АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1966

УДК 681.2.088

Г. Г. МАТУШКИН,
С. А. ТИМОХИН, А. М. ЩЕРБАЧЕНКО
*(Новосибирск)*

# ОБ ОДНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ КВАДРАТУРНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Выводится выражение для дополнительной погрешности измерения квадратурных составляющих узкополосных случайных процессов, получающейся вследствие несовпадения частоты детектирования и средней частоты спектра исследуемого процесса. Рассматривается влияние этой погрешности при некоторых частных случаях дальнейшей обработки квадратурных составляющих.

Известно [1, 2], что, если исследуемый случайный процесс обладает достаточно узкополосным спектром, его весьма удобно представить в виде колебания со случайной амплитудой и фазой:

$$x(t) = E(t)\cos\Phi(t),$$

или

$$x(t) = E(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = A(t)\cos\omega_0 t - B(t)\times\sin\omega_0 t,$$

где $\omega_0$ — средняя частота спектра исходного случайного процесса;
$\varphi(t)$ — его фаза;

$$A(t) = E(t)\cos\varphi(t); \tag{1}$$

$$B(t) = E(t)\sin\varphi(t). \tag{2}$$

Такое представление дает возможность перейти к рассмотрению случайного процесса как вектора в комплексной плоскости, что значительно облегчает анализ и позволяет выделять полезную информацию более простым путем.

Как правило, непосредственному анализу подвергаются квадратурные составляющие этого вектора, транспонированные в низкочастотную область спектра, т. е. $A(t)$ и $B(t)$. Практически наиболее удобно получать эти квадратурные составляющие путем синхронного детектирования с помощью двух транзисторных ключей, на входы которых поступает исходный процесс, а управление которыми осуществляется с помощью периодических сигналов, сдвинутых на четверть периода, причем период повторения этих сигналов должен быть точно равен периоду средней частоты спектра исследуемого процесса.

Несовпадение этих частот влечет за собой появление дополнительной погрешности измерения значений квадратурных составляющих, что может исказить результаты дальнейшего их анализа. Поэтому представляет интерес оценить влияние несовпадения частоты сигналов управления синхронными детекторами со средней частотой спектра исследуемого процесса на погрешность измерения значений квадратурных составляющих и выяснить требования, которые накладываются на эту несинхронность в реальных случаях.

Математически результат подобного рода синхронного детектирования сводится к произведению исследуемой функции на периодическую последовательность импульсов с периодом повторения, равным периоду управляющих сигналов.

Разложение периодической последовательности прямоугольных импульсов с периодом повторения $T$, амплитудой $U$ и длительностью $\tau$ в ряд Фурье приводит к выражению

$$\eta_1(t) = U\frac{\tau}{T}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{\sin\frac{k\omega\tau}{2}}{\frac{k\omega\tau}{2}}\cos k\omega t\right]. \quad (3)$$

Выражение для разложенной в ряд Фурье последовательности импульсов, сдвинутой по отношению к рассмотренной на четверть периода, имеет вид

$$\eta_2(t) = U\frac{\tau}{T}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{\sin\frac{(2n+1)\omega\tau}{2}}{\frac{(2n+1)\omega\tau}{2}}\sin(2n+1)\omega t + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{\sin\frac{2n\omega\tau}{2}}{\frac{2n\omega\tau}{2}}\cos 2n\omega t\right]. \quad (4)$$

Рассмотрим произведение двух функций $\eta_1(t)$ и $x(t) = E(t)\cos\Phi(t)$:

$$f_1(t) = x(t)\eta_1(t) = E(t)\cos\Phi(t)\,U\frac{\tau}{T}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{\sin\frac{k\omega\tau}{2}}{\frac{k\omega\tau}{2}}\cos k\omega t\right] =$$

$$= U\frac{\tau}{T}E(t)\left[\cos\Phi(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\omega\tau}{2}}{\frac{k\omega\tau}{2}}\cos\Phi(t)\cos k\omega t\right]. \quad (5)$$

