АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 3 1967

УДК 621.317.733.011.4

М. И. ЛЕВИН
(Москва)

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ТРАНСФОРМАТОРНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МОСТОВ*

Трансформаторные измерительные мосты, получившие широкое распространение в электроизмерительной технике, обычно рассматриваются как мосты с тесной индуктивной связью [1]. В таких мостах имеются два плеча, индуктивно связанных между собой, причем коэффициент связи

$$K_c = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

близок к единице.

Здесь L_1 и L_2 — индуктивности плеч;

M — их взаимная индуктивность.

Анализ свойств таких мостов, в том числе их чувствительности, не представляет принципиальных трудностей. Так, например, применяя метод трансфигурации, трансформаторный мост можно свести к обычному четырехплечему мосту переменного тока, достаточно хорошо изученному [1—3]. При анализе чувствительности трансформаторных мостов целесообразен учет параметров ферромагнитного сердечника и обмоток, реализующих тесную индуктивную связь между элементами моста. Целесообразность такого учета вполне естественна, поскольку сердечник с обмотками является важнейшей частью моста и свойства сердечника определяют в значительной степени свойства моста в целом [4].

Содержанием настоящей статьи является вывод выражений для различных видов чувствительности трансформаторных мостов с учетом свойств ферромагнитного сердечника на основе его комплексного магнитного сопротивления.

Как известно [5, 6], комплексным магнитным сопротивлением сердечника называют отношение

$$Z_м = \frac{\dot{I}w}{\dot{\Phi}}, \qquad (1)$$

где $\dot{I}$ — комплекс тока, протекающего по обмотке с числом витков w;

$\dot{\Phi}$ — комплекс магнитного потока, создаваемого этим током в сердечнике.

* Материал доложен на I Всесоюзной межвузовской конференции по автоматическим измерениям комплексных величин в сентябре 1966 года в Баку.

Предполагается, что как ток, так и поток практически синусоидальны или могут быть заменены эквивалентными синусоидами. Из-за потерь в сердечнике магнитный поток Φ отстает по фазе от тока $\dot{I}$, и, следовательно, $Z_м$ — комплексная величина. Так как сердечник — элемент нелинейный, то $Z_м$ является функцией индукции.

Если на сердечнике кроме намагничивающей обмотки w_0 размещено еще несколько обмоток с числом витков w_i, замкнутых на сопротивления Z'_i (рис. 1), то отношение магнитодвижущей силы $\dot{F}=\dot{I}_0 w_0$ к потоку Φ в сердечнике отлично от $Z_м$. Для анализа таких цепей удобно ввести понятие эквивалентного магнитного сопротивления сердечника $Z_{мэ}$, определяя его как отношение

$$Z_{мэ} = \frac{\dot{I}_0 w_0}{\dot{\Phi}}$$

при наличии на сердечнике кроме намагничивающей (w_0) ряда замкнутых обмоток (w_i).

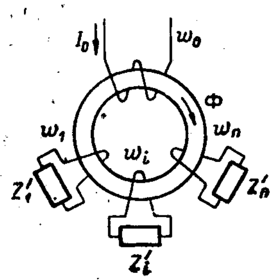

Рис. 1.

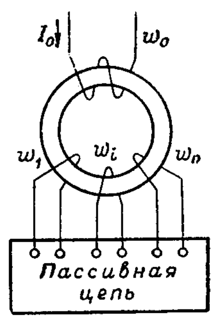

Рис. 2.

Можно показать [5], что если электрические цепи обмоток связаны между собой только потоком в сердечнике, т. е. нет связей, реализуемых потоками рассеяния или общими сопротивлениями, то эквивалентное магнитное сопротивление равно

$$Z_{мэ} = Z_м + \sum_{i=1}^{n} \frac{j\omega w_i^2}{Z_i}. \tag{2}$$

Здесь n — число обмоток, кроме намагничивающей;

Z_i — полное сопротивление цепи i-й обмотки, включающее сопротивление нагрузки Z'_i, сопротивление меди обмотки r_{ki} и индуктивное сопротивление, обусловленное потоком рассеяния, x_{ki}, т. е.

