А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 2 1967

УДК 681.2.08

В. М. ЕФИМОВ, В. И. РАБИНОВИЧ

(Новосибирск)

О ПОГРЕШНОСТИ ЦИФРОВОГО ПРИБОРА, ОБУСЛОВЛЕННОЙ ИЗМЕНЕНИЕМ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ ЗА ВРЕМЯ ИЗМЕРЕНИЯ*

Предлагаются расчетные соотношения для среднего квадрата ошибки цифрового измерения. Учитываются две составляющие ошибки: ошибка квантования по уровню и ошибка, обусловленная изменением измеряемой величины за время измерения. На основании анализа полученных соотношений даются рекомендации по выбору времени, к которому следует относить результат измерения, а также исследуются вопросы согласования шага квантования по уровню с динамическими свойствами измеряемой величины.

При цифровом измерении осуществляется квантование входной величины x по уровню, сущность которого в рассматриваемом ниже случае сводится к тому, что при выполнении неравенств

$$iq<x; \quad x<iq+q \tag{1}$$

(q — интервал дискретности) значение x округляется до $iq+\frac{q}{2}$.

Таким образом, наличие квантования по уровню обусловливает появление специфической погрешности цифрового измерения — погрешности дискретности (шума квантования по уровню). В реальных цифровых измерительных приборах (ЦИП) из-за ограниченности их быстродействия проверка неравенств (1) производится разновременно (рис. 1). Если измеряемая величина не изменяется за время измерения или фиксируется перед измерением, то разновременность проверки неравенств не играет роли, и средний квадрат погрешности дискретности может быть определен из известного соотношения:

$$\overline{\xi^2}=\sum_{i=0}^{N-1}\int_{iq}^{(i+1)q} f(x)\left(iq+\frac{q}{2}-x\right)^2 dx \cong \frac{q^2}{12}, \tag{2}$$

где $f(x)$ — плотность вероятности измеряемой величины;
N — число интервалов дискретности.

---

* Материал доложен на VIII Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1966 года в Новосибирске.

Если измеряемая величина изменяется за время измерения (см. рис. 1), то (2) становится уже несправедливым. Появляется дополнительная погрешность. Кроме того, возникает неопределенность в выборе момента времени, к которому следует отнести результат цифрового измерения, т. е. в выборе «датирования» результата измерения.

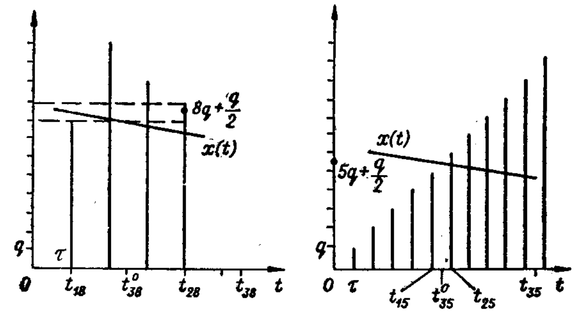

Рис. 1.

Возникновение дополнительной погрешности обусловлено тем, что неравенства (1) проверяются разновременно. Например, при двоичном поразрядном уравновешивании* у интервалов дискретности, прилегающих к середине шкалы прибора, одно из неравенств фиксируется в начале процесса уравновешивания, а другое — в его конце (см. рис. 1, *а*).

При развертывающем уравновешивании с основанием кода, равным единице, моменты проверки неравенств (1) разделены временем формирования одной ступени образцовой величины (см. рис. 1, *б*).

Ниже производится определение среднего квадрата погрешности дискретности $\overline{\xi_\Sigma^2}$ с учетом разновременности проверки неравенств (1) и изменения измеряемой величины за время измерения. Предполагается, что измеряемая величина случайна, стационарна и дифференцируема в среднеквадратичном.

