АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1966

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

УДК 681.2.088

А. Н. КАСПЕРОВИЧ, И. Я. КОРЧАГИН
(Новосибирск)

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПОГРЕШНОСТИ КВАНТОВАНИЯ ПО УРОВНЮ СУММЫ ПОСТОЯННОГО СИГНАЛА И НОРМАЛЬНОГО ШУМА С МАЛОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Найдены выражения для основных статистических характеристик погрешности квантования по уровню процесса, являющегося суммой постоянного сигнала и стационарного случайного нормального процесса с относительно малой дисперсией и нулевым математическим ожиданием, в зависимости от значения постоянного сигнала.

Как известно, при проведении осреднения результатов цифровых измерений постоянных напряжений погрешность осредненного результата не может быть получена меньше погрешности квантования одиночных измерений. Подобная ситуация имеет место в некоторых случаях и при осреднении результатов измерений периодических напряжений.

Для того чтобы повысить точность осреднения, можно наложить на измеряемое (постоянное или периодическое) напряжение определенный, например, нормальный шум. Для разумного выбора параметров шума необходимо знать, как будут зависеть характеристики погрешности квантования от этого шума в каждой точке шкалы.

Анализу статистических характеристик погрешности квантования по уровню посвящен ряд работ, например [1—4]. В большинстве из них рассмотрение проводится либо для больших (по сравнению с квадратом кванта) дисперсий входного шума, либо для точек шкалы, кратных кванту.

В настоящей статье отыскиваются выражения для основных статистических характеристик погрешности квантования по уровню — автокорреляционной функции, интервала корреляции, дисперсии погрешности квантования, а также взаимно корреляционной функции этой погрешности и квантуемого процесса, являющегося суммой постоянного сигнала и стационарного случайного нормального процесса с относительно малой дисперсией и нулевым математическим ожиданием, в зависимости от значения постоянного сигнала. Уточняются и определяются границы применимости некоторых известных формул статистических характеристик погрешности квантования.

Решение подобной задачи, с одной стороны, позволит наиболее полно учесть влияние на погрешность измерения внутреннего нормального шума, а с другой стороны, выбрать оптимальные характеристики (дисперсию и спектр) дополнительного шума, накладываемого на входной сигнал при осреднении.

Пусть на вход идеального квантователя, характеристика которого приведена в [1], подается сумма постоянного сигнала $U_0 = lq + \alpha q$ (l — целое число квантов, укладывающихся в U_0; $0 < \alpha < 1$) и стационарного нормального шума $U_ш(t)$ с характеристиками: математическое ожидание равно нулю, дисперсия $D_ш$, корреляционная функция $R_ш(\tau)$, нормированная корреляционная функция $r_ш(\tau)$. При анализе пренебрегаем краевым эффектом, т. е. считаем шкалу прибора бесконечной в обе стороны.

В результате квантования суммы постоянного сигнала и нормального шума на выходе квантователя с вероятностью $P_к$ получаются значения kq, где $P_к$ — вероятность того, что значения суммы приходятся на k-й квант (k — любое целое число).

Очевидно, для математического ожидания результаты квантования можно записать

$$m_{вых} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_к k q = q \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_к k.$$

Тогда математическое ожидание погрешности квантования по уровню, учитывая, что $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} P_к = 1$, можно представить:

$$M(\Delta_{кв}) = q \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_к k - M(U_ш - U_0) = q\left[\sum_{N=-\infty}^{\infty} P_{N+l} N - \alpha\right], \quad (1)$$

где M — символ математического ожидания;

$$P_{N+l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_ш}} \int\limits_{q(N+l)-0,5q}^{q(N+l)+0,5q} e^{-\frac{(x-U_0)^2}{2D_ш}} dx. \quad (2)$$

Вычисляя интеграл (2) и подставляя полученное выражение в (1), найдем

$$M(\Delta_{кв}) = q\left\{\sum_{N=-\infty}^{\infty} N\left[\Phi\left(\frac{N+0,5-\alpha}{\gamma}\right) - \Phi\left(\frac{N-0,5-\alpha}{\gamma}\right)\right] - \alpha\right\}, \quad (3)$$

где

$$\Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^U e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \quad \gamma = \frac{\sqrt{D_ш}}{q}.$$

Ряд (3) быстро сходится при малых γ. Так, при $\gamma < 0,3$ с точностью до третьего знака достаточно пользоваться лишь тремя членами этого ряда (при $N = \pm 1$ и $N = 0$):

$$M(\Delta_{кв}) = q\left[1 - \alpha - \Phi\left(\frac{0,5+\alpha}{\gamma}\right) - \Phi\left(\frac{0,5-\alpha}{\gamma}\right)\right]. \quad (4)$$

Это выражение особенно удобно для использования при малых значениях дисперсии шума, например, при анализе влияния на точность приборов их инструментальных шумов.

