АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
1967
№ 3

УДК 62.019.3

Ш. ФИРКОВИЧ
(Варшава, ПНР)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ИЗДЕЛИЙ*

Оценку качества изделий мы называем статистической, если она основана на анализе результатов испытаний случайной выборки. Вполне понятно, что такая оценка применима лишь для изделий массового производства.

В работе рассмотрен вопрос численной статистической оценки качества изделий:

а) путем сравнения результатов испытаний случайной выборки с требованиями, установленными для учитываемых свойств изделий; такую оценку будем называть коэффициентом качества и обозначать Q;

б) путем сравнения отдельных свойств изделий оцениваемой совокупности со свойствами изделий установленной стандартной совокупности на основе результатов испытаний случайных выборок из этих совокупностей; такую оценку будем называть коэффициентом относительного качества и обозначать Q^*.

Величины Q и Q^* могут быть вычислены для любого множества свойств рассматриваемых изделий, но схема испытаний и анализа их результатов должна быть заранее установлена.

Испытание B, вероятностным отображением которого является одномерная случайная величина X с дискретным или непрерывным распределением, назовем элементарным испытанием, а коэффициенты $Q(B)=q$ и $Q^*(B)=q^*$ — элементарными коэффициентами качества. Элементарные коэффициенты q и q^* являются основой вычисления величин Q и Q^* для учитываемого множества свойств оцениваемых изделий.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА КАЧЕСТВА q

С элементарным испытанием B сопряжена одномерная случайная величина X. Показателем качества изделий, с точки зрения испытания B, является определенный параметр ξ распределения случайной величины X в данной совокупности изделий; это может быть доля брака (при учете данного множества качественных признаков), среднее значение количественного признака, интенсивность отказов и т. п. Обычно требование дается в виде неравенства $\xi \geqslant \xi_0$ или $\xi \leqslant \xi_0$, где ξ_0 — требуемое значение величины ξ. Задача заключается в вычислении элементарного ко-

* Материал доложен на VIII Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1966 года в Новосибирске.

эффициента качества q, если требование известно и если знаем не величину ξ, а только ее оценку ξ^* из проведенного испытания B случайной выборки установленного объекта n.

Для простоты и общности рассуждений введем следующие обозначения: $\{\xi^* > \xi_0\} \equiv \{$при $\xi = \xi^*$ изделия считаем лучшими, чем при $\xi = \xi_0\}$, $\{\xi^* < \xi\} \equiv \{$при $\xi = \xi_0$ изделия считаем лучшими, чем при $\xi = \xi^*\}$.

Коэффициент q должен удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \xi^* < \xi_0 &\longleftrightarrow 0 \leqslant q < 1; \\ \xi^* = \xi_0 &\longleftrightarrow q = 1; \\ \xi^* > \xi_0 &\longleftrightarrow 1 < q \leqslant 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Исходя из этих условий, получаем формулу

$$q = \begin{cases} 1 - \gamma_1, \text{ если } \xi^* < \xi_0; \\ 1, \text{ если } \xi^* = \xi_0; \\ 1 + \gamma_2, \text{ если } \xi^* > \xi_0, \end{cases} \tag{2}$$

где $0 \leqslant \gamma_1 \leqslant 1$; $0 \leqslant \gamma_2 \leqslant 1$.

Для вычисления величин γ_1 и γ_2 надо помнить, что ξ^* является значением определенной статистики $\hat{\xi}$, причем распределение статистики $\hat{\xi}$ зависит от величины ξ.

Полагая $\xi = \xi_0$, для вычисления величин γ_1 и γ_2 используем статистику $U = \varphi(\hat{\xi}, \xi_0; \xi = \xi_0)$ с известным распределением, причем

а) $\varphi(\xi^*, \xi; \xi = \xi_0) = u$;

б) если $\xi^* = \xi_0$, то $u = u_0$;

в) всегда $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$.