Заметим предварительно, что если одно из неравенств фиксируется в момент t_{1i}, а другое в момент t_{2i}, то результат измерения обычно датируется некоторым моментом t_{3i}. Это обусловлено тем, что для вывода результата измерения на шкалу прибора или для его регистрации требуется определенное время. Кроме того, в ряде случаев, например при развертывающем циклическом уравновешивании, результат измерения умышленно относится к концу цикла развертки с тем, чтобы устранить неравномерность следования результатов измерения во времени.

Если исходить из предположения о том, что вероятность изменения измеряемой величины за время $\Delta t_i = t_{2i} - t_{1i}$ между моментами фиксации неравенств (1) на величину, большую одного интервала дискретности, пренебрежимо мала, а плотность вероятности измеряемой величины практически постоянна в пределах нескольких интервалов дискретности, то для оценки $\overline{\xi_\Sigma^2}$ можно получить следующую формулу (см. приложение):

$$\overline{\xi_\Sigma^2} = \frac{q^2}{12} + \sum_{i=0}^{N-1} f\left(iq + \frac{q}{2}\right) q \overline{\dot{x}^2}_{\left(i+\frac{1}{2}\right)q} \frac{(t_{3i} - t_{1i})^2 + (t_{3i} - t_{2i})^2}{2}, \qquad (3)$$

где $\overline{\dot{x}^2}_{\left(i+\frac{1}{2}\right)q}$ — условная дисперсия первой производной измеряемой величины.

Формула (3) учитывает две составляющие среднего квадрата ошибки цифрового измерения: шум квантования по уровню и погрешность

---

* Здесь и ниже используется классификация цифровых приборов, предложенная в [1].

из-за изменения измеряемой величины за время измерения. Средний квадрат второй составляющей погрешности существенным образом зависит от времени датирования результата измерения.

ОПТИМАЛЬНОЕ ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДАТИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Из (3) следует, что каждое слагаемое второй составляющей среднего квадрата погрешности минимально при

$$t_{3i}^{0} = \frac{t_{1i} + t_{2i}}{2}, \tag{4}$$

т. е. при датировании результата измерения $iq + \frac{q}{2}$ моментом времени, совпадающим с серединой интервала между моментами фиксации неравенств (1). При оптимальном индивидуальном датировании

$$\overline{\xi_{\Sigma}^{2}} = \frac{q^2}{12} + \sum_{i=0}^{N-1} f\left(iq + \frac{q}{2}\right) q \overline{\dot{x}^2}_{\left(i+\frac{1}{2}\right)q} \left(\frac{t_{2i} - t_{1i}}{2}\right)^2. \tag{5}$$

Заметим, что рассматриваемая ситуация имеет место при ациклическом развертывающем уравновешивании, если результат измерения датировать временем $i\tau + \frac{\tau}{2}$ (τ — длительность между двумя ближайшими операциями сравнения).

Очевидно, что такое же датирование можно осуществить и при циклическом развертывающем уравновешивании. Для приборов поразрядного уравновешивания индивидуальное датирование можно легко осуществить, исходя из временной схемы процесса уравновешивания. На рис. 2 для иллюстрации приведены значения t_{1i} для прибора, основанного на двоичном поразрядном уравновешивании, и числа разрядов, равного четырем.

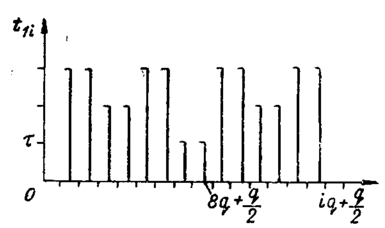

Рис. 2.

Следует отметить, что индивидуальное датирование результатов измерений не всегда удобно. Оно приводит к неравномерности следования отсчетов во времени, что может оказаться нежелательным при вводе результатов измерений в устройство обработки или управляющее устройство.

Определенным преимуществом в этом смысле обладает общее датирование результатов измерений. Однако этот способ приводит к увеличению второй составляющей среднего квадрата погрешности.

