантования может служить кодирование счетно-импульсным методом временных интервалов, следующих с частотой Ω, некратной частоте заполняющих импульсов ω [4]:

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{m}{n},$$

где m и n — некратные числа.
Осреднение должно производиться по n значениям временных интервалов. В этом случае начальный уровень квантования равномерно смещается в пределах шага h, что эквивалентно добавлению к входному сигналу шума Y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ШАГА КВАНТОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ СЛУЧАЯ $K_{X*}(\tau) = D(X^*)\, e^{-\mu|\tau|}$

Учитывая, что автокорреляционная функция $K_{X*}(\tau) = D(X^*)e^{-\mu|\tau|}$ удовлетворяет условиям (6), найдем величину Δt, близкую к оптимальной. Запишем выражение (4) в виде

$$D(\overline{X^*}) = \frac{D(X^*)}{N}\left[1 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\left(1 - \frac{i}{N}\right)e^{-\mu i \Delta t}\right]. \tag{14}$$

Используя соотношения

$$\sum_{i=1}^{N-1} e^{-\mu i \Delta} = \frac{e^{-\mu\Delta t}\,(1 - e^{-\mu\Delta t (N-1)})}{1 - e^{-\mu\Delta t}}; \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} i e^{-\mu i \Delta t} = \frac{(1-N)\, e^{-\mu\Delta t N}}{1 - e^{-\mu\Delta t}} + \frac{e^{-\mu\Delta t}\,(1 - e^{-\mu\Delta t (N-1)})}{(1 - e^{-\mu\Delta t})^2};$$

$$N = \frac{T + \Delta t}{\Delta t},$$

из (14) получим

$$D(\tilde{X}^*) = D(X^*)\left[\frac{1+e^{-\mu\Delta t}}{\left(1+\frac{T}{\Delta t}\right)(1-e^{-\mu\Delta t})} - \frac{2e^{-\mu\Delta t}(1-e^{-\mu T})}{\left(1+\frac{T}{\Delta t}\right)^2(1-e^{-\mu\Delta t})^2}\right]. \quad (16)$$

При $\mu T>4$ величиной $e^{-\mu T}$ можно пренебречь по сравнению с 1. Введем обозначения: $\overline{\Delta t}=\mu\Delta t$; $\overline{T}=\mu T$.
Тогда для $\mu T>4$ имеем

$$D(\tilde{X}^*) = D(X^*)\left[\frac{(1-e^{-2\overline{\Delta t}})\left(1+\frac{\overline{T}}{\overline{\Delta t}}\right)-2e^{-\overline{\Delta t}}}{\left(1+\frac{\overline{T}}{\overline{\Delta t}}\right)^2(1-e^{-\overline{\Delta t}})^2}\right]. \quad (17)$$

Выражение для минимальной дисперсии имеет вид [3]

$$[D(\tilde{X}^*)]_{\min} = \frac{2D(X^*)}{2+\overline{T}}. \quad (18)$$

Оценим степень приближения величины $D(\tilde{X}^*)$ к $[D(\tilde{X}^*)]_{\min}$ отношением

$$\frac{D(\tilde{X}^*)-[D(\tilde{X}^*)]_{\min}}{[D(\tilde{X}^*)]_{\min}}. \quad (19)$$

Используя (17) и (18), для некоторых значений $\overline{\Delta t}$ вычислим такие $l_{\max}$ и $l_{\min}$, что

$$l_{\min} < \frac{D(\tilde{X}^*)-[D(\tilde{X}^*)]_{\min}}{[D(\tilde{X}^*)]_{\min}} < l_{\max} \text{ при } 5<\overline{T}<\infty.$$

Результаты расчета сведены в таблицу.

$\overline{\Delta t}$	1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
$l_{\min}$, %	8	9	11	13	16	17	20	24	27	30	35	38
$l_{\max}$, %	9	11	13	16	20	26	31,5	37	44	50,5	58	65

Все значения $\overline{\Delta t}$ из таблицы больше $\overline{\Delta t}_{\text{опт}}$, так как из (17)

$$\frac{d[D(\tilde{X}^*)]}{d(\Delta t)} > 0 \text{ при } \overline{T}>5 \text{ и } \overline{\Delta t}\geqslant 1.$$

Таблица показывает, что достаточно близким к оптимальной величине шага квантования по времени для любого значения $\overline{T}>5$ является

$\overline{\Delta t}=1$. Используя выражения (14) и (15), нетрудно убедиться, что при $\overline{\Delta t}>3$ (независимо от времени осреднения) с точностью выше 10% справедливо соотношение

$$D(\widetilde{X^*}) = \frac{D(X^*)}{N}. \tag{20}$$

Пользуясь данными таблицы и выражением (20), можно выбрать шаг квантования по времени, вычислив предварительно отношение (19) по известным $D(X^*)$, $D(\widetilde{X}^*)$ и $\overline{T}$. Пусть, например, отношение (19) оказалось равным 32%. Тогда при $1 \leqslant \overline{\Delta t} \leqslant 2$ будет обеспечено 32% отношение (19) для любого $\overline{T}$. Выбирая $2<\overline{\Delta t}<2{,}6$, следует проверить величину отношения (19) по формулам (17) и (18) для заданного времени осреднения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Косякин. Статистическая теория квантования по уровню.— Автоматика и телемеханика, 1960, № 6.
2. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М., Гостехиздат, 1955.
3. С. Я. Виленкин. Об оценке среднего в стационарных процессах.— Теория вероятностей и ее применение, 1959, т. IV, вып. 4.
4. L. B. Harris. Random Time — Modulation of the main bang for Increased Accuracy in Digital range Measurement.— IRE Trans., 1956, ANE-3, № 2.

Поступила в редакцию
19 сентября 1966 г.