$$Z_i = Z'_i + Z_{ki},$$

где

$$Z_{ki} = r_{ki} + jx_{ki}.$$

Член $j\omega \frac{w_i^2}{Z_i} = Z_{мi}$ будем называть магнитным сопротивлением, вносимым обмоткой i. Тогда

$$Z_{мэ} = Z_м + \sum_{i=1}^{n} Z_{мi}. \tag{3}$$

Если цепи обмоток имеют внешние связи, т. е. э. д. с. $\dot{E}_i$, действующая в i-й обмотке, вызывает при отсутствии потока в сердечнике в l-й обмотке ток $\dot{I}_{il}$, то удобно пользоваться понятием взаимного сопротивления цепей обмоток i и l (сопротивления передачи) Z_{il}, где

$$Z_{il} = \frac{\dot{E}_i}{\dot{I}_{il}}.$$

В общем случае, когда обмотки присоединены к произвольной линейной цепи (рис. 2), эквивалентное магнитное сопротивление сердечника равно

$$Z_{\text{мэ}} = Z_{\text{м}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} j\omega \frac{w_i w_l}{Z_{il}}.^{*} \qquad (4)$$

Нетрудно видеть, что при $i=l$ $Z_{il} = Z_i$; если при $i \neq l$ $Z_{il} = \infty$, то выражение (4) переходит в (3).

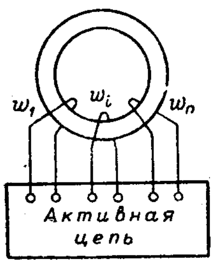

Рис. 3.

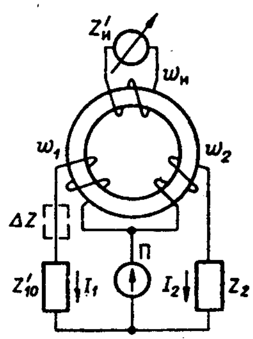

Рис. 4.

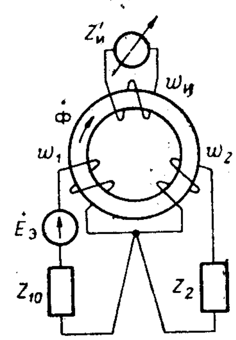

Рис. 5.

Пользуясь введенными понятиями, можно сформулировать следующую теорему** [5]: магнитный поток в сердечнике, на котором размещено n обмоток с числами витков $w_1, w_2, w_3, \ldots$, включенных в сложную линейную цепь, в которой действует произвольное число э. д. с. (рис. 3), может быть определен по формуле

$$\dot{\Phi} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dot{I}_{ix} w_i}{Z_{\text{м}} + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{n} j\omega \frac{w_i w_l}{Z_{il}}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dot{I}_{ix} w_i}{Z_{\text{мэ}}}. \qquad (5)$$

Здесь $\dot{I}_{ix}$ — ток, который протекал бы в i-й обмотке под действием э. д. с., действующих в цепи, если бы $Z_{\text{м}}$ — магнитное сопротивление сердечника — было бесконечно большим, иначе, если бы в обмотках w_i, размещенных на сердечнике, не наводились э. д. с.

* Вывод формулы дан в приложении 1.

** Ее доказательство приведено в приложении 2.

В частном случае, когда цепи обмоток связаны только потоком в сердечнике, т. е. когда при $i \neq l$ $Z_{il} = \infty$, выражение (5) превращается в следующее:

$$\dot{\Phi} = \frac{\sum\limits_{1}^{n} \dot{I}_{lx} w_l}{Z_{\text{м}} + \sum\limits_{i=1}^{n} j\omega \frac{w_i^2}{Z_i}}. \tag{6}$$

Перейдем теперь к рассмотрению трансформаторного моста, схема которого приведена на рис. 4. Источник питания П с э. д. с. $\dot{E}_{\text{п}}$ питает две ветви I и II; Z_1' и Z_2' — сравниваемые сопротивления. Помимо обмоток с числом витков w_1 и w_2, на сердечнике размещена индикаторная обмотка с числом витков $w_{\text{и}}$. К последней подключен индикатор с сопротивлением $Z_{\text{и}}'$. Обозначим $Z_{k1} = r_{k1} + jx_{k1}$, $Z_{k2} = r_{k2} + jx_{k2}$, $Z_{k\text{и}} = r_{k\text{и}} + jx_{k\text{и}}$ полные сопротивления обмоток, обусловленные наличием потоков рассеяния и сопротивлением меди.

Примем внутреннее сопротивление источника питания равным нулю. Предположим также, что связи между цепями обмоток w_1, w_2 и $w_{\text{и}}$ реализуются только магнитным потоком $\dot{\Phi}$ в сердечнике.

