АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1967

УДК 681.2.08

Г. И. МАРЧУК, Ю. П. ДРОБЫШЕВ

(Новосибирск)

ное значение в организации информационной системы. Измерительная техника позволяет получить набор сведений (функционалов) о процессе, анализировать процесс и направлять его. С помощью таких функционалов производится интерпретация физического процесса.

Мы не будем говорить о таких отдельных элементарных измерениях, как измерение напряжения, силы тока в отдельных участках электрической цепи и др. Нас будут интересовать только сложные физические явления и процессы, которые должны быть поняты и количественно оценены с требуемой точностью. Аналогичные задачи возникают постоянно, особенно в новых областях науки и техники. В этом смысле теория измерений оказывается необходимой составной частью научно-технического прогресса. К примеру, нельзя разработать методы измерений коэффициента размножения нейтронов в реакторе, если не только в общих чертах, но и в деталях не ясен физический процесс цепной реакции и диффузии нейтронов, неизвестны уравнения, описывающие поведение ядерного реактора при изменении различных условий.

Несомненно, можно констатировать, что методы измерений и сами приборы существенно совершенствуются вместе с развитием теории рассматриваемого физического процесса. Разработка теории и эксперимента, как правило, сопровождается созданием или усовершенствованием прежних методов измерений. Можно привести ряд примеров, когда были созданы великолепные приборы на основе учета весьма тонких физических особенностей теории.

2. Возникает вопрос о том, нельзя ли в настоящее время сформулировать более или менее общий подход к методам измерения применительно к различным процессам с возможностью формального математического описания алгоритма. Оказывается, такие принципы можно сформулировать, по крайней мере, для задач с линейными операторами. В дальнейшем речь будет идти именно об этом классе задач.

Представляется, что основой теории измерений вариаций физических величин может служить специальным образом определенная теория возмущений. Суть дела состоит в следующем. Предположим, что мы изучаем сложный физический процесс с помощью прибора, имеющего определенные физические характеристики. Показания такого прибора связаны с исследуемым полем физической величины и являются функционалами поля. В большинстве случаев, однако, экспериментатора интересует не само поле физической величины, а отклонения от него под влиянием обычно малых возмущений. Это значит, что измерения должны быть проведены с достаточной точностью, чтобы зарегистрировать указанные отклонения поля от стандартного состояния. Разумеется, что это первое необходимое требование к прибору. Предположим, что такое требование выполнено и мы располагаем измерениями отклонений показания прибора от нормы с требуемой точностью. Спрашивается, достаточно ли этой информации для удовлетворительной интерпретации эксперимента и можем ли мы с достаточной точностью восстановить информацию о возмущенном состоянии системы. К сожалению, на этот вопрос обычно следует отрицательный ответ. Объясняется это тем, что задачи восстановления информации о поле физической величины с помощью измерительных приборов являются обратными некорректными задачами математической физики. Теория таких задач к настоящему времени весьма продвинута в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева и В. К. Иванова. В качестве иллюстрации некорректно поставленной задачи можно привести случай, когда интерпретация данных связана с решением интегрального уравнения Фредгольма I рода

$$\int_D \varphi(\xi) K(x, \xi) d\xi = f(x), \tag{1}$$

где $\varphi(\xi)$ — исследуемая физическая характеристика поля;

$f(x)$ — наблюдаемое показание прибора.

Известно, что в этом случае малые отклонения в $f(x)$ могут привести к большим отклонениям в $\varphi(\xi)$. Анализ показывает, что уже за счет малых ошибок аппроксимации уравнения (1) мы можем прийти к совершенно абсурдному результату.

Для того чтобы обойти эту принципиальную трудность обработки экспериментальных данных, необходимо с самого начала связать отклонения показания прибора непосредственно с отклонениями изучаемых физических параметров процесса. В этом случае ошибка в исследуемой характеристике будет пропорциональна ошибке в отклонении показания прибора — вариации функционала — и, следовательно, при интерпретации мы используем максимальную информацию измерительного прибора. В общем виде математический формализм будет следующим.