ОПТИМАЛЬНОЕ ОБЩЕЕ ДАТИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

При общем датировании время t_3, к которому относятся результаты измерений, одинаково для любого результата. Полагая t_{3i} в формуле (3) не зависящим от номера интервала дискретности, найдем значение общего времени датирования, минимизирующее (3),

$$t_3^0 = \frac{1}{\overline{\dot{x}^2}} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(iq + \frac{q}{2}\right) q\overline{\dot{x}^2}_{\left(i+\frac{1}{2}\right)q} \frac{t_{1i} + t_{2i}}{2} \tag{6}$$

и значение минимума суммарного среднего квадрата погрешности

$$\overline{\xi_\Sigma^2} = \frac{q^2}{12} + \sum_{i=0}^{N-1} f\left(iq + \frac{q}{2}\right) q\overline{\dot{x}^2}_{\left(i+\frac{1}{2}\right)q} \left(\frac{t_{2i} - t_{1i}}{2}\right)^2 +$$
$$+ \sum_{i=0}^{N-1} f\left(iq + \frac{q}{2}\right) q\overline{\dot{x}^2}_{\left(i+\frac{1}{2}\right)q} \left[\frac{t_{1i} + t_{2i}}{2} - \frac{1}{\overline{\dot{x}^2}} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(iq + \frac{q}{2}\right) q \times\right.$$
$$\left. \times \overline{\dot{x}^2}_{\left(i+\frac{1}{2}\right)q} \frac{t_{1i} + t_{2i}}{2}\right]^2, \tag{7}$$

учитывая, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} f\left(iq + \frac{q}{2}\right) q\overline{\dot{x}^2}_{\left(i+\frac{1}{2}\right)q} \cong \overline{\dot{x}^2}.$$

Сопоставление (5) и (7) показывает, что оптимальное общее датирование увеличивает вторую составляющую среднего квадрата погрешности по сравнению с оптимальным индивидуальным датированием. Третье слагаемое в (7) представляет собой дополнительные потери точности, обусловленные требованием равномерности следования отсчетов во времени.

Если результат измерения датируется общим временем t_3, отличным от оптимального t_3^0 на величину T, то средний квадрат погрешности возрастает по сравнению с (7) на величину

$$\Delta \overline{\xi_\Sigma^2} = \overline{\dot{x}^2}\, T^2, \tag{8}$$

где $T = t_3 - t_3^0$, а t_3^0 определяется соотношением (6).

МИНИМИЗАЦИЯ СРЕДНЕГО КВАДРАТА ОШИБКИ ВЫБОРОМ ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТНОСТИ

Структура формулы (3) такова, что с увеличением числа интервалов дискретности при неизменном диапазоне первая составляющая среднего квадрата погрешности уменьшается. В то же время вторая составляющая среднего квадрата погрешности при постоянном интервале τ между двумя ближайшими операциями сравнения в зависимости от способа датирования и способа уравновешивания либо остается постоянной, либо возрастает. В последнем случае ввиду противоречивых тенденций изменения составляющих среднего квадрата ошибки возможно существование такого интервала дискретности q_0, при котором величина $\overline{\xi_\Sigma^2}$ минимальна. Этот минимум в определенном смысле аналогичен рассмотренному в [2].

Для нахождения оптимального значения интервала дискретности необходимо конкретизировать зависимости t_{1i}, t_{2i} и t_3^0, от интервала дискретности, т. е. рассматривать конкретные способы уравновешивания.

В заключение рассмотрим примеры, иллюстрирующие полученные выше расчетные соотношения.

Двоичное поразрядное уравновешивание. При двоичном поразрядном уравновешивании последовательно осуществляется n операций сравнения (n — число двоичных разрядов), отстоящих во времени на интервал τ. Время t_{2i} при этом постоянно и совпадает с моментом проведения последней операции сравнения $t=n\tau$. Время t_{1i} зависит от результата измерения следующим образом: для интервалов дискретности, прилегающих к середине шкалы, оно совпадает с моментом проведения первой операции сравнения; для интервалов, прилегающих к $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ шкалы, оно совпадает с моментом проведения второй операции сравнения и т. д. (см. рис. 2).

