

В. П. ПЕРОВ

(Новосибирск)

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ
 ПО ИНФОРМАЦИОННОМУ КРИТЕРИЮ
 ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ СИГНАЛОВ**

В прямой постановке задача об оптимальном распределении энергии формулируется так [1]: требуется найти функцию распределения (ρ_i) , обращающую в минимум суммарные потери

$$L_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N L(E_i, \alpha_{ji}) \quad (1)$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^N E_i = E_{\Sigma} = \text{const}, \quad (2)$$

причем

$$E_i \geq 0, \quad (3)$$

где L_{Σ} — суммарные потери при обследовании заданной области пространства, условно разбитой на N элементарных участков;

$$E_i = E(\rho_i);$$

ρ_i — радиус-вектор, определяющий положение i -го элементарного участка;

$\alpha_{ji} = \alpha_j(\rho_i)$ — параметры, характеризующие i -й элементарный участок;

$L(E_i, \alpha_{ji}) = L_i$ — потери, имеющие место при обследовании i -го элементарного участка.

Решение находится из уравнений:

$$\frac{\partial L_i}{\partial E_i} = \lambda \quad (4)$$

или

$$E_i = 0, \quad (5)$$

где λ — множитель Лагранжа, определяемый из условия (2).

Решение может либо представлять функцию $E_i = E(\rho_i)$, удовлетворяющую уравнению (4), если при всех значениях ρ_i внутри обследуемой области эта функция неотрицательна, либо в противном случае состоять из отрезков функций, удовлетворяющих уравнению (4) и пограничной функции (5), причем для последней, если она дает минимум сумме (2), при монотонно убывающей L_i должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial L_i}{\partial E_i} + \lambda \geq 0. \quad (5a)$$

Функцию $E(\rho_i)$, удовлетворяющую перечисленным условиям, сравнительно просто можно найти графическим методом [1].

Дальнейшая конкретизация задачи определяется выбором функции потерь $L(E_i, \alpha_{ij})$. Если при обнаружении сигналов основное требование заключается в том, чтобы получать как можно большее количество информации о наличии (отсутствии) сигналов в различных участках обследуемой области, то в качестве функции потерь естественно принять среднюю энтропию апостериорной вероятности наличия сигналов (среднюю апостериорную энтропию). Последнее вытекает из того, что изменение энтропии является количественной мерой получаемой информации.

Таким образом, с информационной точки зрения потери следует характеризовать средней апостериорной энтропией, т. е. полагать, что

$$L_i = \bar{H}_i = p_s \int_X H(x) W_s(x) dx + p_0 \int_X H(x) W_0(x) dx, \quad (6)$$

где $\bar{H}_i = \bar{H}(\rho_i)$ — среднее (по всем возможным исходам опыта) значение энтропии апостериорной вероятности наличия сигнала в направлении ρ_i ; $p_s = p_s(\rho_i)$, $p_0 = 1 - p_s$ — априорные вероятности наличия и соответственно отсутствия сигнала в направлении ρ_i ; X — область возможных исходов опыта; $H(x)$ — частное значение апостериорной энтропии при конкретном исходе опыта x ; $W_s(x)$, $W_0(x)$ — условные плотности распределения вероятностей различных результатов (исходов) опыта при наличии и отсутствии сигнала соответственно; $x = x(\rho_i)$ — результат опыта.

Энтропия $H(x) = H(\rho_i, x)$ выражается через апостериорную вероятность наличия сигнала следующим образом:

$$H(x) = -P_s(x) \ln P_s(x) - P_0(x) \ln P_0(x), \quad (7)$$

где $P_s(x) = P_s(\rho_i, x)$, $P_0(x) = 1 - P_s(x)$ — апостериорные вероятности наличия и соответственно отсутствия сигнала в направлении ρ_i при конкретном исходе опыта x .

Для этих вероятностей по формуле Байеса имеем:

$$P_s(x) = \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(x) + \frac{p_0}{p_s}};$$

$$P_0(x) = \frac{\frac{p_0}{p_s}}{\Lambda(x) + \frac{p_0}{p_s}}, \quad (8)$$

причем

$$\Lambda(x) = \frac{W_s(x)}{W_0(x)}. \quad (9)$$

Следовательно, вид выражения (6) для функции потерь зависит от $W_s(x)$ и $W_0(x)$, т. е. от функций плотности распределения вероятностей различных исходов опыта. Последние, в свою очередь, зависят от тех или иных особенностей проведения опыта, по результатам которого находится апостериорная вероятность наличия сигнала, от характера помех и типа сигнала.

Наиболее исчерпывающий опыт заключается в измерении точных значений выборок. Именно этот случай будет рассматриваться в дальнейшем.

Будем предполагать, что помехи представляют собой «белый» гауссовый шум.

С точки зрения типа сигналов рассмотрим следующие случаи: 1) полностью известный сигнал; 2) сигнал с неизвестной амплитудой, распределенной по нормальному закону, 3) пачка квадратично суммируемых сигналов с неизвестными фазами; 4) сигнал с неизвестной фазой; 5) пачка квадратично суммируемых некоррелированных сигналов с неизвестными фазами и амплитудами; 6) сигнал с неизвестной фазой и амплитудой.