В [4] приводится другой вариант общего выражения для $M(\Delta_{кв})$ в виде ряда синусов (8.4.15), отличительной особенностью которого является лучшая сходимость при больших γ. Там же указывается, что при $\gamma > 0{,}5$ можно пользоваться лишь первым членом этого ряда

$$M(\Delta_{кв}) = \frac{q}{\pi} e^{-2\pi^2\gamma^2} \sin 2\pi\alpha. \tag{5}$$

Однако нетрудно показать, что с приемлемой для практики погрешностью (меньше 0,5%) этим выражением можно пользоваться вплоть до $\gamma = 0{,}3$.

Таким образом, в зависимости от значения γ целесообразно использовать разные приближенные выражения для математического ожидания погрешности квантования по уровню. При $\gamma > 0{,}3$ следует использовать формулу (5), при $\gamma < 0{,}3$ — формулу (4).

Перейдем теперь к нахождению выражения для автокорреляционной функции погрешности квантования по уровню. По определению автокорреляционной функции

$$R_{кв}(\tau) = M[\Delta_{кв}(\xi_1)\,\Delta_{кв}(\xi_2)] - M^2(\Delta_{кв}), \tag{6}$$

где $\tau = t_2 - t_1$;

$\Delta_{кв}(\xi)$ — погрешность квантования по уровню;

$$\xi_1 = \xi(t_1); \quad \xi_2 = \xi(t_2); \quad \xi(t) = U_ш(t) + U_0.$$

В [1] приводится следующая связь между $M[\Delta_{кв}(\xi_1)\,\Delta_{кв}(\xi_2)]$ и двумерной характеристической функцией:

$$M[\Delta_{кв}(\xi_1)\,\Delta_{кв}(\xi_2)] = \frac{q^2}{4\pi^2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{i+k+1}}{ik} F_{2\xi}\left(\frac{2\pi i}{q}, \frac{2\pi k}{q}\right), \tag{7}$$

$F_{2\xi}\left(\frac{2\pi i}{q}, \frac{2\pi k}{q}\right)$ — характеристическая функция, которая получается из выражения

$$F_{2\xi}(U_1, U_2, \tau) = M\{e^{j(U_1\xi_1 + U_2\xi_2)}\}$$

путем замены U_1 на $\frac{2\pi i}{q}$, а U_2 на $\frac{2\pi k}{q}$.

Для стационарного случайного процесса с нормальным распределением и математическим ожиданием, равным U_0, для двумерной характеристической функции можно записать

$$F_{2\xi}(U_1, U_2, \tau) = e^{j(U_1+U_2)U_0}\, e^{0{,}5\,[(U_1^2+U_2^2)\,D_ш + 2U_1U_2R_ш(\tau)]}. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (6), учитывая соотношение (8) и заменяя в полученном выражении суммирование как по положительным, так и по отрицательным i и k суммированием лишь по положительным i и k, получим окончательное выражение для автокорреляционной функции

$$R_{\text{кв}}(\tau) = \left\{\frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+k+1}}{ik}\,e^{(i^2-k^2)\,2\pi^2\gamma^2}\left[e^{-ik\,4\pi^2\gamma^2 r_{\text{ш}}(\tau)}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\cos(i+k)\,2\pi\alpha - e^{ik\,4\pi^2\gamma^2 r_{\text{ш}}(\tau)}\cos(i-k)\,2\pi\alpha\right]\right\} - M^2(\Delta_{\text{кв}}). \qquad (9)$$

Влияние на корреляционную функцию значения постоянного сигнала α по полученному выражению оценить трудно. Поэтому рассмотрим, как будет зависеть от значения α интервал корреляции и дисперсия погрешности квантования по уровню.

Используя известное определение интервала корреляции $\tau_{0\text{кв}}$, запишем

$$\tau_{0\,\text{кв}} = \frac{2\int\limits_0^{\infty} R_{\text{кв}}(\tau)\,d\tau}{R_{\text{кв}}(0)} =$$

$$= \frac{-2\int\limits_0^{\infty} M^2(\Delta_{\text{кв}})\,d\tau + 2\left\{\left[\frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+k}}{ik}\,e^{-(i^2+k^2)\,2\pi^2\gamma^2}\times\right.\right.}{-M^2(\Delta_{\text{кв}}) + \left\{\frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+k}}{ik}\times\right.}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\left.\left.\times\int\limits_0^{\infty}\left(e^{ik\,4\pi^2\gamma^2 r_{\text{ш}}}\cos(i-k)\,2\pi\alpha - e^{-ik4\pi^2\gamma^2 r_{\text{ш}}}\cos(i+k)\,2\pi\alpha\right)\right]\right\}d\tau}{\left.\times\left[e^{-(i-k)^2\,4\pi^2\gamma^2}\cos(i-k)\,2\pi\alpha - e^{-(i+k)^2\,4\pi^2\gamma^2}\cos(i+k)\,2\pi\alpha\right]\right\}}. \qquad (10)$$