Пусть φ — поле некоторой функции (излучение, электромагнитные волны и т. д.). Тогда основное уравнение поля запишем в виде

$$L\varphi = f, \tag{2}$$

где L — линейный оператор в гильбертовом пространстве;

$f(x)$ — функция источника поля.

В гильбертовом пространстве функций определим скалярное произведение (a, b). В частности, для квадратично интегрируемых функций удобно использовать метрику L_2. В этом случае

$$(a, b) = \int_D a b \, dx. \tag{3}$$

Всякое измерение прибора является линейным функционалом поля физической величины. Если $p(x)$ — характеристика прибора, то его показание будет выражаться через φ так:

$$I(\varphi) = (p, \varphi) = \int_D p(x) \varphi(x) \, dx. \tag{4}$$

Здесь x — обобщенный аргумент функций φ, p и f.

Введем в рассмотрение сопряженный оператор L^* и построим следующее уравнение:

$$L^*\varphi^*=p(x). \qquad (5)$$

Оператор L^* связан с L тождеством Лагранжа

$$(\varphi^*,\ L\varphi)=(\varphi,\ L^*\varphi^*) \qquad (6)$$

в классе вещественных функций и операторов.

Умножим теперь (2) скалярно на φ^*, а (5) на φ и вычтем одно соотношение из другого. Тогда получим

$$I(\varphi)=(p,\ \varphi)=(f,\ \varphi^*). \qquad (7)$$

Из этой формулы следует, что функционал I определяется либо через функции поля φ, либо через функции сопряженного поля φ^*.

Функцию φ^* будем называть информационной ценностью измерения. Эта функция связана с прибором через $p(x)$, характеризующим «источник» в уравнении (5), а также с самим физическим процессом, поскольку L^* является сопряженным с оператором L. Введенное в рассмотрение уравнение (5) позволяет сформулировать теорию возмущений по отношению к показанию прибора — функционала I.

Пусть некоторый процесс был возмущен изменением какого-нибудь физического параметра или системы параметров. Новое состояние системы будем отмечать штрихом. Тогда вместо уравнения (2) будем иметь

$$L'\varphi'=f. \qquad (8)$$

Уравнение (8) скалярно помножим на φ^*, уравнение (5) на φ', результаты вычтем друг из друга и воспользуемся тождеством Лагранжа (6). Тогда получим формулу теории возмущений для $\delta I=I'-I$:

$$\delta I=-(\varphi^*,\ \delta L\varphi'). \qquad (9)$$

В целях простейшей иллюстрации предположим, что $L=\text{const}$; тогда, вынося δL за знак скалярного произведения, получаем решение обратной задачи

$$\delta L=-\frac{\delta I}{(\varphi^*,\ \varphi)}. \qquad (10)$$

Если возмущение мало, то φ' можно заменить на φ. Формула (10) показывает, что изменение свойств среды пропорционально вариации δI. Это значит, что интерпретация измерения прибора в данном случае оказывается возможной и эффективной.

Естественно теперь дать физическую интерпретацию функции информационной ценности измерения φ^*. Для этого рассмотрим формулу теории возмущений (9) и предположим, что

$$\delta L\varphi'=-\delta(x-x_0).$$

В этом случае получаем

$$\delta I=\varphi^*. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что φ^* есть реакция прибора на отклонение процесса от нормы в точке $x = x_0$.

Предположим далее, что оператор L состоит из суммы различных операторов l_j вида

$$L = \sum_j \alpha_j l_j, \tag{12}$$

где α_j — заданные на начало эксперимента величины, которые будем ради простоты считать постоянными, а возмущения — малыми.