Заметим, что при полностью известном сигнале и сигнале с неизвестной амплитудой законы распределения амплитуд шума и аддитивной смеси сигнала с шумом нормальны. Кроме того, для ряда остальных перечисленных случаев получение точного уравнения оптимума функции распределения энергии затруднительно, и приходится довольствоваться нахождением приближенных условий оптимума на основе гауссовой аппроксимации законов распределения амплитуд шума и смеси сигналов с шумом. Поэтому предварительно найдем, какой вид принимает уравнение (4), если законы распределения вероятностей шума и смеси сигналов с шумом нормальны.

УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ В СЛУЧАЕ НОРМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ШУМА И СМЕСИ СИГНАЛА С ШУМОМ

При нормальном распределении вероятностей амплитуд шума и аддитивной смеси сигнала с шумом имеем:

$$W_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(x-a_0)^2}{2\sigma_0^2}}; \quad W_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} e^{-\frac{(x-a_s)^2}{2\sigma_s^2}} \quad (10)$$

где σ_0^2, σ_s^2 — дисперсии амплитуд шума и смеси сигнала с шумом;
 a_0, a_s — средние значения амплитуд шума и смеси сигнала с шумом.
На основании (6) и (10) получаем

$$\bar{H}(x) = p_s \bar{H}_s + p_0 \bar{H}_0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{H}_s &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} \int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-\frac{(x-a_s)^2}{2\sigma_s^2}} dx; \\ \bar{H}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-\frac{(x-a_0)^2}{2\sigma_0^2}} dx.\end{aligned}\quad (12)$$

Вводя новые переменные

$$y = \frac{x - a_s}{\sigma_s}; \quad z = \frac{x - a_0}{\sigma_0}, \quad (13)$$

находим:

$$\bar{H}_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(y) e^{-y^2/2} dy; \quad \bar{H}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(z) e^{-z^2/2} dz; \quad (14)$$

где $H(y)$, $H(z)$ получаются из $H(x)$ при подстановке $x = \sigma_s y + a_s$ и $x = \sigma_0 z + a_0$ соответственно.

Условие (4) с учетом (6) и (11) можно записать как

$$p_s \frac{\partial \bar{H}_s}{\partial E} + p_0 \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial E} = \lambda$$

или, согласно (14),

$$p_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H(y)}{\partial E} e^{-y^2/2} dy + p_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H(z)}{\partial E} e^{-z^2/2} dz = \lambda, \quad (15)$$

где $\frac{\partial H(y)}{\partial E}$, $\frac{\partial H(z)}{\partial E}$ получаются из $\frac{\partial H(x)}{\partial E}$ путем подстановок

$x = \sigma_s y + a_s$ и $x = \sigma_0 z + a_0$ соответственно.

Но на основании (7) и (8) определяем

$$\frac{\partial H(x)}{\partial E} = \frac{\frac{p_0}{p_s}}{\left[\Lambda(x) + \frac{p_0}{p_s}\right]^2} \left[\ln \Lambda(x) - \ln \frac{p_0}{p_s} \right] \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial E}, \quad (16)$$

где, согласно (9) и (10),

$$\Lambda(x) = \frac{\sigma_0}{\sigma_s} e^{-\frac{(x-a_s)^2}{2\sigma_s^2} - \frac{(x-a_0)^2}{2\sigma_0^2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(y)}{\partial E} &= \frac{\frac{p_0}{p_s}}{\left[\Lambda(y) + \frac{p_0}{p_s}\right]^2} \left[\ln \Lambda(y) - \ln \frac{p_0}{p_s} \right] \frac{\partial \Lambda(y)}{\partial E}; \\ \frac{\partial H(z)}{\partial E} &= \frac{\frac{p_0}{p_s}}{\left[\Lambda(z) + \frac{p_0}{p_s}\right]^2} \left[\ln \Lambda(z) - \ln \frac{p_0}{p} \right] \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial E},\end{aligned}\quad (17)$$

где

$$\Lambda(y) = \frac{\sigma_0}{\sigma_s} e^{-\frac{y^2}{2} + \frac{\left(y + \frac{a_s - a_0}{\sigma_s}\right)^2}{2\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_s}\right)^2}}; \quad \Lambda(z) = \frac{\sigma_0}{\sigma_s} e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{\left(z - \frac{a_s - a_0}{\sigma_0}\right)^2}{2\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_0}\right)^2}} \quad (18)$$

Таким образом, при нормальном распределении вероятностей амплитуд шума и смеси сигнала с шумом условие для оптимальной функции распределения энергии можно записать в виде уравнения (15), в котором производные $\frac{\partial H(y)}{\partial E}$ и $\frac{\partial H(z)}{\partial E}$ определяются выражениями (17), (18).