Для упрощения этого выражения будем пользоваться предположениями, аналогичными тем, которые сделаны при анализе интервала корреляции в [3]. В частности, примем, что нормированная спектральная плотность входного шума $U_{\text{ш}}(t)$ постоянна на некотором интервале частот $\omega_{\text{н}}$, $\omega_{\text{м}}$, причем $\omega_{\text{м}} \gg \omega_{\text{н}}$.

Как известно, нормированная функция корреляции такого шума равна

$$r_{\text{ш}}(\tau) = \frac{\sin\omega_{\text{м}}\tau}{\omega_{\text{м}}\tau} = \left[1 - \frac{(\omega_{\text{м}}\tau)^2}{3!} + \frac{(\omega_{\text{м}}\tau)^4}{5!} - \ldots\right].$$

Пусть $\gamma > 0{,}3$. Учитывая в формуле (10) сильную зависимость экспоненциальных функций от $r_{\text{ш}}(\tau)$ и индексов суммирования i и k, можно выражение для $\tau_{0\,\text{кв}}$ представить в следующем упрощенном виде:

$$\tau_{0\,\text{кв}} \cong \frac{-2\tau_{0\,\text{ш}}\,e^{-4\pi^2\gamma^2}\sin^2 2\pi\alpha + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int\limits_0^{\tau_{0\,\text{ш}}} e^{-4\pi^2 n^2\gamma^2\frac{\omega^2\tau^2}{6}}\,d\tau}{-e^{-4\pi^2\gamma^2}\sin^2 2\pi\alpha + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \tau_{0\,ш} \frac{\left[\frac{0{,}136}{\gamma} - 2e^{-4\pi^2\gamma^2}\sin^2 2\pi\alpha\right]}{[1{,}64 - e^{-4\pi^2\gamma^2}\sin^2 2\pi\alpha]}, \tag{11}$$

где $\tau_{ош}$ — интервал корреляции входного шума.

Анализ выражения (11) показывает, что $\tau_{0\,кв}$ слабо зависит от α. Действительно, минимальное значение $\tau_{0\,кв}$ будет иметь место при $\alpha = \pm 0{,}25$ и равно

$$\tau_{0\,кв\,min} = \frac{\frac{0{,}136}{\gamma} - 2e^{-4\pi^2\gamma^2}}{1{,}64 - e^{-4\pi^2\gamma^2}} \tau_{0\,ш},$$

максимальное — при $\alpha = 0$, $\pm 0{,}5$ и равно $\tau_{0\,кв\,max} = \frac{\tau_{0\,ш}}{12\gamma}$.

Так, для $\gamma = 0{,}3$ $\tau_{0\,кв\,min} = 0{,}24\,\tau_{0ш}$; $\tau_{0\,кв\,max} = 0{,}28\,\tau_{0\,ш}$.

Выражение для максимального значения интервала корреляции совпадает с выражением, полученным в [3] в предположении, что $\alpha = 0$ и $\gamma > 1$. Учитывая, что $\tau_{0\,кв\,min}$ и $\tau_{0\,кв\,max}$ мало отличаются друг от друга, можно для любой точки шкалы пользоваться этим соотношением с погрешностью не более 15% вплоть до $\gamma = 0{,}3$.

Выражение для дисперсии погрешности квантования по уровню для произвольной точки шкалы можно получить из формулы (9):

$$D_{кв} = R_{кв}(0) = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+k}}{ik} [e^{-(i-k)^2 2\pi^2\gamma^2} \cos(i-k) 2\pi\alpha - e^{-(i+k)^2 2\pi^2\gamma^2} \cos(i+k) 2\pi\alpha] - M^2(\Delta_{кв}). \tag{12}$$

Анализ этого выражения позволяет оценить допускаемую погрешность и границы применимости приближенного выражения для $D_{кв}$,