Очевидно, в этом случае

$$\sum_j$$

Здесь $\delta\alpha_j$ — искомые величины. Естественно, что с помощью только одного измерения δI невозможно восстановить n величин $\delta\alpha_j$. Для этого в полностью детерминированном случае необходимо иметь n разных независимых измерений. Предположим, что такие измерения имеются и мы приходим к системе уравнений

$$\underline{A}\vec{\xi} = \vec{I}, \tag{15}$$

где $\underline{A}$ — матрица с элементом $\{\alpha_{kj}\} = (\varphi_k^*, l_j\varphi)$;

$\vec{\xi}$ и $\vec{I}$ — векторы с компонентами $\{\delta\alpha_j\}$ и $\{\delta I_k\}$ соответственно.

3. Переходим к решению системы уравнений (15) и постараемся на основе требований, предъявляемых к разрешимости этой системы, дать математический критерий эффективности информационной измерительной системы.

Предположим, что мы можем организовать несколько различных полных систем измерений (по n измерений в каждой). Для каждой такой системы приходим к задаче (15), решение которой находится известными методами. Анализ метода решения показывает, что в одних случаях вектор $\vec{\xi}$ находится с заданной точностью, в других случаях погрешность оказывается недопустимо большой и интерпретация измерений представляется невозможной. Как выбрать наилучший вариант построения системы? Этот вопрос тесно связан с решением спектральной проблемы. В самом деле, рассмотрим задачу на собственные числа, связанную с системой (15):

$$\underline{A}\vec{\eta} = \lambda\vec{\eta}. \tag{16}$$

Пусть $\{\lambda_i\}$ — спектр задачи (16), а

$$T = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|} \tag{17}$$

число Тодда*. Для разных, но полных систем измерений будем иметь

---

* Число Тодда — одна из характеристик обусловленности матрицы (Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М.—Л., Физматгиз, 1963, стр. 151).

$$\min_{r \in R} T_r = \beta. \tag{18}$$

В этом случае система уравнений (15) будет иметь наилучшую обусловленность, что приводит к наименьшим погрешностям при реализации.

Разумеется, что критерий эффективности β не содержит сведений экономического порядка, времени реализации такой системы и т. д. Предполагается, что эти сведения учитываются при выборе области определения R. Высказанные выше соображения могут быть обобщены для более сложных случаев измерений, когда коэффициенты α_j непостоянные. Удобно при этом коэффициенты α_j представить в виде быстро сходящихся разложений по специальным образом сконструированной системе функций.

4. До сих пор мы изучали методы измерений в предположении детерминированного процесса. На самом деле почти всегда мы имеем дело со случайными величинами, которые либо имеют физическую природу, связанную с самим полем изучаемой величины и его естественными флюктуациями, либо со случайными погрешностями прибора, измеряющего функционал I. Если со случайными ошибками прибора можно справиться довольно просто на основе хорошо разработанного статистического анализа погрешностей, то проблема обработки флюктуаций измеряемого поля представляет существенные трудности, поскольку такие флюктуации зачастую превышают изучаемое регулярное (среднее) изменение поля. При наличии флюктуаций, генерируемых полем, естественно считать, что они вызываются флюктуациями оператора L. Рассмотрим оператор L, являющийся линейной функцией флюктуирующих параметров, причем флюктуация параметра аддитивна по отношению к регулярному его изменению. В этом случае показания прибора суть случайные величины, статистические характеристики которых определяются статистикой флюктуаций. Для выделения интересующей нас информации о регулярных возмущениях поля можно использовать методы осреднения. Важным является вопрос о выборе величин, которые следует осреднять.

Осреднение конечных результатов решения обратной задачи связано с большим объемом вычислений (задача должна быть решена n раз при объеме выборки n). Выясним, возможно ли осреднять начальные данные и параметры задачи. Будем считать, что количество возмущенных параметров равно N и что за время, в течение которого регулярная составляющая параметра не успевает существенно измениться, проводится n измерений.

Показано, что если средняя величина из n регистраций каждого прибора сходится к математическому ожиданию, то для определения неизвестных N регулярных возмущений параметра может быть получена нелинейная система уравнений, порядок которой определяется количеством членов разложения обратного оператора в ряд по возмущениям.