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ, РАЗЛИЧАЮЩИХСЯ ТИПОМ СИГНАЛА

Сигнал полностью известен. В этом случае значения амплитуд шума и смеси сигнала с шумом подчинены нормальным законам распределения вероятностей, причем*

$$a_s = \sqrt{\mu}; \quad a_0 = 0; \quad \sigma_s^2 = \sigma_0^2 = 1, \quad (19)$$

где

$$\mu = \frac{E}{S_n}; \quad (20)$$

S_n — спектральная интенсивность шума [1].
На основании (19), (20) и (18) получаем:

$$\Lambda(y) = e^{y\sqrt{\mu} + \frac{\mu}{2}}; \quad \Lambda(z) = e^{z\sqrt{\mu} - \frac{\mu}{2}};$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial E} = \frac{\partial \Lambda(y)}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial E} = \frac{1}{S_n^2} \left(\frac{y}{\sqrt{\mu}} + 1 \right) e^{y\sqrt{\mu} + \frac{\mu}{2}},$$

$$\frac{\partial \Lambda(z)}{\partial E} = \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial E} = \frac{1}{S_n^2} \left(\frac{z}{\sqrt{\mu}} - 1 \right) e^{z\sqrt{\mu} - \frac{\mu}{2}},$$

откуда с учетом (15) и (17) приходим к следующему уравнению для оптимальной функции распределения энергии:

$$p_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\ln \frac{p_s}{p_0} + y\sqrt{\mu} + \frac{\mu}{2} \right) \left(\frac{y}{\sqrt{\mu}} + 1 \right)}{S_n \left(e^{y\sqrt{\mu} + \frac{\mu}{2}} + \frac{p_0}{p_s} \right)^2} e^{y\sqrt{\mu} + \frac{\mu}{2} - y^2/2} dy +$$

$$+ \frac{p_0^2}{p_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\ln \frac{p_s}{p_0} + z\sqrt{\mu} - \frac{\mu}{2} \right) \left(\frac{z}{\sqrt{\mu}} - 1 \right)}{S_n \left(e^{z\sqrt{\mu} - \frac{\mu}{2}} + \frac{p_0}{p_s} \right)^2} e^{z\sqrt{\mu} - \frac{\mu}{2} - z^2/2} dz = \lambda. \quad (21)$$

* Здесь и в дальнейшем записываются значения параметров $a_s, a_0, \sigma_s, \sigma_0$, нормированные по σ_0 или величине, пропорциональной σ_0 .

Пример графического решения уравнения (20) с учетом дополнительного условия (2) будет дан ниже.

Сигнал с неизвестной амплитудой, распределенной нормально. В этом случае значения амплитуд шума и смеси сигнала с шумом также подчинены нормальным законам распределения вероятностей, причем [2, 3]

$$\Lambda(y) = (1 + \mu)^{-1/2} e^{-y^2/2}; \quad \Lambda(z) = (1 + \mu)^{-1/2} e^{-z^2/(2(1+\mu))};$$

$$\frac{\partial \Lambda(y)}{\partial E} = \frac{(1 + \mu)^{-3/2}}{2S_n} e^{-y^2/2} [y^2(1 + \mu) - 1];$$

$$\frac{\partial \Lambda(z)}{\partial E} = \frac{(1 + \mu)^{-3/2}}{2S_n} e^{-z^2/(2(1+\mu))} [z^2(1 + \mu)^{-1} - 1].$$

Отсюда, учитывая (15), приходим к следующему уравнению для оптимальной функции распределения энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{p_0 (1 + \mu)^{-3/2}}{S_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ \ln \left[\frac{p_s}{p_0} (1 + \mu)^{-1/2} \right] + \frac{\mu y^2}{2} \right\} [y^2(1 + \mu) - 1]}{\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \mu}} e^{\frac{\mu y^2}{2}} + \frac{p_0}{p_s} \right]^2} \times \\ & \times e^{\frac{\mu y^2}{2} - \frac{y^2}{2}} dy + \frac{p_0 (1 + \mu)^{-3/2}}{p_s S_n} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ \ln \left[\frac{p_s}{p_0} (1 + \mu)^{-1/2} \right] + \frac{\mu z^2}{2(1 + \mu)} \right\} [z^2(1 + \mu)^{-1} - 1]}{\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \mu}} e^{\frac{\mu z^2}{2(1 + \mu)}} + \frac{p_0}{p_s} \right]^2} \times \\ & \times e^{\frac{\mu z^2}{2(1 + \mu)} - \frac{z^2}{2}} dz = \lambda. \end{aligned} \quad (22)$$

Пачка квадратично суммируемых сигналов с неизвестными фазами. Рассмотрим этот случай приближенно на основе гауссовой аппроксимации законов распределения амплитуд шума и смеси сигнала с шумом, принимая во внимание, что для пачки сигналов с неизвестными фазами и амплитудами [2, 3]

$$a_s = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) m; \quad a_0 = m; \quad \sigma_s = \sqrt{m(1 + \mu)}; \quad \sigma_0 = \sqrt{m}, \quad (23)$$

где

$$\mu = \frac{E_1}{S_n}; \quad (24)$$

E_1 — энергия одного сигнала; m — число сигналов в пачке.