Рассмотрим сначала мост в состоянии равновесия, когда магнитный поток $\dot{\Phi}$ в сердечнике, а следовательно, и ток $\dot{I}_{\text{и}}$ в индикаторе равны нулю. Значение тока $\dot{I}_1$ и сопротивления Z_1, при которых имеет место равновесие, обозначим соответственно $\dot{I}_{10}$ и Z_{10}. При равновесии имеем

$$\dot{I}_{10} w_1 = \dot{I}_2 w_2, \tag{7}$$

где

$$\dot{I}_{10} = \frac{\dot{E}_{\text{п}}}{Z_{10}}; \qquad \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_{\text{п}}}{Z_2}, \tag{8}$$

причем

$$Z_{10} = Z_{10}' + Z_{k1};\ Z_2 = Z_2' + Z_{k2};\ |Z_{k1}| \ll |Z_1'|;\ |Z_{k2}| \ll |Z_2'|. \tag{8a}$$

Допустим, что сопротивление Z_{10}' изменилось на малую величину ΔZ и стало равным $Z_1' = Z_{10}' + \Delta Z$. Согласно теореме компенсации, введение сопротивления ΔZ эквивалентно введению э. д. с. $\dot{E}_{\text{э}}$, равной при $|\Delta Z| \ll |Z_{10}|$

$$\dot{E}_{\text{э}} = -\dot{I}_{10} \Delta Z. \tag{9}$$

Магнитный поток в сердечнике $\dot{\Phi}$, появляющийся при расстройке цепи, найдем как поток, вызванный электродвижущей силой $\dot{E}_{\text{э}}$. При действии в цепи только одной э. д. с. $\dot{E}_{\text{э}}$ ее схема имеет вид, изображенный на рис. 5. Для определения $\dot{\Phi}$ воспользуемся соотношением (5). Токи $\dot{I}_{1x}$, $\dot{I}_{2x}$ и $\dot{I}_{\text{и}x}$ находим, исходя из предположения, что в цепи действует э. д. с. $\dot{E}_{\text{э}}$ и поток в сердечнике равен нулю ($Z_{\text{м}} = \infty$). Нетрудно видеть, что при этом

$$\dot I_{2x} = \dot I_{иx} = 0;$$

$$\dot I_{1x} = \frac{\dot E_э}{Z_{10}} = -\frac{\dot I_{10}\,\Delta Z}{Z_{10}} = -\dot I_{10}\,\varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = \frac{\Delta Z}{Z_{10}}.$$

Тогда, согласно (5),

$$\dot\Phi = \frac{\dot I_{1x}\,w_1}{Z_{мэ}} = -\frac{\dot I_{10}\,w_1}{Z_{мэ}}\,\varepsilon,$$

где

$$Z_{мэ} = Z_м + j\,\omega\,\frac{w_1^2}{Z_{10}} + j\omega\,\frac{\omega_2^2}{Z_2} + j\omega\,\frac{w_и^2}{Z_и}.$$

Зная $\dot\Phi$, нетрудно найти э. д. с. $\dot E_и$, наводимую в индикаторной обмотке, и ток $\dot I_и$ в индикаторе:

$$\dot E_и = -j\,\omega\,w_и\,\dot\Phi = \frac{j\,\omega\,w_и\,w_1\,\dot I_{10}}{Z_{мэ}}\,\varepsilon; \qquad (10)$$

$$\dot I_и = \frac{\dot E_и}{Z_и} = \frac{j\,\omega\,w_и^2}{Z_и}\,\frac{w_1}{w_и}\,\frac{\dot I_{10}}{Z_{мэ}}\,\varepsilon; \qquad (11)$$

$$\dot I_и = \frac{Z_{ми}}{Z_{мэ}}\,\dot I'_{10}\,\varepsilon.$$

Здесь $Z_{ми} = \frac{\omega\,w_и^2}{Z_и}$ — магнитное сопротивление, вносимое цепью индикатора;

$\dot I'_1$ — ток в обмотке w_1, приведенный к числу витков $w_и$.

Отсюда чувствительность моста по току равна

$$S_I = \frac{\dot I_и}{\varepsilon} = \frac{Z_{ми}}{Z_{мэ}}\,\dot I'_{10} = \frac{Z_{ми}}{Z_м + Z_{м1} + Z_{м2} + Z_{ми}}\cdot \dot I'_{10}\,. \qquad (12)$$

Если цепь индикатора разомкнута, т. е. $Z_и = \infty$, то напряжение на зажимах индикаторной обмотки равно

$$\dot U_{иx} = \dot E_и = -\frac{\dot I_{10}\,w_1\,j\,\omega\,w_и}{Z_м + j\,\omega\,\dfrac{w_1^2}{Z_{10}} + j\,\omega\,\dfrac{w_2^2}{Z_2}}\,\varepsilon, \qquad (13)$$