Таким образом, для интервалов дискретности, середины которых совпадают с точками $\left(\frac{3}{2}+4m\right)q$ и $\left(\frac{5}{2}+4m\right)q$ $(m=0,\ldots,2^{n-2}-1)$, $t_{2i}-t_{1i}=\tau$; для интервалов дискретности, середины которых совпадают с точками $\left(\frac{7}{2}+8m\right)q$ и $\left(\frac{9}{2}+8m\right)q$ $(m=0,\ldots,2^{n-3}-1)$ $t_{2i}-t_{1i}=2\tau$ и т. д. Тогда

$$\overline{\xi_\Sigma^2}=\frac{q^2}{12}+\frac{\tau^2}{4}\sum_{k=1}^{n-1}[k^2-(k-1)^2]\left[\sum_{m=0}^{2^{n-k}-2}q f(\beta q)\overline{\dot{x}^2_{\beta q}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{2^{n-k}-2}q f(\beta q+q)\,\overline{\dot{x}^2}_{(\beta+1)q}\right], \tag{9}$$

где

$$\beta=\frac{2^{k+1}-1}{2}+2^k m.$$

Если умножить внутренние суммы в (9) на $2k$, то окажется, что они будут представлять собой интеграл $\int f(x)\overline{\dot{x}^2_x}\,dx=\overline{\dot{x}^2}$, вычисленный по правилу трапеций с шагом $2^k q$.

При достаточно большом числе разрядов n эти суммы могут быть заменены упомянутым интегралом, и формула для суммарного среднего квадрата погрешности для оптимального индивидуального датирования примет вид

$$\overline{\xi_\Sigma^2}=\frac{q^2}{12}+\frac{\tau^2\overline{\dot{x}^2}}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2^{k-1}}=\frac{q^2}{12}+\frac{\tau^2\overline{\dot{x}^2}}{4}\left[6-(8n+4)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]. \tag{10}$$

Точность формулы (10) зависит от гладкости функции $f(x)\overline{\dot{x}^2_x}$ и числа разрядов n.

Для оптимального времени общего датирования (6) по аналогии с (10) можно записать следующее выражение:

$$t_3^0 = \tau\left[n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]. \qquad (11)$$

Из (11) вытекает, что при большом n и общем оптимальном датировании результат измерения следует датировать временем $t_3^0 \cong \tau\,(n-1)$, т. е. моментом проведения предпоследней операции сравнения.

Выражение для суммарного среднего квадрата погрешности при оптимальном общем датировании приводится к виду

$$\overline{\xi_\Sigma^2} = \frac{q^2}{12} + \frac{\tau^2\overline{\dot{x}^2}}{2}\left[\left(6 - (8n+4)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2\right]. \qquad (12)$$

Сопоставление (10) и (12) показывает, что при больших n переход от оптимального индивидуального датирования к оптимальному общему датированию приводит к увеличению среднего квадрата второй составляющей погрешности примерно в 1,3 раза.

Общее датирование результатов измерений моментом проведения последней операции сравнения, которое обычно осуществляется на практике, при больших n увеличивает средний квадрат второй составляющей погрешности по сравнению с оптимальным общим датированием в соответствии с (8) и (12) примерно в 1,5 раза.

Из анализа формулы (12) следует, что оптимальное значение интервала дискретности q_0 (при фиксированном диапазоне прибора, длительности τ и дисперсии первой производной $\overline{\dot{x}^2}$) лежит в области таких значений, когда условие (1П) (см. приложение) нарушается.

Развертывающее уравновешивание. При развертывающем уравновешивании $t_{1i} = i\tau$, $t_{2i} = (i+1)\tau$ и, следовательно, формулу (5) можно записать следующим образом:

$$\overline{\xi_\Sigma^2} = \frac{q^2}{12} + \frac{\tau^2\overline{\dot{x}^2}}{4}. \qquad (13)$$

Подставляя далее в формулу (6) значения t_{1i} и t_{2i} и заменяя при достаточно большом N сумму интегралом, получим формулу для оптимального времени общего датирования

$$t_3^0 = \tau\,\frac{m}{q} + \tau\,\frac{\overline{\dot{x}^2\,\overset{\circ}{x}}}{\overline{\dot{x}^2}\,q}, \qquad (14)$$

где m — математическое ожидание измеряемой величины;

$\overline{\dot{x}^2\,\overset{\circ}{x}}$ — математическое ожидание произведения квадрата производной и центрированной измеряемой величины.