Здесь и в дальнейшем предполагается, что все сигналы пачки имеют одинаковую энергию и, следовательно, полная энергия пачки определяется равенством

$$E = E_1 m. \quad (25)$$

Отсюда следует, что полную энергию пачки сигналов можно изменять путем изменения E_1 при постоянном m или, наоборот, изменением m при $E_1 = \text{const}$. В соответствии с этим имеют место два варианта условий для оптимального распределения энергии, каждый из которых находится из (15), (17), (18), но различие заключается в том, что в одном случае

$$\frac{\partial \Lambda(y)}{\partial E} = \frac{1}{m S_n} \frac{\partial \Lambda(y)}{\partial \mu}; \quad \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial E} = \frac{1}{m S_n} \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial \mu}, \quad (26)$$

а в другом

$$\frac{\partial \Lambda(y)}{\partial E} = \frac{1}{\mu S_n} \frac{\partial \Lambda(y)}{\partial m}; \quad \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial E} = \frac{1}{\mu S_n} \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial m}. \quad (27)$$

Рассмотрим оба случая.

А. При изменении энергии пачки путем изменения энергии каждого сигнала на основании (18), (20) и (23) имеем:

$$\Lambda(y) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} e^k; \quad \Lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} e^h, \quad (28)$$

где

$$k = \frac{\mu (4y^2 + m\mu + 4y\sqrt{(1+\mu)m})}{8}; \quad (29)$$

$$h = \frac{\mu (4z^2 + 4z\sqrt{\mu - m\mu})}{8(1+\mu)}.$$

Соответственно с учетом (26)

$$\frac{\partial \Lambda(y)}{\partial E} = \frac{e^k [(1+\mu)(2y^2 + \mu m) + y(2+3\mu)\sqrt{m(1+\mu)} - 2]}{4m S_n (1+\mu)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial \Lambda(z)}{\partial E} = \frac{eh [4z^2 + 4z\sqrt{\mu - m\mu} - 2m\mu - m\mu^2 - 4\mu - 4]}{8m S_n (1+\mu)^{5/2}}. \quad (30)$$

Отсюда, учитывая (15) и (17), приходим к следующему уравнению для оптимального распределения E_1 при $m = \text{const}$:

$$\frac{p_0}{S_n (1+\mu)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^k \left(k - \ln \frac{p_0}{p_s} \sqrt{1+\mu} \right) [(1+\mu)(2y^2 + m\mu) + \left[\frac{1}{\sqrt{1+\mu}} e^k + \right. \right. \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \frac{+y(2+3\mu)\sqrt{m(1+\mu)}-2]}{\left[\frac{p_0}{p_s}\right]^2 e^{y^2/2}} dy + \frac{p_0^2}{p_s 2S_n (1+\mu)^{5/2}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^h \left(h - \ln \frac{p_0}{p_s} \sqrt{1+\mu} \right) [4z^2 + 4z\sqrt{m} - 2m\mu - m\mu^2 - 4\mu - 4]}{\left[\frac{1}{\sqrt{1+\mu}} e^h + \frac{p_0}{p_s} \right]^2 e^{z^2/2}} dz = \lambda. \end{aligned} \quad (31)$$

Б. При изменении энергии пачки путем изменения числа сигналов m при $E_1 = \text{const}$ на основании (28) и (27) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(y)}{\partial E} &= \frac{\mu \sqrt{m} + 2y \sqrt{1+\mu}}{8\mu \sqrt{m(1+\mu)}} e^h; \\ \frac{\partial \Lambda(z)}{\partial E} &= \frac{(2z - \mu \sqrt{m})}{8\mu \sqrt{m(1+\mu)^3}} e^h. \end{aligned} \quad (32)$$

Учитывая (31), (28), (17) и (15), приходим к следующему уравнению для оптимального распределения числа сигналов m при $E_1 = \text{const}$:

$$\begin{aligned} & \frac{p_0}{\sqrt{m}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^h \left(k - \ln \frac{p_0}{p_s} \sqrt{1+\mu} \right) (\mu \sqrt{m} + 2y \sqrt{1+\mu}) e^{-y^2/2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu}} e^h + \frac{p_0}{p_s} \right)^2} dy + \\ & + \frac{p_0^2}{p_s \sqrt{1+\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^h \left(h - \ln \frac{p_0}{p_s} \sqrt{1+\mu} \right) (2z - \mu \sqrt{m}) e^{-z^2/2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu}} e^h + \frac{p_0}{p_s} \right)^2} dz = \lambda. \end{aligned} \quad (33)$$

Сигнал с неизвестной фазой. Уравнение для оптимальной функции распределения энергии в этом случае получается как частный случай уравнения (30) при $m=1$.