Развернем произведение

$$\cos\Phi(t)\cos k\omega t = \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]\cos\omega t =$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos[(\omega_0 - k\omega)t + \varphi(t)] + \cos[(\omega_0 + k\omega)t + \varphi(t)]\}.$$

После подстановки полученного результата в (5) имеем

$$f_1(t) = U\frac{\tau}{T}E(t)\left\langle \cos\Phi(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\,\omega\tau}{2}}{\frac{k\,\omega\tau}{2}}\{\cos[(\omega_0 - k\,\omega)\,t + \right.$$

$$\left. + \varphi(t)] + \cos[(\omega_0 + k\,\omega)\,t + \varphi(t)]\}\right\rangle. \tag{6}$$

Для последовательности симметричных импульсов с $\tau = \frac{T}{2}$, что большей частью имеет место при синхронном детектировании,

$$\frac{\sin\frac{k\,\omega\tau}{2}}{\frac{k\,\omega\tau}{2}} = \frac{\sin k\,\frac{\pi}{2}}{k\,\frac{\pi}{2}}. \tag{7}$$

Выражение (7) при четных $k$ обращается в нуль. Следовательно, в выражении (6) будут отсутствовать члены, содержащие четные гармоники. Для первых пяти членов суммы (6) получим

$$f_1(t) = \frac{1}{2}\,UE(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + UE(t)\,\frac{1}{\pi}\cos[(\omega_0 - \omega)\,t + \varphi(t)] +$$

$$+ UE(t)\,\frac{1}{\pi}\cos[(\omega_0 + \omega)\,t + \varphi(t)] - \frac{UE(t)}{3\pi}\cos[(\omega_0 - 3\omega)\,t + \varphi(t)] -$$

$$- \frac{UE(t)}{3\pi}\cos[(\omega_0 + 3\omega)\,t + \varphi(t)] + \frac{UE(t)}{5\pi}\cos[(\omega_0 - 5\omega)\,t + \varphi(t)] +$$

$$+ \frac{UE(t)}{5\pi}\cos[(\omega_0 + 5\omega)\,t + \varphi(t)] - \ldots \tag{8}$$

В случае равенства частоты следования импульсов средней частоте спектра исходного процесса ($\omega = \omega_0$) выражение (8) принимает вид

$$f_1(t) = \frac{1}{2}\,UE(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + \frac{UE(t)}{\pi}\{\cos\varphi(t) +$$

$$+ \cos[2\omega t + \varphi(t)]\} - \frac{UE(t)}{3\pi}\{\cos[-2\omega t + \varphi(t)] + \cos[4\omega t + \varphi(t)]\} +$$

$$+ \frac{UE(t)}{5\pi}\{\cos[-4\omega t + \varphi(t)] + \cos[6\omega t + \varphi(t)]\}. \tag{9}$$

Из выражения (9) видно, что при соблюдении равенства $\omega = \omega_0$ в спектре преобразованного сигнала появляется низкочастотная составляющая, равная

$$\frac{UE(t)}{\pi}\cos\varphi(t). \tag{10}$$

Умножая исходный процесс на последовательность импульсов $\eta_2(t)$, сдвинутую по отношению к $\eta_1(t)$ на четверть периода, и производя аналогичные преобразования, получаем выражение для низкочастотной составляющей в виде

$$\frac{UE(t)}{\pi}\sin\varphi(t). \tag{11}$$

Сравнивая выражения (10) и (11) с выражениями (1) и (2), видим, что в результате перемножения исходного сигнала, представляющего реализацию случайного процесса, с соответствующими последовательностями прямоугольных импульсов, сдвинутых одна относительно другой на $\frac{\pi}{2}$, и последующего выделения низкочастотной составляющей получаются величины, пропорциональные квадратурным составляющим случайного процесса $A(t)$ и $B(t)$.

