АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1966

ЭЛЕКТРОИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

УДК 621.317.727.1

Б. В. КАРПЮК, В. В. МАЛИНИН
(Новосибирск)

О ВЫБОРЕ ДОПУСКОВ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Описывается один из возможных способов выбора допусков на погрешность параметров сопротивлений параллельных делителей, исходящий из условия заданной точности коэффициента деления и экономичности делителя.

Выход прибора из класса точности в измерительной технике считается отказом. В связи с этим возникает необходимость определения таких допусков на параметры элементов прибора, которые гарантировали бы его безотказность.

В настоящей статье рассматривается один из возможных способов решения задачи назначения допусков сопротивлений параллельных делителей [1, 2], которые широко применяются в цифровой измерительной технике.

Решение рассматриваемой задачи заключается в нахождении однозначной зависимости между погрешностями δ_i параметров сопротивлений и погрешностью δ коэффициента деления. Для определения такой зависимости удобно воспользоваться математическим аппаратом определения условных экстремумов. При этом наша задача формулируется следующим образом: определить допуски на параметры сопротивлений, удовлетворяющие одновременно условию заданной точности коэффициента деления и некоторому дополнительному условию, в качестве которого можно принять минимум суммарной стоимости сопротивлений делителя.

Если под точностью понимать вероятность того, что погрешность параметра не превысит заданной, то, предполагая нормальный закон распределения δ и δ_i и взаимную независимость погрешностей δ_i, условие заданной точности коэффициента деления можно представить в следующем виде [3, 4]:

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{N} b_i^2 \sigma_i^2 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

где $\sigma = \frac{\delta}{h}$ и $\sigma_i = \frac{\delta_i}{h_i}$ — стандартные отклонения;

δ и δ_i — относительные отклонения;

h и h_i — пределы интегрирования в табулированной функции Лапласа;

N — количество сопротивлений;

b_i — чувствительность коэффициента деления к отклонению параметра i-го сопротивления.

Функцию стоимости сопротивлений представим как сумму

$$S = \sum_{i=0}^{N} f_i(\delta_i), \tag{2}$$

где $f_i(\delta_i)$ — зависимость стоимости сопротивления от его погрешности, которая в конкретных случаях может принимать различные формы. Например, в [5] предлагается рассматривать эту зависимость приближенно в виде гиперболической функции

$$f_i(\delta_i) = \frac{d_i}{\delta_i - u_i} + t_i, \tag{3}$$

где d_i, u_i и t_i — постоянные.

В настоящей работе мы будем рассматривать линейную зависимость так, как это делается в [6]. При этом

$$S = \sum_i c_i + \sum k_i \delta_i, \tag{4}$$

где c_i, k_i — постоянные; $k_i < 0$.

Чтобы найти минимум функции S при условии (1), составим вспомогательную функцию [7, стр. 84]:

$$\Phi = \sum_i k_i \delta_i + \lambda \sum_i \frac{b_i^2}{h_i^2} \delta_i^2, \tag{5}$$

где λ — множитель Лагранжа.

Приравнивая нулю частные производные $\partial \Phi / \partial \delta_i$, получим N уравнений

$$k_i + 2\lambda \frac{b_i^2}{h_i^2} \delta_i = 0, \tag{6}$$

из которых находим, что

$$\delta_i = - \frac{k_i h_i^2}{2\lambda b_i^2}. \tag{7}$$

После подстановки (7) в (1) получим

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma} \sqrt{\sum_i \left(\frac{k_i h_i}{b_i} \right)^2}. \tag{8}$$

Искомое соотношение найдем после подстановки (8) в (7):

$$\delta_i = -\frac{k_i h_i^2}{b_i^2} \frac{\delta}{h L}, \tag{9}$$

где

$$L = \sqrt{\sum_i \left(\frac{k_i h_i}{b_i}\right)^2};$$

h и h_i определяются из таблиц* (например, [8, стр. 159]) по заданным значениям точности коэффициента деления (p) и точности сопротивлений (p_i) [9, стр. 135].

После расчета по формуле (9) может возникнуть необходимость в коррекции полученных допусков, так как в (9) не введены ограничения, учитывающие практически выполнимые значения δ_i. Подобные ограничения в какой-то мере учитываются при решении рассматриваемой задачи методами линейного программирования [3, 6], но и в этом случае требуется коррекция полученных результатов. Допуски, найденные согласно (9), обеспечивают заданную точность коэффициента деления только в момент первого включения делителя в работу, так как с течением времени параметры сопротивлений изменяются. Если известно, что с заданной вероятностью относительное приращение коэффициента деления в продолжение заданного времени не превышает $\Delta\delta$, то можно найти допуски, обеспечивающие заданную надежность (точность в течение заданного периода времени). Для этого в (9) нужно подставлять вместо δ значения $\delta_н = \delta - \Delta\delta$.