Пачка квадратично суммируемых некоррелированных сигналов с неизвестными фазами и амплитудами. В этом случае [1]

$$\begin{aligned} W_0(x) &= \frac{1}{2^{m-1} (m-1)!} \left(\frac{x}{\sqrt{\mu}} \right)^{2m-1} e^{-\frac{x^2}{2\mu}}; \\ W_s(x) &= \frac{1}{2^{m-1} (m-1)!} \left(\frac{x}{\sqrt{\mu(1+\mu)}} \right)^{2m-1} e^{-\frac{x^2}{2\mu(1+\mu)}}. \end{aligned} \quad (34)$$

На основании (6) и (10) имеем

$$\overline{H(x)} = p_s \overline{H_s} + p_0 \overline{H_0}, \quad (35)$$

где

$$\bar{H}_s = \int_0^{\infty} H(x) \frac{1}{2^{m-1} (m-1)!} \left(\frac{x}{\sqrt{\mu(1+\mu)}} \right)^{2m-1} e^{-\frac{x^2}{2\mu(1+\mu)}} dx; \quad (36)$$

$$\bar{H}_0 = \int_0^{\infty} H(x) \frac{1}{2^{m-1} (m-1)!} \left(\frac{x}{\sqrt{\mu}} \right)^{2m-1} e^{-\frac{x^2}{2\mu}} dx.$$

Вводя новые переменные

$$y = \frac{x}{\sqrt{\mu(1+\mu)}}, \quad z = \frac{x}{\sqrt{\mu}}, \quad (37)$$

записываем:

$$\bar{H}_s = \int_0^{\infty} H(y) \frac{1}{2^{m-1} (m-1)!} y^{2m-1} e^{-y^2/2} dy;$$

$$\bar{H}_0 = \int_0^{\infty} H(z) \frac{1}{2^{m-1} (m-1)!} z^{2m-1} e^{-z^2/2} dz, \quad (38)$$

где $H(y)$ и $H(z)$ получаются из $H(x)$ при подстановке соответственно

$$x = y \sqrt{\mu(1+\mu)}; \quad x = z \sqrt{\mu}. \quad (39)$$

А. Если энергия пачки изменяется путем изменения энергии каждого сигнала ($m = \text{const}$), то условие оптимума (4) с учетом (6), (26), (35) и (38) запишем так:

$$p_s \int_0^{\infty} y^{2m-1} e^{-y^2/2} \frac{\partial H(y)}{\partial E} dy + p_0 \int_0^{\infty} z^{2m-1} e^{-z^2/2} \frac{\partial H(z)}{\partial E} dz = \lambda, \quad (40)$$

где производные $\frac{\partial H(y)}{\partial E}$, $\frac{\partial H(z)}{\partial E}$ определяются равенствами (17), в которых, согласно (26), (34), (37) и (9),

$$\Lambda(y) = \frac{1}{(1+\mu)^m} e^{-\frac{\mu y^2}{2}}; \quad \Lambda(z) = \frac{1}{(1+\mu)^m} e^{-\frac{\mu z^2}{2(1+\mu)}}; \quad (41)$$

$$\frac{\partial \Lambda(y)}{\partial E} = \frac{1}{m S_n (1+\mu)^m} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{m}{1+\mu} \right] e^{-\frac{\mu y^2}{2}};$$

$$\frac{\partial \Lambda(z)}{\partial E} = \frac{1}{m S_n (1+\mu)^{m+1}} \left[\frac{z^2}{2(1+\mu)} - m \right] e^{-\frac{\mu z^2}{2(1+\mu)}}. \quad (42)$$

На основании (40), (41) и (42) получаем следующее условие для оптимального распределения μ при $m = \text{const}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{p_0}{S_n (1 + \mu)^m} \int_0^\infty \frac{\left[\frac{\mu y^2}{2} - \ln \frac{p_0}{p_s} (1 + \mu)^m \right]}{\left[(1 + \mu)^{-m} e^{\frac{\mu y^2}{2}} + \frac{p_0}{p_s} \right]^2} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{m}{1 + \mu} \right) e^{\frac{\mu y^2}{2}} \times \\
& \times y^{2m-1} e^{-y^2/2} dy + \frac{p_0^2}{p_s S_n (1 + \mu)^{m+1}} \int_0^\infty \frac{\left[\frac{\mu z^2}{2(1 + \mu)} - \ln \frac{p_0}{p_s} (1 + \mu)^m \right]}{\left[(1 + \mu)^{-m} e^{\frac{\mu z^2}{2(1 + \mu)}} + \frac{p_0}{p_s} \right]^2} \times \\
& \times \left[\frac{z^2}{2(1 + \mu)} - m \right] e^{\frac{\mu z^2}{2(1 + \mu)}} z^{2m-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \lambda. \quad (43)
\end{aligned}$$

Б. При изменении энергии пачки путем изменения числа сигналов вывод точного уравнения оптимума затрудняется тем, что $\bar{H}(x)$ зависит от m сложным образом, поэтому ограничимся нахождением приближенного условия оптимума.