Если статистика $U = \varphi(\hat{\xi}, \xi; \xi = \xi_0)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \{\xi^* < \xi_0\} &\equiv \{u_0 < U \leqslant u_2\}; \\ \{\xi^* > \xi_0\} &\equiv \{u_1 \leqslant U < u_0\}, \end{aligned} \tag{3}$$

то γ_1 и γ_2 вычисляются по формулам:

$$\gamma_1 = P\{u_0 < U \leqslant u \mid u_0 < U \leqslant u_2\} = \frac{P\{u_0 < U \leqslant u\}}{P\{u_0 < U \leqslant u_2\}}; \tag{4}$$

$$\gamma_2 = P\{u \leqslant U < u_0 \mid u_1 \leqslant U < u_0\} = \frac{P\{u \leqslant U < u_0\}}{P\{u_1 \leqslant U < u_0\}}, \tag{5}$$

а если статистика U удовлетворяет условиям

$$\{\xi^* < \xi_0\} \equiv \{u_1 \leqslant U < u_0\}$$

и

$$\{\xi^* > \xi_0\} \equiv \{u_0 < U \leqslant u_2\}, \tag{6}$$

то формулы для γ_1 и γ_2 следует поменять местами и вычислять γ_1 по формуле (5), а γ_2 по формуле (4).

Если статистика U распределена симметрично относительно величины u_0, то можно пользоваться статистикой

$$V = U - u_0, \tag{7}$$

распределенной симметрично относительно нуля. Тогда

$$v = u - u_0;$$
$$v_0 = u_2 - u_0 = u_0 - u_1 > 0. \tag{8}$$

И поэтому

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{P\{|V| \leqslant |v|\}}{P\{|V| \leqslant v_0\}}. \tag{9}$$

Подбор соответствующей для данного случая статистики U или V довольно прост и показан на практических примерах в работах [1, 2].

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА КАЧЕСТВА q^*

Значение показателя качества ξ в оцениваемой совокупности изделий обозначим ξ_1, а в стандартной совокупности ξ_2. Задача заключается в вычислении элементарного коэффициента качества q^*, если известна оценка ξ_1^* величины ξ_1 и оценка ξ_2^* величины ξ_2' из проведенного испытания B случайных выборок n_1 изделий из оцениваемой совокупности и n_2 изделий из стандартной совокупности, причем n_1 и n_2 заранее установлены.

Коэффициент q^* должен удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\xi_1^* < \xi_2^* \longleftrightarrow 0 \leqslant q^* < 1; \\ &\xi_1^* = \xi_2^* \longleftrightarrow q^* = 1; \\ &\xi_1^* > \xi_2^* \longleftrightarrow 1 < q^* \leqslant 2. \end{aligned} \tag{10}$$

Исходя из этих условий, получаем

$$q^* = \begin{cases} 1 - \beta_1, \text{ если } \xi_1^* < \xi_2^*; \\ 1, \text{ если } \xi_1^* = \xi_2^*; \\ 1 + \beta_2, \text{ если } \xi_1^* > \xi_2^*, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$0 \leqslant \beta_1 \leqslant 1; \quad 0 \leqslant \beta_2 \leqslant 1.$$

Оценки ξ_1^* и ξ_2^* являются как, известно, значениями статистик $\hat{\xi}_1$ и $\hat{\xi}_2$. Для вычисления величин β_1 и β_2 используем статистику $U^* = \psi(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2; \xi_1 = \xi_2)$ с известным распределением, причем

а) $\psi(\xi_1^*, \xi_2^*; \xi_1 = \xi_2) = u^*$;

б) если $\xi_1^* = \xi_2^*$, то $u^* = u_0^*$;

в) всегда $u_1^* \leqslant u^* \leqslant u_2^*$.

Если статистика $U^* = \psi(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2; \xi_1 = \xi_2)$ удовлетворяет условиям

$$\{\xi_1^* < \xi_2^*\} \equiv \{u_0^* < U^* \leqslant u_2^*\}$$
и
$$\{\xi_1^* > \xi_2^*\} \equiv \{u_1^* \leqslant U^* < u_0^*\}, \tag{12}$$

то β_1 и β_2 вычисляются по формулам:

$$\beta_1 = P\{u_0^* < U^* \leqslant u^* \mid u_0^* < U^* \leqslant u_2^*\} = \frac{P\{u_0^* < U^* \leqslant u^*\}}{P\{u_0^* < U^* \leqslant u_2^*\}}; \tag{13}$$

$$\beta_2 = P\{u^* \leqslant U^* < u_0^* \mid u_1^* \leqslant U^* < u_0^*\} = \frac{P\{u^* \leqslant U^* < u_0^*\}}{P\{u_1^* \leqslant U^* < u_0^*\}}; \tag{14}$$