Среди исходных данных, входящих в (9), особого внимания заслуживают коэффициенты b_i. Обычно в качестве b_i рассматривают приведенные коэффициенты Тейлора линейной части разложения функции передачи в ряд. При этом предполагают, что отклонения параметров элементов достаточно малы и независимы. Дадим оценку малости отклонений на примере одноразрядного делителя разновидности *a* (см. рисунок), для чего определим изменение расчетной погрешности коэффициента деления, учитывая не один, а два члена ряда Тейлора.

В частном случае коэффициент деления равен:

$$K = \frac{g_4}{\sum_{i=0}^{4} g_i}, \tag{10}$$

где $g_i = \dfrac{1}{r_i}$.

Допустим, что все сопротивления выполнены с одинаковым двусторонним допуском δ_z. Тогда, согласно [10, стр. 264], приближенное (δ') и уточненное (δ'') значения максимально возможной погрешности коэффициента деления найдем из следующих уравнений:

$$\delta' = \delta_z \sum_i |b_i'|; \qquad \delta'' = \delta_z \sum_i |b_i'| + \delta_z^2 \sum_i |b_i''|, \tag{11}$$

* При пользовании таблицами следует заданное значение p или p_i делить на два.

где

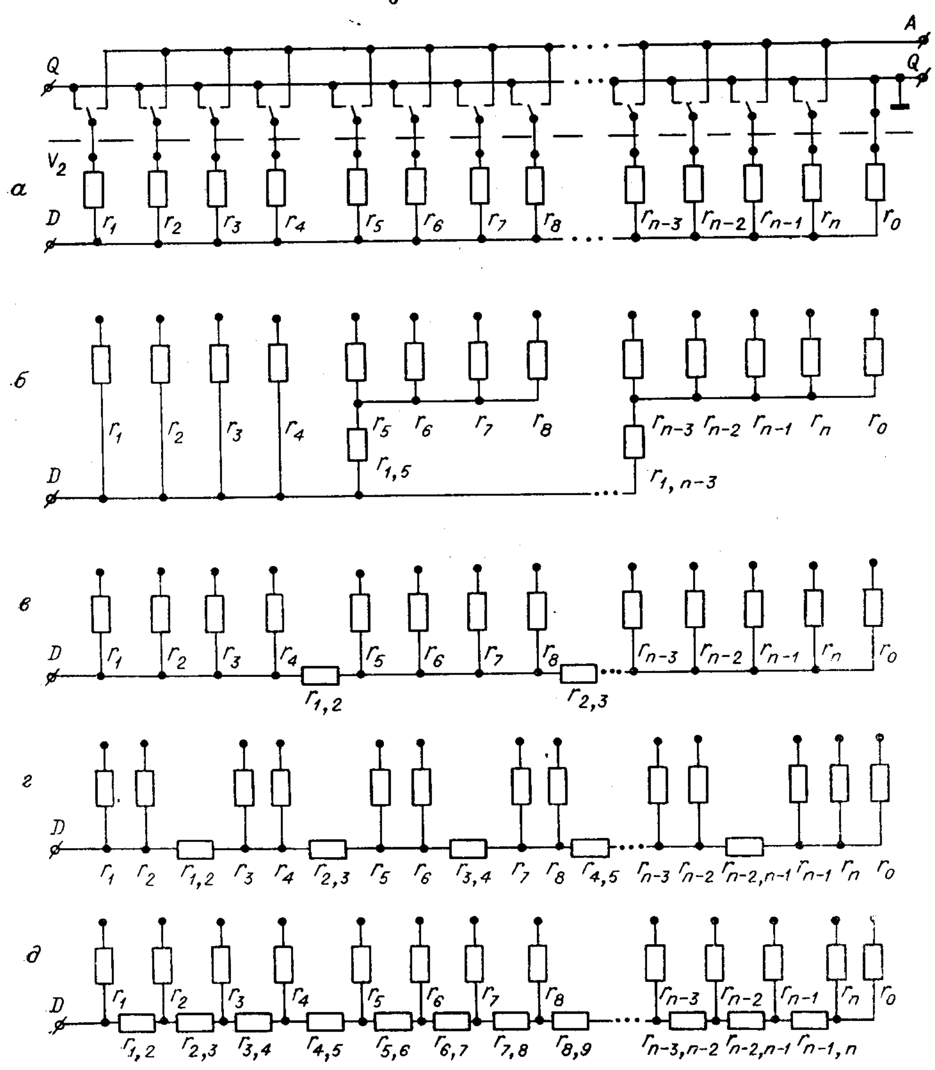
$$\sum_i |b_i'| = \frac{g_1}{\sum_i g_i} + \frac{g_2}{\sum_i g_i} + \frac{g_3}{\sum_i g_i} + \left| \frac{g_4}{\sum_i g_i} - 1 \right| + \frac{g_0}{\sum_i g_i};$$