Учитывая, что в рассматриваемом случае

$$a_s = m(1 + \mu); \quad a_0 = m; \quad \sigma_s^2 = m(1 + \mu)^2; \quad \sigma_0^2 = m,$$

на основании (10), (13), (17), (18) и (27) приходим к следующему условию оптимального распределения m при $E_1 = \text{const}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{p_0}{\mu(1 + \mu)\sqrt{m}} \int_0^\infty \frac{\left[k - \ln \frac{p_0}{p_s} (1 + \mu) \right] e^k \left[\mu \sqrt{m} + y(1 + \mu) \right]}{\left(\frac{1}{1 + \mu} e^k + \frac{p_0}{p_s} \right)^2 e^{y^2/2}} dy + \\
& + \frac{p_0^2}{p_s \mu (1 + \mu)^3} \int_0^\infty \frac{\left[h - \ln \frac{p_0}{p_s} (1 + \mu) \right] e^h (z - \mu \sqrt{m})}{\left[\frac{1}{1 + \mu} e^h + \frac{p_0}{p_s} \right]^2 e^{z^2/2}} dz, \quad (44)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\mu(\mu y^2 + 2y^2 + m\mu) + 2\mu y(1 + \mu)\sqrt{m}}{2}; \\
h &= \frac{\mu(\mu z^2 + 2z^2 - m\mu) + 2\mu z\sqrt{m}}{2(1 + \mu)^2}.
\end{aligned}$$

Сигнал с неизвестной фазой и амплитудой. Уравнение для оптимальной функции распределения энергии в этом случае получается как частный случай уравнения (43) при $m=1$.

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭНЕРГИИ

Полученные уравнения оптимума вместе с дополнительным условием (2) позволяют решать задачу об оптимальном распределении энергии. Представляет интерес на примерах конкретных решений ис-

Таблица 1

Тип сигнала $\frac{E_{\Sigma}}{S_n}$	1					б					ЗБ				
	P_s					P_s					P_s				
	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
5	0,0	1,5	2,0	1,5	0,0	0,0	2,0	2,5	0,5	0,0	0	1	4	0	0
15	0,9	4,0	5,2	4,0	0,9	2,6	4,0	5,0	3,4	0,0	0	4	9	1	0
25	2,2	6,3	8,0	6,3	2,2	3,3	6,5	7,5	5,7	2,0	0	8	13	4	0
35	3,6	8,5	10,8	8,5	3,6	5,0	8,8	9,8	8,0	3,4	0	11	16	8	0
45	6,0	9,7	13,6	9,7	6,0	6,4	10,7	12,1	9,8	5,0	0	15	19	11	0

следовать характер оптимальных распределений. Результаты конкретных распределений энергии для различных случаев, отличающихся типом сигналов, а также значением E_{Σ} , приведены в табл. 1, где типы сигналов условно обозначены в следующем соответствии: 1 — полностью известный сигнал; б — сигнал с неизвестной фазой и амплитудой; ЗБ — пачка сигналов с неизвестными фазами (регулирование энергии производится изменением m при $\mu=1=\text{const}$).

Энергия распределялась между пятью направлениями, причем

$$p_{s1} = 0,1; \quad p_{s2} = 0,3; \quad p_{s3} = 0,5; \quad p_{s4} = 0,7; \quad p_{s5} = 0,9. \quad (45)$$

где p_{si} — априорная вероятность наличия сигнала в i -м направлении. Предполагалось, что спектральная интенсивность помех S_n одинакова во всех направлениях, т. е. $S_n = \text{const}$.

Решения находились с помощью графиков, приведенных на рис. 1, 2 и 3. Процедура графического решения уравнений оптимума рассматриваемого типа описана в [1] и состоит в следующем. Параллельно оси абсцисс проводится так, чтобы абсциссы точек ее пересечения с кривыми, отвечающими определенным значениям p_s , в сумме равнялись величине, стоящей в правой части условия (2). Именно эти значе-

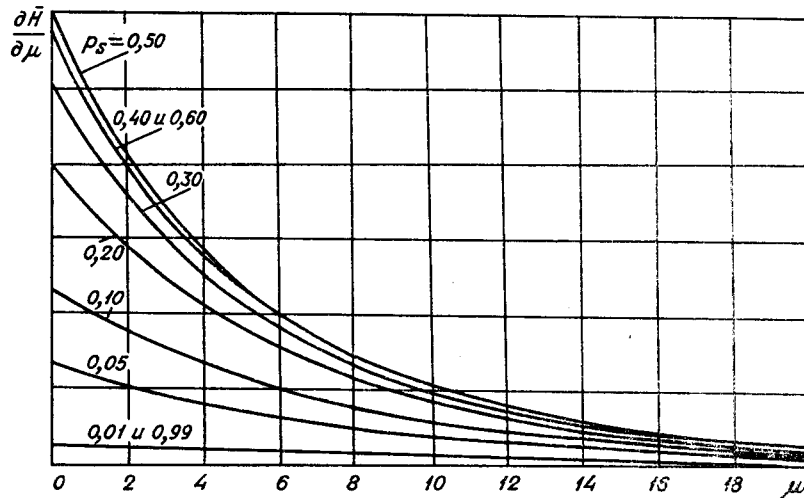


Рис. 1. Зависимость левой части уравнения (43) от μ при различных значениях p_s .