Для четных (относительно математического ожидания измеряемой величины) распределений $f(x)$ второе слагаемое в формуле (14) обращается в нуль. В этом случае оптимальное время общего датирования пропорционально математическому ожиданию измеряемой величины.

Для суммарного среднего квадрата погрешности при оптимальном общем датировании по аналогии с предыдущим можно записать

$$\overline{\xi_\Sigma^2} = \frac{q^2}{12} + \frac{\tau^2 \overline{\dot{x}^2}}{4} + \frac{\tau^2 a}{q^2}, \tag{15}$$

где

$$a = \overline{\dot{x}^2 \, \mathring{x}^2} - \frac{1}{\overline{\dot{x}^2}} \left(\overline{\dot{x}^2 \, \mathring{x}}\right)^2;$$

$\overline{\dot{x}^2 \, \mathring{x}^2}$ — математическое ожидание произведения квадратов производной и центрированной измеряемой величины.

Для четных распределений второе слагаемое в выражении для a обращается в нуль.

Используя (15), можно легко определить оптимальный интервал дискретности

$$q_0 = [12 \tau^2 a]^{\frac{1}{4}} \tag{16}$$

и соответствующее ему значение суммарного среднего квадрата погрешности

$$\overline{\xi_\Sigma^2} = 2 \frac{q_0^2}{12} + \frac{\tau^2 \overline{\dot{x}^2}}{4} = \frac{\tau^2 \overline{\dot{x}^2}}{4} + \left[\frac{1}{3} \tau^2 a\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

При этом оказывается, что оптимальное значение q_0 соответствует условию равенства между собой зависящих от q средних квадратов обеих составляющих погрешности.

Основываясь на полученных расчетных соотношениях, можно дать ряд рекомендаций по выбору времени датирования, а также числа интервалов дискретности при фиксированных свойствах измеряемой величины.

Приложение

При вычислении среднего квадрата погрешности цифрового измерения с учетом изменения измеряемой величины за время измерения будем исходить из предположения о том, что это изменение соизмеримо с интервалом дискретности q. Это предположение представляется разумным, так как соответствует случаю правильного согласования быстродействия прибора с динамикой измеряемой величины. Кроме того, будем рассматривать приборы с достаточно большим числом делений, т. е. приборы, удовлетворяющие условию $q \ll \sigma$, где σ — среднеквадратичное отклонение измеряемой величины. Полагая далее измеряемую величину стационарной и дифференцируемой в среднеквадратичном, предположение о малости изменения измеряемой величины за время измерения можно записать в виде

$$P\left(|(t_{2i} - t_{1i})\, \dot{x}| > q\right) \cong 0, \tag{1П}$$

где $\dot{x}$ — первая производная измеряемой величины.

Выберем момент времени t_{3i}, которым будем датировать результат измерения, если последний совпадает со значением $\left(i + \frac{1}{2}\right) q$, и разложим измеряемую величину в точке t_{3i} в ряд Тейлора, ограничившись двумя членами разложения:

$$x(t - t_{3i}) \cong x + (t - t_{3i})\,\dot{x}. \qquad (2П)$$

Не теряя общности, положим, что первое из неравенств (1) зафиксировано в момент t_{1i}, а второе в момент t_{2i}, где $t_{2i} \geqslant t_{1i}$. Тогда неравенства (1) могут быть записаны следующим образом:

$$iq < x + (t_{1i} - t_{3i})\,\dot{x}; \quad x + (t_{2i} - t_{3i})\,\dot{x} < iq + q. \qquad (3П)$$