Однако практически средняя частота спектра входного сигнала всегда будет отличаться от частоты квантования (или частоты гетеродина синхронного детектора) и, кроме того, они могут иметь некоторую начальную разность фаз. Если принять, что $(\omega_0-\omega)t=\Delta\omega t+\Psi$, где $\Psi$ — начальный фазовый сдвиг между напряжением средней частоты спектра $\omega_0$ и напряжением частоты квантования $\omega$, а $\Delta\omega t$ — фазовый сдвиг, обусловленный изменением средней частоты спектра входного сигнала относительно частоты квантования, то выражения для квадратурных составляющих примут вид:

$$A^*(t)=\frac{UE(t)}{\pi}\cos\left[\Delta\omega t+\Psi+\varphi(t)\right]; \tag{12}$$

$$B^*(t)=\frac{UE(t)}{\pi}\sin\left[\Delta\omega t+\Psi+\varphi(t)\right]. \tag{13}$$

Приведенные погрешности измерения квадратурных составляющих (в момент времени $t$), возникающие за счет несинхронного детектирования входного сигнала, можно определить, исходя из выражений:

$$S_{A_t}=\frac{A_t^*-A_t}{A_{t\,\max}}; \tag{14}$$

$$S_{B_t}=\frac{B_t^*-B_t}{B_{t\,\max}}, \tag{15}$$

где $A_t^*$ и $B_t^*$ — измеренные значения квадратурных составляющих в данный момент времени $t$;

$A_t$ и $B_t$ — значения квадратурных составляющих в этот момент времени при условии равенства частот $\omega$ и $\omega_0$;

$A_{t\,\max}$ и $B_{t\,\max}$ — максимально возможные значения квадратурных составляющих.

Подставляя значения $A_t^*$, $B_t^*$, $A_t$ и $B_t$ из (10)—(13) в выражения (14) и (15) и учитывая, что

$$A_{t\,\max}=B_{t\,\max}=\frac{U}{\pi}E_{\max},$$

получим соответственно:

$$\delta_{A_t}=\frac{\frac{UE(t)}{\pi}\cos(\Delta\omega t+\Psi+\varphi_t)-\frac{UE(t)}{\pi}\cos\varphi_t}{\frac{UE_{\max}}{\pi}}; \tag{16}$$

$$\delta_{B_t}=\frac{\frac{UE(t)}{\pi}\sin(\Delta\omega t+\Psi+\varphi_t)-\frac{UE(t)}{\pi}\sin\varphi(t)}{\frac{UE_{\max}}{\pi}}. \tag{17}$$

Сокращая числитель и знаменатель обоих выражений на $\frac{U}{\pi}$ и рассматривая выражения $\cos(\Delta\omega t+\Psi+\varphi_t)$ и $\sin(\Delta\omega t+\Psi+\varphi_t)$ как тригонометрические функции суммы двух аргументов $(\Delta\omega t+\Psi)$ и $\varphi_t$, получим:

$$\delta_{A_t} = \frac{E_t}{E_{\max}}\left[\cos(\Delta\omega t+\Psi)\cos\varphi_t - \sin(\Delta\omega t+\Psi)\sin\varphi_t - \cos\varphi_t\right];$$

$$\delta_{B_t} = \frac{E_t}{E_{\max}}\left[\sin(\Delta\omega t+\Psi)\cos\varphi_t + \cos(\Delta\omega t+\Psi)\sin\varphi_t - \sin\varphi_t\right].$$

Найдем значения фазовых сдвигов $(\Delta\omega t+\Psi)$, при которых выражения для дополнительных относительных погрешностей приобретают максимум. Для этого возьмем производные от этих выражений по $(\Delta\omega t+\Psi)$ и приравняем их нулю:

$$\frac{d\delta_{A_t}}{d(\Delta\omega t+\Psi)} = \frac{E_t}{E_{\max}}\left[-\sin(\Delta\omega t+\Psi)\cos\varphi_t - \right.$$
$$\left. - \cos(\Delta\omega t+\Psi)\sin\varphi_t\right] = 0;$$

$$\frac{d\delta_{B_t}}{d(\Delta\omega t+\Psi)} = \frac{E_t}{E_{\max}}\left[\cos(\Delta\omega t+\Psi)\cos\varphi_t - \right.$$
$$\left. - \sin(\Delta\omega t+\Psi)\sin\varphi_t\right] = 0.$$

