А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 5 1966

УДК 621.317.7.001.5 : 621.317.772.5

С. М. ПОПЛАВСКИЙ

(Каунас)

ПОЛЯРНЫЙ КОРРЕЛЯТОР В КАЧЕСТВЕ ИЗМЕРИТЕЛЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Развивается метод вспомогательных сигналов для расширения функций полярных корреляторов. Указывается возможность простого технического приложения.

Статистические измерения находят все большее применение в различных областях техники. Однако до сих пор широкое использование статистических методов измерений наталкивается на серьезные трудности, связанные со сравнительной сложностью аппаратуры для анализа случайных процессов. Эти трудности неизмеримо возрастают при построении многоканальных устройств, необходимых для анализа нестационарных процессов. Возникает проблема создания достаточно простых устройств, с одной стороны, и проблема максимального расширения функциональных возможностей этих устройств — с другой. В силу исключительной схемной простоты полярные корреляторы являются, по-видимому, наиболее перспективными в этом отношении. Вопросу расширения функциональных возможностей полярных корреляторов посвящены работы [1—4]. Существенная особенность полярного коррелятора заключается в том, что его выходной сигнал является некоторой, вообще говоря, произвольной функцией коэффициента корреляции. Вид этой функции зависит от закона распределения исследуемых процессов. Таким образом, в выходном сигнале полярного коррелятора заключена информация как о коэффициенте корреляции, так и о законе распределения. В [1] предложен метод выделения из выходного сигнала полярного коррелятора информации о коэффициенте корреляции в чистом виде таким образом, что показания прибора являются линейной функцией от коэффициента корреляции при любом законе распределения исследуемых процессов. В [3] сделано предположение о возможности выделения из выходного сигнала чистой информации о законе распределения, однако не указано, каким образом можно реализовать эту возможность. В настоящей работе делается попытка восполнить этот пробел.

По определению, полярный коррелятор осуществляет следующее нелинейное преобразование:

$$Q = M\{\operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y\}, \tag{1}$$

где Q — выходной сигнал полярного коррелятора;

M — операция нахождения математического ожидания;
x, y — переменные, соответствующие исследуемым процессам

$$\xi(t) \text{ и } \eta(t+\tau);$$

τ — временная задержка;
sgn — знаковая функция, определяемая соотношением

$$\operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} +1; & \alpha > 0; \\ -1; & \alpha < 0. \end{cases} \tag{2}$$

В случае прибавления на входах полярного коррелятора вспомогательных сигналов на его выходе будет появляться величина

$$Q^* = M\{\operatorname{sgn}(x + W)\operatorname{sgn}(y + z)\}, \tag{3}$$

где W, z — переменные, соответствующие вспомогательным сигналам.

Пусть временная задержка отсутствует и сигналы $\xi(t)$, $\eta(t)$ тождественно совпадают. Тогда равенство (3) можно записать в виде трехкратного интеграла

$$Q^* = \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \operatorname{sgn}(x + W)\operatorname{sgn}(x + z)\, F(x, W, z)\, dx\, dW\, dz, \tag{4}$$

где $F(x, W, z)$ — совместная плотность вероятности, соответствующая исследуемому сигналу $\xi(t)$ и вспомогательным сигналам $S(t)$ и $H(t)$.

Выберем в качестве вспомогательных сигналов статистически независимые случайные телеграфные сигналы. Тогда в силу статистической независимости совместную плотность вероятности $F(x, W, z)$ можно представить в виде произведения трех сомножителей

$$F(x, W, z) = f(x)\varphi(W)\psi(z), \tag{5}$$

где $f(x)$ — плотность вероятности исследуемого процесса $\xi(t)$;
$\varphi(W)$ — плотность вероятности вспомогательного сигнала $S(t)$;
$\psi(z)$ — плотность вероятности вспомогательного сигнала $H(t)$.

Если обозначить амплитуды сигналов $S(t)$ и $H(t)$ соответственно β и γ, то плотности вероятности $\varphi(W)$ и $\psi(z)$ можно представить с помощью δ-функций [5]:

$$\begin{aligned} \varphi(W) &= \frac{1}{2}[\delta(W - \beta) + \delta(W + \beta)]; \\ \psi(z) &= \frac{1}{2}[\delta(z - \gamma) + \delta(z + \gamma)]. \end{aligned} \tag{6}$$

С учетом формул (5) и (6) равенство (4) можно привести к виду

$$Q^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x + W)\, \frac{1}{2}[\delta(W - \beta) + \delta(W + \beta)]\, dW \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x + z)\, \frac{1}{2}[\delta(z - \gamma) + \delta(z + \gamma)]\, dz\, dx. \tag{7}$$

Пользуясь фильтрующим свойством δ-функции, легко вычислить интегралы (7):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x + W) \frac{1}{2} [\delta(W - \beta) + \delta(W + \beta)]\, d\,W =$$
$$= \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(x + \beta) + \operatorname{sgn}(x - \beta)];$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x + z) \frac{1}{2} [\delta(z - \gamma) + \delta(z + \gamma)]\, dz =$$
$$= \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(x + \gamma) + \operatorname{sgn}(x - \gamma)]. \qquad (8)$$

Для определенности считаем, что амплитуда сигнала $H(t)$ не превышает амплитуды сигнала $S(t)$, т. е. $\beta \geqslant \gamma$; тогда с учетом равенств (8) и определения (2) можно вычислить интеграл (7)

$$Q^* = \int_{-\infty}^{-\beta} [f(x) + f(-x)]\, dx. \qquad (9)$$

Ограничимся сначала классом случайных процессов, для которых плотность вероятности четна, т. е.

$$f(-x) = f(x). \qquad (10)$$

Этот класс достаточно широк. В него входят такие практически важные процессы, как нормальный процесс, узкополосный нормальный процесс после идеального полосового ограничения [6], сглаженный случайный телеграфный сигнал [7] и многие другие случайные сигналы без постоянной составляющей. С учетом свойства (10) и на основании определения плотности вероятности равенство (9) представим как

$$Q^* = 2P(-\beta) = 2[1 - P(\beta)], \qquad (11)$$

где $P(\beta)$ — одномерный интегральный закон распределения исследуемого процесса.