Коэффициенты системы определяются стандартными параметрами невозмущенного оператора и моментами флюктуаций. Если последние неизвестны, то можно использовать дополнительную систему уравнений, связывающую дисперсию показаний приборов со статистическими характеристиками (моментами) флюктуаций. Погрешности решения из-за ограниченности выборки могут быть найдены по известным в математической статистике формулам оценок. Таким образом, при достаточном объеме выборки возможно осреднять начальные данные, а решение обратной задачи проводить лишь один раз, что позволяет резко сократить необходимый объем вычислений.

Метод разложения обратного возмущенного оператора в ряд по возмущениям может быть применен при решении задачи измерения в недоступной области в случае стохастических флюктуаций. Задачу поставим в следующем виде. Требуется определить некоторую функцию $b(z)$, представляющую собой зависимость параметра оператора, например, от пространственных координат (z), по показаниям приборов, установленных вне области измерения, если действует аддитивная к $b(z)$ флюктуация параметра. В основе метода лежит аппроксимация суммарного отклонения параметров поля от стандартного значения конечной суммой некоторых детерминированных базисных функций $\psi_j(z)$. Случайные флюктуации функции определяются при этом совокупностью N случайных коэффициентов, где N — количество членов аппроксимирующего ряда. Аналогично предыдущему случаю могут быть получены соотношения, связывающие математическое ожидание и дисперсию показаний приборов со статистическими характеристиками совокупности случайных коэффициентов, связанных с флюктуациями, и искомыми регулярными отклонениями параметра поля от своего стандартного значения. Как и раньше, порядок алгебраических уравнений определяется количеством членов разложения обратного оператора в ряд по возмущениям. Поскольку задача разрешима только в том случае, когда характеристики приборов позволяют получить N независимых функционалов поля, то в функцию ценности прибора φ^* должны входить пространственные координаты z. Это достигается, например, измерением в различных полосах спектра излучения, если свойства измеряемой среды позволяют дифференцировать различные ее области по спектру. Выбор базисных функций $\psi_j(z)$ важен для снижения объема вычислений и может быть произведен на основе использования пространственной корреляционной функции искомого параметра [1, 2].

5. На основе разработанных алгоритмов в настоящее время возможно планирование измерительных систем для экспериментов и оперативной работы. Эти идеи уже реализованы в ряде областей физики. Отметим более подробно те области новой техники, где приведенные выше формулы составляют основу исследований.

А. Эксперименты на ядерных реакторах. Задача состоит в измерении коэффициентов, описывающих взаимодействие нейтронов с веществом, вводимым в критический реактор, изучении системы регулирования оптимальных методов защиты от излучения [3].

Б. Интерпретация данных с метеорологических спутников с целью восстановления информации в недоступной области — распределение температуры, давления и других характеристик атмосферы.

Методы, обсужденные в настоящей работе, могут быть эффективно использованы практически во многих областях, связанных с линейными процессами [4].

В. Геофизические методы каротажа. Любопытно отметить, что в одной из задач электромагнитной разведки геофизики на основе интуитивных соображений пришли к частному виду формулы (9) и успешно применили эти формулы для интерпретации данных [5].

Особенное значение эти методы возможно будут иметь для анализа информации в недоступных непосредственному измерению местах.

В настоящей статье мы не имели в виду дать обзор теоретических исследований в области измерительной и информационной техники. Эта статья в основном содержит ряд соображений лишь по отдельному конкретному вопросу теории, который, по нашему мнению, может оказаться полезным.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1961.
2. А. М. Обухов. О статистических ортогональных разложениях эмпирических функций.— Изв. АН СССР, серия геофизическая, 1960, № 3.
3. Г. И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1961.
4. Г. И. Марчук. Уравнение для ценности информации с метеорологических спутников и постановка обратных задач.— Космические исследования, т. II, вып. 3. М., «Наука», 1964.
5. В. Г. Васильев. Одномерная обратная задача индукционного каротажа.— В сб. «Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических наблюдений». Под ред. М. М. Лаврентьева. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
17 июля 1966 г.,
окончательный вариант —
25 ноября 1966 г.