если статистика U^* удовлетворяет условиям

$$\{\xi_1^* < \xi_2^*\} \equiv \{u_1^* \leqslant U^* < u_0^*\}$$
и
$$\{\xi_1^* > \xi_2^*\} \equiv \{u_0^* < U^* \leqslant u_2^*\}, \tag{15}$$

то формулы для β_1 и β_2 следует поменять местами и вычислять β_1 по формуле (14), а β_2 по формуле (13).

В случае симметрии статистики U^* относительно величины можно пользоваться статистикой

$$V^* = U^* - u_0^*, \tag{16}$$

распределенной симметрично относительно нуля.

Тогда

$$v^* = u^* - u_0^*;$$
$$v_0^* = u_2^* - u_0^* = u_0^* - u_1^* > 0. \tag{17}$$

И поэтому

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{P\{|V^*| \leqslant |v^*|\}}{P\{|V^*| \leqslant v_0^*\}}. \tag{18}$$

Подбор статистики U^* и V^* показан на практических примерах в работах [3, 4].

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ИЗДЕЛИЙ ПРИ УЧЕТЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО МНОЖЕСТВА ИХ СВОЙСТВ

Предположим, что установленная схема испытаний учитывает множество испытаний Ω, состоящее из $m \geqslant 1$ непересекающихся групп испытаний, а каждая группа испытаний $\Omega_i \subset \Omega$ состоит из $m_i \geqslant 1$ взаимно независимых элементарных испытаний $B_{ij} \in \Omega_i$.

Под взаимной независимостью испытаний $B_{ij} \in \Omega_i$ подразумевается, что проведение одного испытания не влияет на результат другого, для чего иногда достаточно установить определенную очередность испытаний, а иногда надо провести испытания на отдельных выборках. Предположим дальше, что для испытаний $B_{ij} \in \Omega$ установлены весовые коэффициенты $b_{ij} > 0$, а для групп испытаний $\Omega_i \subset \Omega$ — весовые коэффициенты $b_i > 0$. Наша задача может быть сведена к одной из двух следующих: а) вычислить коэффициент качества $Q = Q(\Omega)$, если известны величины $q_{ij} = Q(B_{ij})$ для всех элементарных испытаний $B_{ij} \in \Omega$ или б) вычислить коэффициент относительного качества $Q^* = Q^*(\Omega)$, если известны величины $q^*_{ij} = Q^*(B_{ij})$ для всех элементарных испытаний $B_{ij} \in \Omega$.

Ввиду того, что для решения этих задач можно использовать однотипные формулы, рассмотрим только следующие зависимости:

$$Q = Q(\Omega) = F(Q_i, b_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{19}$$

где

$$Q_i = Q(\Omega_i) = F_i(q_{ij}, b_{ij}) \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{20}$$

причем предел возможных значений величин Q_i и Q такой же, как и у q_{ij}, т. е.

$$0 \leqslant Q_i \leqslant 2 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant Q \leqslant 2. \tag{21}$$

Предположим, что группа Ω_i может состоять из непересекающихся подгрупп $\Omega_{i\text{А}}$ и $\Omega_{i\text{Б}}$, характерных тем, что

$$\bigvee_{B_{ij} \in \Omega_{i\text{А}}} q_{ij} = 0 \longleftrightarrow Q_i = 0; \tag{22}$$

$$\bigwedge_{B_{ij} \in \Omega_{i\text{Б}}} q_{ij} = 0 \leftrightarrow Q_i = 0, \tag{23}$$