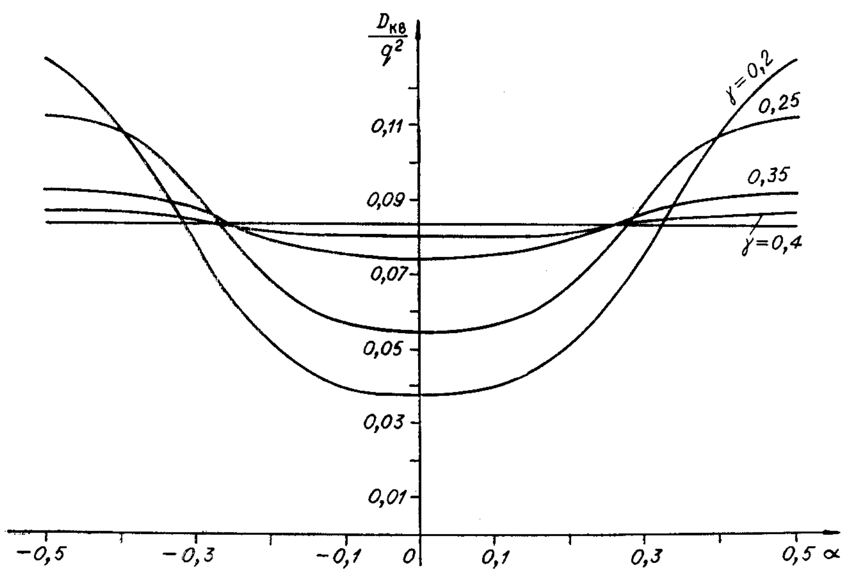

Рис. 1.

приведенного в [4]. Действительно, учитывая (5) с погрешностью порядка 1% при $\gamma > 0{,}3$, выражение (12) для $D_{кв}$ можно представить в виде

$$D_{кв} = q^2 \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2} e^{-2\pi^2\gamma^2} \cos 2\pi\alpha - \frac{1}{\pi^2} e^{-4\pi^2\gamma^2} \sin^2 2\pi\alpha \right]. \quad (13)$$

На основании соотношения (12) на рис. 1 построен график зависимости $D_{кв}$ от α при различных значениях γ (другими словами, дано распределение дисперсии по шкале прибора). Исходя из этого графика, можно заключить: а) дисперсия погрешности квантования по уровню, являясь периодической функцией с периодом, равным кванту, минимальна в середине и максимальна по краям кванта при любых γ; б) с ростом дисперсии входного шума $D_ш$ значения дисперсии погрешности квантования по уровню выравниваются по шкале прибора так, что, начиная с $\gamma = 0{,}5$, $D_{кв}$ практически принимает одинаковое значение для любой точки шкалы и равное $\frac{q^2}{12}$.

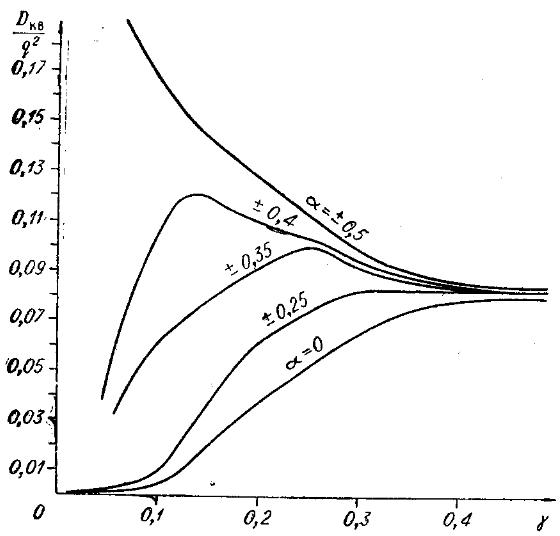

Рис. 2.

На основании соотношения (12) построен также график зависимости $D_{кв}$ от γ для различных α (рис. 2). Из этого графика следует, что а) при малых α (т. е. когда центр распределения входной суммы приходится на середину кванта) зависимость $D_{кв}$ от γ является монотонно нарастающей; б) при α, близких к $\pm 0{,}5$, зависимость $D_{кв}$ от γ имеет максимум вблизи значения γ, равного нулю. Значение $\gamma = \gamma_0$, обращающее в максимум $D_{кв}$, и само значение $D_{кв\,max}$ зависят от α. С уменьшением абсолютного значения α значения γ_0 растут, а $D_{кв\,max}$ падает, так что при $\alpha \leqslant 0{,}3$ максимум практически отсутствует. Появление этого максимума при $\alpha > 0{,}3$ можно объяснить следующим образом: при малых значениях γ, когда значения суммы практически не выходят за пределы данного кванта, погрешность квантования по уровню мало отличается от ее значения при $\gamma = 0$, т. е. дисперсия будет мала. Если же по мере увеличения γ входная сумма выходит за пределы данного кванта и переходит в соседний квант, то с большой вероятностью погрешность квантования для части значений суммы постоянного сигнала и шума будет иметь значения, как и раньше, близкие к максимальным $\left(\frac{q}{2}\right)$ и обратные по знаку, что соответствует максимуму значения дисперсии. По мере дальнейшего увеличения γ растет вероятность того, что погрешность квантования по уровню принимает промежуточные (между $-\frac{q}{2}$ и $+\frac{q}{2}$) значения. Это приводит к уменьшению дисперсии $D_{кв}$ до значения, соответствующего равномерному распределению $\left(\frac{q^2}{12}\right)$.