$$\sum_i |b_i''| = \left| \frac{-g_1}{2\sum_i g_i} \right| + \left| \frac{-g_2}{2\sum_i g_i} \right| + \left| \frac{-g_3}{2\sum_i g_i} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{g_4}{\sum_i g_i}\right) + \left| \frac{-g_0}{2\sum_i g_i} \right|.$$

Относительное изменение расчетного значения δ при уточнении будет равно

$$\frac{\delta'' - \delta'}{\delta'} = 0{,}5\,\delta_z. \tag{12}$$



Из (12) следует, что при больших погрешностях δ_i пользоваться коэффициентами $b_i = b_i'$ нельзя. Нахождению коэффициентов b_i, пригодных для расчета δ при больших δ_i, посвящены работы [11, 12].

Поскольку параллельные делители нашли применение в точных приборах, где δ_i малы, в дальнейшем будем считать $b_i = b_i'$ и, согласно [9], найдем:

$$b_i = \frac{r_i}{K}\frac{\partial K}{\partial r_i}, \text{ или } b_i = r_i \frac{\partial \ln K}{\partial r_i}. \quad (13)$$

Поскольку коэффициент деления рассматриваемых делителей дискретно изменяется в зависимости от измеряемого сигнала, то изменяется структура (позиция) делителя, чувствительность коэффициента деления к отклонениям параметров сопротивлений (чувствительность позиции) и значения b_i. В таблице приведены результаты расчета коэффициентов b_{ji} для одноразрядных делителей нескольких разновидностей, использующих код 4221. Возникает вопрос, какие значения b_i подставлять в (9). Можно предложить два ответа.

Во-первых, погрешность коэффициента деления не превысит заданной величины в любой позиции, если в (9) подставлять максимальные абсолютные значения, принимаемые коэффициентами b_i, т. е. $b_i = |b_{ji}|_{\max}$ [3, 13]. Здесь j — позиция делителя. Например, для одноразрядного делителя разновидности a $b_1 = b_{41}$; $b_2 = b_{22}$; $b_3 = b_{13}$; $b_4 = b_{14}$; $b_0 = b_{10}$. Вообще $|b_{ji}|_{\max}$ встречаются только в позициях, где к шине A подключено не более одного сопротивления.

Во-вторых, в (9) можно подставлять значения b, соответствующие наиболее чувствительной позиции. Если в качестве критерия чувствительности позиции использовать величину $B_j = \sum_i |b_{ji}|$, то самой чувствительной является позиция, для которой $B_j = B_{j\max}$. Выявим такую позицию.

Для j-й позиции делителя разновидности a

$$K_j = \frac{\sum_i \alpha_i g_i}{\sum_i g_i}, \quad (14)$$

где $\alpha_i = 1$, если i-е сопротивление подключено к шине A; $\alpha_i = 0$, если оно подключено к шине Q.

Коэффициенты влияния для сопротивлений, подключенных к шинам A и Q, соответственно равны:

$$b_{ji\,A} = \frac{g_{i\,A}}{\sum_i \alpha_i g_i}(K - 1) \text{ и } b_{ji\,Q} = \frac{g_{i\,Q}}{\sum_i g_i}. \quad (15)$$