Решая эти уравнения относительно $(\Delta\omega t+\Psi)$ и учитывая, что имеет смысл рассматривать значения разности фаз $(\Delta\omega t+\Psi)$ только в пределах одного периода, видим, что максимальные значения дополнительной погрешности имеют место в двух точках; для квадратурной составляющей $A_t$ в точках

$$(\Delta\omega t+\Psi) = -\varphi_t \text{ и } (\Delta\omega t+\Psi) = \pi - \varphi_t,$$

а для квадратурной составляющей $B_t$ в точках

$$(\Delta\omega t+\Psi) = \frac{\pi}{2} - \varphi_t \text{ и } (\Delta\omega t+\Psi) = \frac{\pi}{2} - \varphi_t + \pi.$$

Определяя для всех этих точек значения приведенной относительной погрешности и принимая во внимание, что нас интересует абсолютное их значение, находим, что для обеих квадратурных составляющих выражение для максимальной приведенной погрешности их измерения за счет несовпадения средней частоты спектра исследуемого процесса и частоты квантования синхронного детектора будет иметь вид

$$\delta_{A_t} = \delta_{B_t} = \frac{E_t}{E_{\max}}\left[1 - \cos(\Delta\omega t+\Psi)\right].$$

Наибольшего значения приведенная дополнительная погрешность измерения квадратурных составляющих достигает при $E_t = E_{\max}$. При этом

$$\delta_{A_t} = \delta_{B_t} = 1 - \cos(\Delta\omega t+\Psi). \tag{18}$$

Используя выражение (18), определим допустимую несинхронность частот, исходя из заданной относительной погрешности измерения квадратурных составляющих $\delta_{A_t} = \delta_{B_t}$, которую примем равной 1%:

$$\cos(\Delta\omega t + \Psi) = 1 - \delta_{A_t (B_t)} = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

Отсюда допустимое значение фазового угла сдвига равно

$$(\Delta\omega t + \Psi) \leqslant 8^\circ.$$

Это допустимое значение фазового угла при данной относительной погрешности зависит не только от несинхронности частот, но и от времени измерения. Если мы примем время измерения квадратурных составляющих, или, что то же самое, длительность исследуемого сигнала равным 0,1 *сек*, то даже при начальном сдвиге фазы $\Psi=0$ разница между средней частотой спектра исследуемого сигнала и частотой его квантования в синхронном детекторе для обеспечения заданной погрешности не должна превышать

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{\Delta\omega t + \Psi}{t} = \frac{8^\circ}{0{,}1\ сек} = 1{,}4\ рад/сек,$$

или

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \cong 0{,}22\ гц.$$

Надо отметить, что в случае, если разница между частотами $\omega_0$ и $\omega$ сама является случайной функцией времени, то при расчетах необходимо пользоваться математическим ожиданием этой функции.

Рассматривая полученное выражение для допустимой расстройки частот при заданной дополнительной погрешности измерения квадратурных составляющих, можно сделать вывод, что поскольку допустимая расстройка не зависит от абсолютной величины средней частоты спектра исследуемого процесса, то эта средняя частота тогда, когда она может быть задана, должна выбираться как можно ниже.

Посмотрим, за счет чего возникает погрешность измерения квадратурных составляющих при несинфазности и несинхронности средней частоты спектра и частоты сигналов детектирования.

Несколько преобразовывая выражения (12) и (13), можно записать:

$$A^*(t) = \frac{U}{\pi} E(t)\,[\cos(\Delta\omega t + \Psi)\cos\varphi(t) - \sin(\Delta\omega t + \Psi)\sin\varphi(t)];$$

$$B^*(t) = \frac{U}{\pi} E(t)\,[\sin(\Delta\omega t + \Psi)\cos\varphi(t) + \cos(\Delta\omega t + \Psi)\sin\varphi(t)].$$

Учитывая, что $E(t)\cos\varphi(t) = A(t)$, а $E(t)\sin\varphi(t) = B(t)$, имеем:

$$A^*(t) = \frac{U}{\pi}[A(t)\cos(\Delta\omega t + \Psi) - B(t)\sin(\Delta\omega t + \Psi)];$$

$$B^*(t) = \frac{U}{\pi}[A(t)\sin(\Delta\omega t + \Psi) + B(t)\cos(\Delta\omega t + \Psi)].$$

Следовательно, дополнительные погрешности при измерении квадратурных составляющих в случае несинхронности и несинфазности частот возникают за счет проникновения второй квадратурной составляющей в канал первой, а первой — в канал второй.