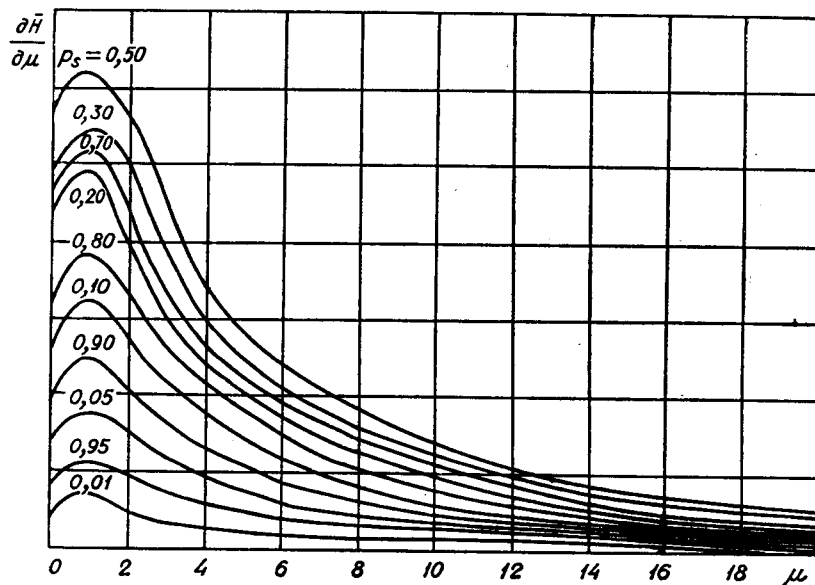


Рис. 2. Зависимость левой части уравнения (43) от μ при различных значениях ρ_s и $m = 1$.

ния абсцисс и являются решениями. При решении следует иметь в виду, что если по оси абсцисс отложено μ , то вместо $E(\rho_i)$ отыскиваются пропорциональные величины $\mu(\rho_i)$, причем условие (2) принимает вид

$$\sum_{i=1}^N \mu(\rho_i) = \frac{E_{\Sigma}}{S_n}.$$

Если по оси абсцисс отложено m , то вместо $E(\rho_i)$ отыскиваются пропорциональные величины $m(\rho_i)$, причем условие (2) принимает вид

$$\sum_{i=1}^N m(\rho_i) = \frac{E_{\Sigma}}{S_n \mu}.$$

Результаты, приведенные в табл. 1, показывают, что при оптимальном распределении наибольшее количество энергии приходится на направления с большей априорной неопределенностью. При увеличении общего расхода энергии E_{Σ} неравномерность оптимальных распределений уменьшается.

Представление о том, какой информационный выигрыш может дать оптимальное распределение энергии по сравнению с равномерным, дает табл. 2. В ней помещены суммарные потери (суммарная по всем направлениям энтропия апостериорной вероятности наличия сигнала) в случае полностью известного сигнала при оптимальном и равномерном распределении энергии ($\bar{H}_{\Sigma \text{ опт}}$ и $\bar{H}_{\Sigma \text{ рав}}$) для разных ситуаций и различных значений общего расхода энергии E_{Σ} . Все ситуации характеризуются тем, что всего имеется N направлений, причем в одном на-

правлении, например в первом, вероятность наличия сигналов равна 0,5, а в остальных $N - 1$ направлениях 0,1, т. е.

$$p_{s1} = 0,5; \quad p_{si} = 0,05 \quad (i = 2, 3, \dots, N). \quad (46)$$

Ситуации различаются лишь общим числом направлений N .

Оптимальные распределения энергии находились по графикам рис. 1, а интегральные потери по графикам рис. 4 с учетом условия (46). Последние построены на основании расчетов по формуле (6) с учетом (7), (8), (9), (10) и (19).

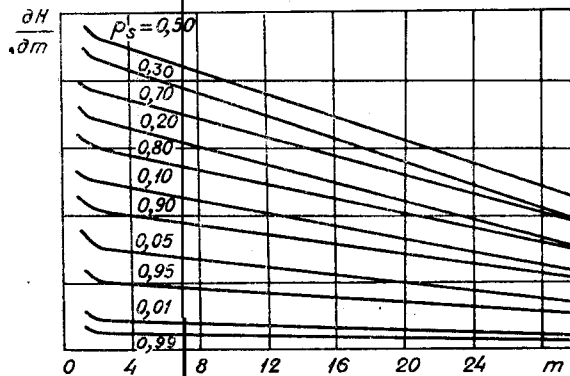


Рис. 3. Зависимость левой части уравнения (33) от m при различных значениях p_s и $\mu = 1$.