Поскольку $b_{ji\,A}$ всегда отрицательны, а $b_{ji\,Q}$ положительны, то

$$B_{j\max} = \sum_i |b_{ji\,A}|_{\max} + \sum_i b_{ji\,Q\max}. \quad (16)$$

l	K_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_0	$b_{1,2}$	$b_{2,3}$	$b_{3,4}$	$\Sigma \mid b_l \mid$	$\Sigma \mid b_i \mid max$
а б в	0,1	0,4	0,2	0,2	−0,9	0,1				1,8	2,6
	0,2	0,4	−0,8	0,2	0,1	0,1				1,6	
	0,3	0,4	−0,4(6)	0,2	−0,2(3)	0,1				1,4	
	0,4	−0,6	0,2	0,2	0,1	0,1				1,2	
	0,5	−0,4	0,2	0,2	−0,1	0,1				1,0	
	0,6	−0,2(6)	−0,1(3)	0,2	0,1	0,1				0,8	
	0,7	−0,171428	−0,085714	0,2	−0,042851	0,1				0,6	
	0,8	−0,1	−0,05	−0,05	0,1	0,1				0,4	
	0,9	−0,0(4)	−0,0(2)	−0,0(2)	−0,0(1)	0,1				0,2	
г	0,1	0,4	0,2	0,35	−0,825	0,175	−0,3			2,25	3,05
	0,2	0,4	−0,8	0,1	0,05	0,05	0,2			1,6	
	0,3	0,4	−0,4(6)	0,1825(3)	−0,233(6)	0,091(6)	0,0(3)			1,400(6)	
	0,4	−0,6	0,2	0,1	0,05	0,05	0,2			1,2	
	0,5	−0,4	0,2	0,15	−0,125	0,075	0,1			1,05	
	0,6	−0,2(6)	−0,1(3)	0,1	0,05	0,05	0,2			0,8	
	0,7	−0,171428	−0,085714	0,135714	−0,075	0,067857	0,128571			0,664284	
	0,8	−0,1	−0,05	−0,0875	0,08125	0,08125	0,075			0,475	
	0,9	−0,0(4)	−0,0(2)	−0,03(8)	−0,019(4)	0,091(6)	0,0(3)			0,25	
д	0,1	0,4	0,24	0,314286	−0,74	0,26	−0,12	−0,148571	−0,205714	2,42856	3,208571
	0,2	0,4	−0,76	0,171429	0,06	0,06	−0,12	0,137143	0,051429	1,76	
	0,3	0,4	−0,42(6)	0,102857	−0,20(6)	0,106101	−0,12036	0,053877	0,090857	1,507384	
	0,4	−0,6	0,14	0,1	0,035	0,035	0,18	0,08	0,03	1,2	
	0,5	−0,4	0,16	0,142943	−0,12	0,08	0,12	0,0342	−0,017143	1,074286	
	0,6	−0,2(6)	−0,16	0,12381	0,04(3)	0,04(3)	0,08	0,099047	0,037143	0,85(3)	
	0,7	−0,171428	−0,102857	0,147565	−0,068571	0,074286)	0,049577	0,068979	0,002449	0,685712	
	0,8	−0,1	−0,06	−0,078571	0,06	0,06	0,03	0,037143	0,051428	0,477142	
	0,9	−0,0(4)	−0,02(6)	−0,034921	−0,02(8)	0,08(2)	0,01(3)	0,016508	0,022857	0,26984	

Величина

$$\sum_i |b_{ji\,A}| = \frac{\sum_i \alpha_i g_i}{\sum_i \alpha_i g_i} |K_j - 1| \qquad (17)$$

будет максимальной, если $K_j \to \min$. Это условие выполняется тогда, когда к шине A подключено только одно сопротивление с наименьшим весовым коэффициентом. Вторая составляющая суммы (16)

$$\sum_i b_{ji\,Q} = \frac{\sum_i g_i - \sum_i \alpha_i g_i}{\sum_i g_i} = 1 - K_j \qquad (18)$$

также будет максимальной в том случае, если к шине A будет подключено сопротивление с наименьшим весовым коэффициентом. Следовательно, наиболее чувствительной является позиция, соответствующая единице младшего разряда.

Попутно, сравнивая (17) и (18), отметим тот факт, что

$$\sum_i b_{ji\,A} + \sum_i b_{ji\,Q} = 0. \qquad (19)$$

Из таблицы видно, что тенденция изменения чувствительности позиции остается постоянной при переходе от делителя разновидности *а* к другим разновидностям. Кроме того, чувствительность делителя возрастает при переходе от разновидности *а* к разновидности *б* и т. д. Например, значения $B_{j\,\max}$ для трехразрядных делителей разновидностей *а*, *б* и *в* соответственно будут следующими: $B_а = 1{,}997$; $B_б = 3{,}981$; $B_в = 5{,}167$.