а чувствительность по напряжению

$$S_U = \frac{\dot U_{иx}}{\varepsilon} = -\frac{\dot I_{10}\,w_1\,j\,\omega\,w_и}{Z_м + j\,\omega\,\dfrac{w_1^2}{Z_{10}} + j\,\omega\,\dfrac{w_2^2}{Z_2}} = -\frac{\dot I_{10}\,w_1\,j\,\omega\,w_и}{Z_м + \dfrac{j\,\omega\,w_1^2}{Z_{10}}(1+p)}, \qquad (14)$$

где

$$P = \frac{w_2}{w_1}.$$

Найдем полную мощность $P_и$, получаемую цепью индикаторной обмотки, включающей индикатор, при расстройке моста введением ΔZ:

$$P_и = \dot{I}_и^2 |Z_и|.$$

Подставляя значение $\dot{I}_и$ из (11) и учитывая, что $\frac{j\omega w_и^2}{Z_и} = Z_{ми} = Z_{ми}\ e^{j\varphi_и}$, получим

$$P_и = \omega\,(\dot{I}_{10}\,w_1)^2\,\frac{Z_{ми}}{|Z_{мэ}|^2}\,|\varepsilon^2|.$$

Под чувствительностью моста по мощности удобно понимать отношение

$$S_P = \frac{P_и}{|\varepsilon^2|} = \omega\,(\dot{I}_{10}\,w_1)^2\,\frac{|Z_{ми}|}{|Z_{мэ}|^2}. \qquad (15)$$

Так как $Z_{мэ} = Z_м + Z_{м1} + Z_{м2} + Z_{ми}$, то, обозначив

$$Z_м + Z_{м1} + Z_{м2} = Z_{мв} = Z_{мв}\,e^{j\varphi_в},$$

а

$$\left|\frac{Z_{ми}}{Z_{мв}}\right| = K = ke^{j(\varphi_в - \varphi_и)},$$

представим S_P в виде

$$S_P = \frac{w(\dot{I}_{10}\,w_1)^2}{4\,Z_{мв}}\,\frac{4\,|Z_{ми}\,Z_{мв}|}{|Z_{мв}+Z_{ми}|^2},$$

или

$$S_P = \frac{\omega\,(\dot{I}_{10}\,w_1)^2}{4\,Z_{мв}}\,\frac{4\,|K|}{|1+K|^2}. \qquad (16)$$

Соотношение (16) аналогично выражению для чувствительности по мощности обычных мостов. Его можно представить в виде

$$S_P = \omega\,\frac{(\dot{I}_{10}\,w_1)^2}{4\,Z_{мв}}\,\frac{4}{k + \frac{1}{k} + 2\cos(\varphi_в + \varphi_и)}, \qquad (17)$$

откуда следует условие оптимального согласования.

Полученные выражения с учетом (4) и (8а) позволяют судить о влиянии на чувствительность как характеристик сердечника ($Z_м$), так и параметров цепей обмоток.

Если на сердечнике, кроме указанных выше, имеются дополнительные обмотки, например, используемые для уравновешивания цепи дополнительными токами, то нетрудно учесть их влияние на чувствительность: каждой дополнительной обмотке в выражении для $Z_{мэ}$ и $Z_{мв}$ будет соответствовать дополнительный член вида $j\,\omega\,\frac{w_д^2}{Z_д}$.

Чувствительность по мощности тем выше, чем меньше $Z_{мв}$.

Из полученных выражений следует, что если обмотки нагружены емкостными сопротивлениями, то имеет место частичная компенсация магнитного сопротивления сердечника введенными магнитными сопротивлениями обмоток. Возможно также применение для компенсации магнитных сопротивлений и, следовательно, для повышения чувствительности специальных обмоток, замкнутых на емкостные сопротивления.

Основываясь на общих свойствах мостовых цепей [7], можно показать, что формулы (12), (14), (16) справедливы и в том случае, когда внутреннее сопротивление источника питания не равно нулю. Оно должно быть учтено только при расчете тока $\dot{I}_{10}$.

Полученные выражения сохраняют свое значение и для более общего случая, когда с целью повышения отношения $\frac{Z_2}{Z_{10}}$ питание измерительной цепи осуществляется через трансформатор Тр с двумя вторичными обмотками (рис. 6).

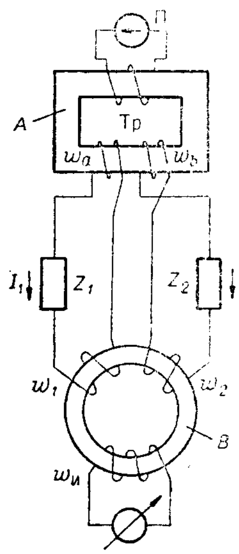

Рис. 6.