Для вычисления среднего квадрата погрешности необходимо величину $\left(x - iq - \frac{q}{2}\right)^2$ осреднить по области значений x и $\dot{x}$, ограниченной неравенствами (3П), и по шкале прибора. Следовательно,

$$\overline{\xi_\Sigma^2} = \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{-\infty}^{\frac{q}{t_{2i} - t_{1i}}} \varphi(\dot{x}/x)\, d\dot{x} \int\limits_{iq - (t_{1i} - t_{3i})\dot{x}}^{iq + q - (t_{2i} - t_{3i})\dot{x}} f(x) \left(x - iq - \frac{q}{2}\right)^2 dx, \qquad (4П)$$

где $\varphi(\dot{x}/x)$ — условная плотность вероятности производной.

Условия малости интервала дискретности и изменения измеряемой величины дают основание полагать плотность вероятности измеряемой величины $f(x)$ равномерной в зоне интегрирования, а плотность вероятности $\varphi(\dot{x}/x)$ практически одинаковой в этой зоне, т. е. считать, что $f(x) \cong f\left(iq + \frac{q}{2}\right)$ и $\varphi(\dot{x}/x) \cong \varphi\left(\dot{x}/iq + \frac{q}{2}\right)$. Используя эти соображения и вычисляя внутренний интеграл в формуле (4П), последнюю можно привести к виду

$$\overline{\xi_\Sigma^2} = \sum_{i=0}^{N-1} f\left(iq + \frac{q}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{\frac{q}{t_{2i} - t_{1i}}} \varphi\left(\dot{x}/iq + \frac{q}{2}\right) \left\{\frac{q^3}{12} - \frac{q^2}{4}(t_{2i} - t_{1i})\,\dot{x} + \right.$$
$$+ \frac{q}{2}\left[(t_{3i} - t_{1i})^2 + (t_{3i} - t_{2i})^2\right]\dot{x}^2 + \frac{1}{3} \times$$
$$\left. \times \left[(t_{1i} - t_{3i})^3 - (t_{2i} - t_{3i})^3\right]\dot{x}^3\right\} d\dot{x}. \qquad (5П)$$

Учитывая (1П), верхний предел у интеграла в (5П) можно заменить на ∞. Для стационарного процесса условная плотность вероятности производной является четной функцией аргумента. Поэтому интегралы от слагаемых в (5П), содержащих нечетные степени $\dot{x}$, обратятся в нуль. Тогда, учитывая условие $q \ll \sigma$ и заменяя на его основании внешнюю сумму от слагаемого $\frac{q^3}{12}$ интегралом, окончательно получим

$$\overline{\xi_\Sigma^2} = \frac{q^2}{12} + \sum_{i=0}^{N-1} f\left(iq + \frac{q}{2}\right) q\, \overline{\dot{x}^2_{\left(i + \frac{1}{2}\right)q}}\, \frac{(t_{3i} - t_{1i})^2 + (t_{3i} - t_{2i})^2}{2}, \qquad (6П)$$

где $\overline{\dot{x}^2_{\left(i + \frac{1}{2}\right)q}} = \int \varphi\left(\dot{x}/iq + \frac{q}{2}\right)\dot{x}^2\, d\dot{x}$ — условная дисперсия первой производной измеряемой величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Цапенко. О классификации цифровых измерительных приборов.— Измерительная техника, 1961, № 5.
2. Я. А. Купершмидт. Оптимальный выбор частоты отсчетов при цифровых измерениях.— Измерительная техника, 1962, № 10.

Поступила в редакцию
20 октября 1966 г.

V. M. Efimov, V. I. Rabinovich

ON DIGITAL DEVICE ERROR DUE TO MEASURED QUANTITY VARIATION IN THE COURSE OF MEASUREMENT TIME

To estimate the mean-root-square error of digital measurement the design formulae are deduced with allowance for next error components: the signal level quantization error and the error due to measured quantity variation in the course of measurement time. On the basis of analysis of deduced formulae the recommendations on timing the measurements are given as well as correlation of quantization step with dynamic characteristics of measured quantity is under study.