Коэффициенты b_{ji} для делителей сложных разновидностей можно определять способом, предложенным М. Л. Быховским [14]. Расчет коэффициентов b_{ji} и некоторых вероятностных характеристик для делителей разновидности *д* приводится в работах [15, 16].

Если в (9) подставлять значения b_i, соответствующие наиболее чувствительной позиции, то требования к допускам на параметры сопротивлений снижаются по сравнению с первым решением вопроса. Однако в таком случае могут создаться ситуации, когда в некоторых позициях погрешность коэффициента деления превысит заданную. Поэтому нужно проверить пригодность выбранных значений b_i в тех позициях, где к шине A подключено не более одного сопротивления.

Следует еще заметить, что погрешность коэффициента деления уменьшится, если использовать сопротивления с односторонними допусками. В самом деле, если знаки погрешностей сопротивлений носят случайный характер, то мы не имеем права выбирать какой-то определенный знак для $b_i \delta_i$. Поэтому для «надежности» нередко выбирается худший случай, когда $\delta = \sum_i |b_i \delta_i|$. Действительно, при таком расчете нерезервированное устройство имеет бо́льшую надежность, чем произведение надежностей его компонент [17]. Но в этом случае не учитывается реальная обстановка, так как наихудший случай маловероятен, и завышаются требования к допускам. Если же допуски будут односторонними, то имеем право записать

$$\delta = \left|\sum_i b_i \delta_i\right| < \sum_i \left|b_i \delta_i\right|. \qquad (20)$$

В производственной практике можно все сопротивления подразделить на две группы по знаку погрешности и приборы комплектовать сопротивлениями только из одной группы.

ВЫВОД

Способ, приведенный в настоящей статье, позволяет просто и сравнительно строго подходить к вопросу о назначении допусков на параметры сопротивлений параллельных делителей. Кроме того, очевидно, что в принципе таким же способом можно рассчитывать допуски на параметры элементов любых линейных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Нетребенко. Цифровые автоматические компенсаторы. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
2. Notes on Analog-Digital Conversion Techniques. Ed. by A. K. Susskind. Massachusetts Institute of Technology, 1957.
3. Z. Fialovszky. Optyczne tolerancie wykonawcze.— Pomiary. Automatyka. Kontrola, 1965, zesz. 3.
4. S. Klapp. Empirical Parameter Variation Analysis for Electronic Circuits.— IEEE Trans. on Reliability, 1964, № 1.
5. E. Wolniewicz. Ermittlunq optimaler Toleranzen in Massreichen. Acta IMEKO, 1. Budapest, 1964.
6. С. С. Брудник, И. Ф. Кусов, В. А. Таран. Машинный метод оптимизации допусков на параметры устройств.— Приборостроение, 1965, № 4.
7. Математический анализ. Дифференцирование и интегрирование.— СМБ. М., Физматгиз, 1961.
8. Н. В. Смирнов, Л. Н. Большев. Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения. М., Изд-во АН СССР, 1962.
9. Расчет электрических допусков радиоэлектронной аппаратуры. Под ред. В. П. Гусева и А. В. Фомина. М., изд-во «Советское радио», 1963.
10. Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. 1. М., изд-во «Наука», 1964.
11. В. И. Пампуро. Теоремы приращений функций при вариации аргументов.— В кн. «Математическое моделирование и теория электрических цепей». Под ред. Г. Е. Пухова. Киев, изд-во «Наукова думка», 1965.
12. В. И. Пампуро. Функциональный анализ погрешности приборов при больших приращениях параметров элементов.— Автометрия, 1966, № 5.
13. Чувствительность в некоторых простых активных RC-схемах.— Экспресс-информация, ПЭА, 1965, № 34.
14. М. Л. Быховский. Основы динамической точности электрических и механических цепей. М., Изд-во АН СССР, 1958.
15. Р. А. Мирный, О. Ф. Радуцкий. Статистический анализ допустимой точности элементов цифро-аналогового преобразователя.— Автоматический контроль и методы электрических измерений (Труды VI конференции, 1964 г.), т. 1. Новосибирск, Сибирское отделение изд-ва «Наука», 1966.
16. С. С. Петров. Матричный метод анализа точности электрических цепей по заданным первичным погрешностям.— Автоматика и вычислительная техника, вып. 9. Рига, «Зинатне», 1965.
17. C. A. Combs. On the Reliability of a Warst Case Designed Nonredundant Circuit.— IEEE Trans. on Reliability, 1963, № 4.

Поступила в редакцию
20 апреля 1966 г.