Как видно из выражения (18) и приведенного расчета, при достаточно высокой средней частоте спектра требования к синхронности частоты квантования синхронного детектора предъявляются достаточно жесткие. Несоблюдение этих требований ведет к искажению закона изменения выделяемых квадратурных составляющих и, следовательно, к дополнительным погрешностям определения некоторых характеристик, получаемых после их обработки.

Однако надо учитывать следующие обстоятельства: во-первых, эти требования являются несколько завышенными, поскольку они исходят из ошибки, имеющей место лишь в конце периода измерения; во-вторых, как правило, получение квадратурных составляющих не является самоцелью и для определения тех или иных характеристик исследуемого процесса они обычно используются совместно. Последнее в некоторых случаях позволяет избежать дополнительной погрешности получения этих характеристик из-за несинхронности частот при определении квадратурных составляющих. Так, например, если целью измерения квадратурных составляющих является определение по ним огибающей исследуемого случайного процесса, согласно алгоритму $E(t)=\sqrt{A^2(t)+B^2(t)}$, то, поскольку

$$\sqrt{\left[\frac{U}{\pi}E(t)\right]^2\cos^2[\Delta\omega t+\Psi+\varphi(t)]+\left[\frac{U}{\pi}E(t)\right]^2\sin^2[\Delta\omega t+\Psi+\varphi(t)]}=\\=\frac{U}{\pi}E(t),$$

ясно, что дополнительная относительная погрешность измерения квадратурных составляющих на точность определения огибающей не влияет и, следовательно, может не приниматься во внимание.

Если квадратурные составляющие служат для определения фазы случайного процесса, согласно алгоритму $\varphi(t)=\operatorname{arctg}\frac{B(t)}{A(t)}$, то имеем

$$\operatorname{arctg}\frac{B^*(t)}{A^*(t)}=\operatorname{arctg}\frac{A(t)\sin(\Delta\omega t+\Psi)+B(t)\cos(\Delta\omega t+\Psi)}{A(t)\cos(\Delta\omega t+\Psi)-B(t)\sin(\Delta\omega t+\Psi)}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $A(t)\cos(\Delta\omega t+\Psi)$, получим:

$$\operatorname{arctg}\frac{B^*(t)}{A^*(t)}=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(\Delta\omega t+\Psi)+\frac{B(t)}{A(t)}}{1-\frac{B(t)}{A(t)}\operatorname{tg}(\Delta\omega t+\Psi)}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{B(t)}{A(t)}+(\Delta\omega t+\Psi),$$

или

$$\varphi^*(t)=\varphi(t)+(\Delta\omega t+\Psi),$$

где $\varphi^*(t)$ — фаза случайного процесса, определенная при условии несинхронности и несинфазности средней частоты спектра и частоты квантования.

В некоторых случаях такая линейно возрастающая погрешность определения фазы может быть учтена при дальнейшем анализе закона ее изменения.

## ВЫВОДЫ

Отклонение частоты квантования исходной реализации от средней частоты его спектра при измерении квадратурных составляющих случайного процесса влечет за собой появление дополнительной погрешности измерения, величина которой может быть определена из выражения (18).

Влияние этой погрешности на результат последующей обработки зависит от его алгоритма и в ряде случаев может быть легко учтено.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Бунимович. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. М., изд-во «Советское радио», 1951.
2. Б. Р. Левин. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М., изд-во «Советское радио», 1960.

*Поступила в редакцию*
*20 мая 1966 г.*