Формула (11) показывает, что в рассматриваемом классе выходной сигнал полярного коррелятора есть линейная функция от одномерного интегрального закона распределения исследуемого процесса.

Снимем теперь ограничение (10) и рассмотрим общий случай произвольного случайного процесса. Введем функции sgn_1 и sgn_2:

$$\operatorname{sgn}_1 \alpha = \begin{cases} 1; & \alpha > 0; \\ 0; & \alpha < 0; \end{cases}$$
$$\operatorname{sgn}_2 \alpha = \begin{cases} 0; & \alpha > 0; \\ -1; & \alpha < 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Очевидно, что знаковую функцию sgn можно представить в виде суммы введенных функций

$$\operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{sgn}_1\alpha + \operatorname{sgn}_2\alpha. \qquad (13)$$

Пользуясь формулой (13), вводя обозначение

$$Q_{ik} = M\{\mathrm{sgn}_i\, x\ \mathrm{sgn}_k\, y\} \qquad (i,\ k = 1,\, 2)$$

и учитывая, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, от (1) перейдем к формуле вообще измеряется не вся сумма (14), а только одно или несколько ее слагаемых. Более того, как правило, один и тот же полярный коррелятор с помощью соответствующего переключения можно поставить в режим измерения любой комбинации величин Q_{ik}. При добавлении вспомогательных сигналов символы Q_{ik} заменяем символами Q^*_{ik}. Производя выкладки, аналогичные проделанным выше, легко получить:

$$\begin{aligned} Q^*_{11} + Q^*_{21} &= 1 - P(\beta); \\ Q^*_{22} + Q^*_{12} &= P(-\beta). \end{aligned} \qquad (15)$$

Таким образом, в общем случае выходной сигнал полярного коррелятора также является линейной функцией от одномерного интегрального закона распределения исследуемого процесса, однако для этого необходимо еще дополнительное переключение режима работы, согласно (15).

Формулы (11) и (15) получены в предположении, что полярный коррелятор производит операцию усреднения по множеству реализаций, поэтому они применимы как для стационарных, так и для нестационарных процессов. Особый интерес представляют корреляторы, работающие по принципу временного усреднения. При использовании (11) и (15) для таких полярных корреляторов возникают специфические проблемы замены статистического усреднения усреднением по времени, что приводит к дополнительным условиям, налагаемым на спектры вспомогательных сигналов. Полное рассмотрение возникающих эргодических проблем выходит за рамки настоящей статьи. Ограничимся получением необходимого условия для применимости эргодической теоремы в одном практически важном случае. Этот частный случай особенно важен потому, что указывает возможный путь очень простой технической реализации описанной выше теории. Итак, пусть исследуемый процесс эргодичен, а вспомогательные сигналы представляют собой вырожденные (детерминированные) случайные процессы типа «меандр» с фиксированной частотой и амплитудой, но со случайной начальной фазой, равномерно распределенной на основном интервале $(0,2\pi)$. Такие вспомогательные сигналы тоже эргодичны [5]. Пусть исследуемый сигнал отсутствует. Тогда произведение $\mathrm{sgn}[\xi(t)+s(t)]\mathrm{sgn}[\xi(t)+H(t)]$ превращается в произведение $\mathrm{sgn}S(t)\ \mathrm{sng}H(t)$, которое, в свою очередь, равно произведению $S(t)\ \ H(t)$, ибо преобразование sgn не изменяет меандра. Тогда проблема эргодичности сводится к проблеме эргодичности произведения $S(t)H(t)$. Это произведение эргодично, если частоты сигналов $S(t)$ и $H(t)$ несоизмеримы [5]. Требование несоизмеримости частот меандров и есть необходимое условие для применимости эргодической теоремы.

ВЫВОДЫ

Показано, что путем прибавления на входах полярного коррелятора независимых вспомогательных случайных телеграфных сигналов можно измерять одномерные интегральные законы распределения.

Указана возможность простого технического приложения при использовании в качестве вспомогательных сигналов детерминированных меандров несоизмеримых частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. P. Veltman, H. Kwakernaak. Theorie und Technik der Poloritätskorrelation für die dynamische Analyse niederfrequenter Signale und Systeme.— Regelungstechnik, 1961, 9 Jahrg., H. 9, S. 357—364.
2. Б. П. Велтман, А. ван ден Бос. Применение релейного коррелятора и коррелятора совпадения знаков в автоматическом регулировании.— II конгресс ИФАК. Базель, 1963.
3. P. Jespers. A New Method to Compute Correlation Functios.— IRE Trans. on Inform. Theory, 1962, v. IT — 8, № 5, pp. 106—107.
4. А. Н. Домарацкий. Применение квазилинейных элементов для корреляционных измерений.— Автометрия, 1965, № 4.
5. Д. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи, т. I. М., изд-во «Советское радио», 1961.
6. Ю. Б. Черняк. Корреляторы с идеальными ограничителями.— Радиотехника, 1965, т. 20, № 3.
7. D. G. Lampard and oth. A Probability Distribution Analyser.— J. or Electronics and Control, 1860, v. 9, № 3, pp. 233—239.

*Поступила в редакцию
8 февраля 1966 г.*