Примем, что внутреннее сопротивление источника питания и сопротивление обмотки w_0, которую он питает, можно практически считать равными нулю. Тогда для магнитодвижущих сил, создаваемых любыми обмотками, кроме обмотки w_0, магнитное сопротивление сердечника равно бесконечности.

Применяя при выводе выражений для чувствительности метод, использованный выше, т. е. заменяя вводимое сопротивление ΔZ эквивалентной э. д. с. и учитывая, что эта э. д. с. не вызывает магнитного потока в сердечнике A (этому препятствует размещенная на сердечнике короткозамкнутая обмотка w_0), можно получить выражение для потока в сердечнике B, тока в индикаторе и рассеиваемой в нем мощности, аналогичные полученным выше, с той лишь разницей, что в них под Z_{k1} и Z_{k2} следует понимать суммы сопротивлений обмоток w_1, w_a и w_2, w_b.

Приложение 1

Рассмотрим сердечник, намагничиваемый током $\dot{I}_0$, протекающим по обмотке w_0. На сердечнике помимо этой размещено n обмоток, подключенных к линейной пассивной цепи (см. рис. 2). При наличии связи между цепями обмоток (вне сердечника) ток в цепи i-й обмотки равен

$$\dot{I}_i = \sum_{l=1}^{n} \frac{\dot{E}_l}{Z_{il}} = \sum_{l=1}^{n} \frac{-j\,\omega\, w_l\, \dot{\Phi}}{Z_{il}}.$$

Магнитодвижущая сила, вызывающая поток в сердечнике, равна

$$\dot{I}_0 w_0 + \sum_{i=1}^{n} \dot{I}_i w_i = \dot{I}_0 w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{l=1}^{n} - \frac{j\,\omega\, w_l \dot{\Phi}}{Z_{il}} = \dot{\Phi} Z_{м}. \qquad (П1)$$

По определению,

$$Z_{мэ} = \frac{\dot{I}_0 w_0}{\dot{\Phi}}.$$

Подставляя сюда значение $\dot{I}_0 w_0$ из (П1) и производя элементарные преобразования, получим

$$Z_{\text{мэ}} = Z_{\text{м}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} j\omega \frac{w_i w_l}{Z_{il}}.$$

Приложение 2

Рассмотрим сердечник с n обмотками, подключенными к произвольной линейной цепи, в которой действует произвольное число э. д. с. (см. рис. 3). Обозначим $\dot{I}_{ix}$ ток, который был бы вызван этими э. д. с. в i-й обмотке, если бы магнитное сопротивле-

$$\dot{I}_i = \dot{I}_{ix} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\dot{E}_l}{Z_{il}} = \dot{I}_{ix} + \sum_{l=1}^{n} - \frac{j\omega w_l \dot{\Phi}}{Z_{il}}.$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{I}_i w_i = \dot{\Phi} Z_{\text{м}}.$$

Подставляя сюда значение $\dot{I}_i$, получим после элементарных преобразований

$$\dot{\Phi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \dot{I}_{ix} w_i}{Z_{\text{м}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} j\omega \frac{w_i w_l}{Z_{il}}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Грохольский, К. М. Соболевский. Мосты переменного тока с индуктивно связанными плечевыми элементами.— Автометрия, 1965, № 1.
2. Г. В. Гессен. О чувствительности некоторых мостовых цепей с индуктивно связанными плечами.— Труды институтов Комитетов стандартов, мер и измерительных приборов, вып. 67 (127). М.—Л., Стандартгиз, 1962.
3. К. М. Соболевский, Ф. Б. Гриневич. К вопросу чувствительности моста с тесной индуктивной связью.— Электрические методы автоматического контроля. (Труды ИАЭ СО АН СССР, вып. 5). Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
4. Ф. Б. Гриневич, А. В. Чеботарев. О построении измерительных схем цифровых мостов переменного тока.— Автоматический контроль и методы электрических измерений. Тезисы докладов и сообщений. Новосибирск, 1964.
5. М. И. Левин. Методы расчета схем, содержащих цепи с ферромагнитными сердечниками.— Труды МЭИ, вып. 3. М., 1948.
6. Б. К. Буль. Основы теории и расчета магнитных цепей. М.—Л., «Энергия», 1964.
7. М. И. Левин. Элементы теории и расчета мостовых схем.— Измерительная техника, 1958, № 4.

Поступила в редакцию
21 декабря 1966 г.