табл. 2, для его достижения при равномерном распределении энергии потребовалось бы очень существенное (в ряде случаев многократное) увеличение общего расхода энергии. Более показательным является сравнение суммарных притоков количества информации при оптимальном и равномерном распределении энергии ($I_{\Sigma \text{ опт}}$ и $I_{\Sigma \text{ рав}}$). Суммарный приток количества информации определяется как разность между суммарными априорной и апостериорной энтропиями, т. е.

$$I_{\Sigma \text{ опт}} = H_{\Sigma a} - H_{\Sigma \text{ опт}};$$

$$I_{\Sigma \text{ рав}} = H_{\Sigma a} - H_{\Sigma \text{ рав}},$$

где

$$H_{\Sigma a} = - \sum_{i=1}^N p_{si} \ln p_{si}.$$

Значения $I_{\Sigma \text{ опт}}$ и $I_{\Sigma \text{ рав}}$ для разных ситуаций и разных E_{Σ} даны в табл. 3. Они получены путем пересчета соответствующих значений $H_{\Sigma \text{ опт}}$ и $H_{\Sigma \text{ рав}}$, приведенных в табл. 2. Результаты, данные в табл. 3, иллюстрируют возможность значительного информационного выигрыша за счет оптимального распределения энергии.

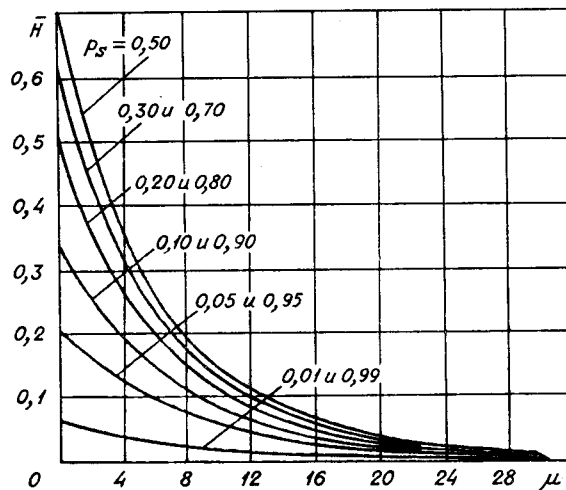


Рис. 4. Средняя энтропии апостериорной вероятности наличия полностью известного сигнала при различных значениях p_s и μ .

Таблица 2

$\frac{E_{\Sigma}}{S_n}$	N							
	2	4	8	16	32	64	123	
2	0,76	1,19	2,07	3,66	6,84	13,20	25,80	$\bar{H}_{\Sigma \text{рав}}$
	0,69	1,08	1,88	3,46	6,64	12,99	25,60	$\bar{H}_{\Sigma \text{опт}}$
4	0,64	1,12	1,93	3,52	6,84	13,20	25,80	$\bar{H}_{\Sigma \text{рав}}$
	0,55	0,94	1,74	3,32	6,50	12,85	25,46	$\bar{H}_{\Sigma \text{опт}}$
8	0,48	0,90	1,81	3,40	6,67	13,20	25,80	$\bar{H}_{\Sigma \text{рав}}$
	0,39	0,78	1,58	3,16	6,34	12,69	25,30	$\bar{H}_{\Sigma \text{опт}}$
16	0,26	0,75	1,56	3,20	6,40	13,10	25,80	$\bar{H}_{\Sigma \text{рав}}$
	0,23	0,60	1,40	2,98	6,16	12,51	25,12	$\bar{H}_{\Sigma \text{опт}}$

Таблица 3

$\frac{E_{\Sigma}}{S_n}$	N							
	2	4	8	16	32	64	128	
2	0,13	0,09	0,01	—	—	—	—	$I_{\Sigma \text{рав}}$
	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	$I_{\Sigma \text{опт}}$
4	0,25	0,16	0,15	0,14	—	—	—	$I_{\Sigma \text{рав}}$
	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34	$I_{\Sigma \text{опт}}$
8	0,41	0,38	0,27	0,26	0,17	—	—	$I_{\Sigma \text{рав}}$
	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	$I_{\Sigma \text{опт}}$
16	0,53	0,53	0,52	0,46	0,44	0,09	—	$I_{\Sigma \text{рав}}$
	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	0,68	$I_{\Sigma \text{опт}}$

ВЫВОДЫ

Оптимальное распределение энергии позволяет повысить общее количество получаемой информации о наличии сигналов в различных направлениях обследуемой области. При этом одним из целесообразных критериев оптимума можно считать критерий минимума суммарного значения средней энтропии апостериорной вероятности наличия сигналов. Информационный выигрыш за счет оптимального распределения энергии зависит от условий, при которых происходит обнаружение сиг-

налов и прежде всего от распределения по направлениям априорных вероятностей наличия сигналов, от общего числа направлений в обследуемой области и общего количества расходуемой энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Перов. Оптимальное распределение энергии при многократном обследовании заданной области.— Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 1962, № 6.
2. Л. С. Гуткин. Теория оптимальных методов радиоприема при флюктуационных помехах. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
3. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М., «Советское радио», 1960.

*Поступила в редакцию
5 июля 1966 г.*