причем принадлежность испытания B_{ij} к подгруппе $\Omega_{i\text{А}}$ или $\Omega_{i\text{Б}}$ установлена заранее. Из условий (22) и (23) следует, что подгруппа $\Omega_{i\text{Б}}$ равносильна элементарному испытанию с весовым коэффициентом

$$b_{i\text{Б}} = \max_{B_{ij} \in \Omega_{i\text{Б}}} b_{ij}. \tag{24}$$

Исходя из этих предположений и учитывая, что

$$\bigwedge_{B_{ij} \in \Omega_i} q_{ij} = 1 \rightarrow Q_i = 1 \tag{25}$$

и

$$\bigwedge_{B_{ij} \in \Omega_i} q_{ij} = 2 \leftrightarrow Q_i = 2, \tag{26}$$

получим

$$\lg Q_i = \frac{b_{i\text{Б}} \lg Q_{i\text{Б}} + \sum\limits_{B_{ij} \in \Omega_{i\text{А}}} b_{ij} \lg q_{ij}}{b_{i\text{Б}} + \sum\limits_{B_{ij} \in \Omega_{i\text{А}}} b_{ij}}, \tag{27}$$

где

$$Q_{i\text{Б}} = \frac{\sum\limits_{B_{ij} \in \Omega_{i\text{Б}}} b_{ij} q_{ij}}{\sum\limits_{B_{ij} \in \Omega_{i\text{Б}}} b_{ij}}. \tag{28}$$

Если все испытания $B_{ij} \in \Omega_i$ принадлежат к подгруппе $\Omega_{iА}$, то

$$\lg Q_i = \frac{\sum\limits_{B_{ij} \in \Omega_i} b_{ij} \lg q_{ij}}{\sum\limits_{B_{ij} \in \Omega_i} b_{ij}}, \tag{29}$$

а если все испытания $B_{ij} \in \Omega_i$ принадлежат к подгруппе $\Omega_{iБ}$, то $Q_i = Q_{iБ}$ и вычисляется по формуле (28).

Рассмотрим вопрос вычисления коэффициента качества $Q = Q(\Omega)$, учитывающего все $m \geqslant 1$ непересекающихся групп $\Omega_i \subset \Omega$.

Исходя из условия (21) и учитывая, что

$$\bigwedge_{\Omega_i \subset \Omega} Q_i = 1 \longrightarrow Q = 1; \tag{30}$$

$$\bigwedge_{\Omega_i \subset \Omega} Q_i = 2 \longleftrightarrow Q = 2; \tag{31}$$

$$\bigvee_{\Omega_i \subset \Omega} Q_i = 0 \longleftrightarrow Q = 0, \tag{32}$$

получим

$$\lg Q = \frac{\sum\limits_{\Omega_i \subset \Omega} b_i \lg Q_i}{\sum\limits_{\Omega_i \subset \Omega} b_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} b_i \lg Q_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} b_i}. \tag{33}$$

Для практики интересным является случай $b_i = 1$ для всех m групп $\Omega_i \subset \Omega$ и $b_{ij} = 1$ для всех $B_{ij} \in \Omega$.

Если для отдельных $\Omega_i \subset \Omega$ имеем r_i испытаний $B_{ij} \in \Omega_{iА}$ и k испытаний $B_{ij} \in \Omega_{iБ}$, то

$$\lg Q_i = \begin{cases} \dfrac{1}{r_i + 1}\left[\lg Q_{iБ} + \sum\limits_{j=1}^{r_i} \lg q_{ij}\right], & \text{если } k_i \geqslant 1; \\ \dfrac{1}{r_i} \sum\limits_{j=1}^{r_i} \lg q_{ij}, & \text{если } k_i = 0, \end{cases} \tag{34}$$

где

$$Q_{iБ} = \frac{1}{k_i} \sum_{j = r_i + 1}^{r_i + k_i} q_{ij}, \tag{35}$$

а коэффициент Q вычисляется по формуле

$$\lg Q = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \lg Q_i. \tag{36}$$

Пользуясь приведенными формулами, можно также вычислить коэффициент относительного качества Q^*, если вместо величин q_{ij} подставим величины $\overset{*}{q}_{ij}$.

Примеры практического использования рассмотренного метода статистической оценки качества изделий массового производства приведены в работах [2, 3, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Sz. Firkowicz. Przegląd Elektroniki, 1966, № 6.
2. Sz. Firkowicz. Prace PIE, 1966, № 2.
3. Sz. Firkowicz. Prace PIE, 1965, № 3/4.
4. Sz. Firkowicz. Przegląd Elektroniki, 1966, № 9.
5. Sz. Firkowicz. Przegląd Elektroniki, 1966, № 5.

Поступила в редакцию
19 сентября 1966 г.