Рассмотрим, наконец, зависимость взаимно корреляционной функции от значения постоянного сигнала. По определению взаимно корреляционой функции можно записать

$$R_{\text{ш. кв}}(\tau) = M\{[\Delta_{\text{кв}}(\xi_1)\,\xi_2]\} =$$

$$= \frac{q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} M\left[U_{\text{ш}}(t_1) \sin \frac{2\pi k}{q} \xi_2\right].$$

Здесь использовано разложение функции $\Delta(\xi_2)$ в ряд Фурье.

Представляя синус в виде разности экспоненциальных функций, используя соотношение (8) для характеристической функции и учитывая, что

$$j\,U_0\,M\,[e^{j\,U_2\,\xi_2}] + j\,M\,[U_{\text{ш}}(t_1)\,e^{j\,U_2\,\xi_2}] =$$

$$= \left.\frac{\partial F_{2\xi}(U_1, U_2, \tau)}{\partial U_1}\right|_{U_1=0},$$

после несложных преобразований получим

$$R_{\text{ш. кв}}(\tau) = 2R_{\text{ш}}(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2\pi^2 k^2 \gamma^2 r_{\text{ш}}(\tau)} \cos 2\pi k\,\alpha. \qquad (14)$$

Так как $R_{\text{ш}}(\tau) = \gamma^2 q^2 r_{\text{ш}}(\tau)$ растет, а сумма в (14) падает с увеличением γ, то при заданном α существует γ, при котором значение $R_{\text{ш. кв}}(\tau)$ будет максимально. Так, для $\alpha=0$, $\pm 0{,}5$ значение $R_{\text{ш. кв}}(\tau)$ будет максимальным при $r_{\text{ш}}(\tau)\,\gamma^2 = 0{,}05$ и равным $0{,}8\,R_{\text{ш}}(\tau) = 0{,}04\,q^2$.

Учитывая быструю сходимость ряда (14), нетрудно проанализировать зависимость $R_{\text{ш. кв}}(\tau)$ от α. Так, при $\gamma^2 r_{\text{ш}}(\tau) \geqslant 0{,}08$ с погрешностью менее 1% для $R_{\text{ш. кв}}(\tau)$ можно записать

$$R_{\text{ш. кв}}(\tau) = -2\,R_{\text{ш}}(\tau)\,e^{-2\pi^2 \gamma^2 r_{\text{ш}}(\tau)} \cos 2\pi\alpha.$$

Из последнего соотношения видно, что максимальное значение $R_{\text{ш. кв}}(\tau)$ имеет место при $\alpha=0$, $\pm 0{,}5$ и равно $R_{\text{ш.кв max}}(\tau) = -2R_{\text{ш}}(\tau)\,e^{-2\pi^2\gamma^2 r_{\text{ш}}(\tau)}$, в то время как минимальное значение $R_{\text{ш. кв}}(\tau)$, равное нулю, получается при $\alpha = \pm 0{,}25$.

Для достаточно больших дисперсий входного шума (при $\gamma^2 r_{\text{ш}}(\tau) > 0{,}2$) взаимной корреляцией входного сигнала и погрешности квантования по уровню можно пренебречь для любой точки шкалы.

* * *

Полученные выражения позволяют определять статистические характеристики погрешности квантования по уровню для процесса, являющегося суммой постоянного сигнала и нормального шума для любой точки шкалы.

Показано, что именно при малой дисперсии входного шума появляется существенная зависимость статистических характеристик погрешности квантования по уровню от положения точки на шкале прибора.

Известные из [1, 3, 4] формулы являются частным случаем выражений, выведенных здесь, и могут быть получены из последних при определенных допущениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Косякин. Статистическая теория квантования по уровню.— Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 6.
2. В. М. Ефимов. Корреляционная функция погрешности дискретности.— Автометрия, 1965, № 5.
3. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М., изд-во «Советское радио», 1966.
4. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М., Гостехиздат, 1955.

Поступила в редакцию
18 мая 1966 г.