АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1966

УДК 62.3.083.72

А. Я. ВОЛОДАРСКИЙ
(*Новокузнецк*)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПО ФУНКЦИЯМ ВОЗБУЖДЕНИЯ И ОТКЛИКА

Предлагается графический метод получения частотных характеристик исследуемых систем по известным функциям возбуждения и отклика. Доказывается возможность анализа осциллограмм, в результате которого можно получить амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики. Метод прост. Частотный диапазон получаемых характеристик практически не ограничен и не зависит от числа используемых ординат.

При исследовании частотных характеристик некоторых измерительных устройств (например, малочувствительных датчиков давления, работающих в жидких средах) встречается ряд принципиальных трудностей, связанных с созданием испытательных сигналов с необходимыми параметрами (крутизной нарастания, длительностью, интенсивностью и т. д.).

Для анализа подобных измерительных устройств предлагается графический метод определения амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик четырехполюсников, возбуждаемых импульсами произвольной формы. Частотные характеристики определяются путем сравнения спектральных плотностей функций возбуждения и отклика.

Предлагаемый метод свободен от недостатков, присущих методам, основанным на гармоническом анализе (сравнительно узкий диапазон частот, отсутствие точек, лежащих между гармониками, и т. п.), и сведен к простым графическим построениям.

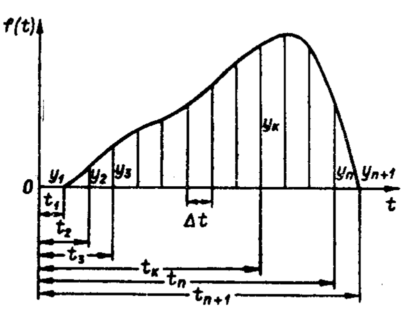

Рис. 1.

Пусть имеется непериодическая функция произвольной формы $f(t)$, отвечающая условиям Дирихле. Эту функцию можно аппроксимировать ломаной линией с достаточной степенью приближения. Для этого график функции (рис. 1) разбивается на n равных участков (отрезков времени). Количество участков определяется конфигурацией кривой и желательной степенью приближения.

Тогда функция $f(t)$, существующая в пределах от t_1 до t_{n+1}, может быть представлена в виде суммы функций в пределах от $-\infty$ до $+\infty$

$$f(t)\Big|_{t_1}^{t_{n+1}} = f_0(t)\Big|_{-\infty}^{t_1} + f_1(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + f_2(t)\Big|_{t_2}^{t_3} + \ldots + f_k(t)\Big|_{t_k}^{t_{k+1}} + \ldots +$$

$$+ f_{n+1}(t)\Big|_{t_{n+1}}^{+\infty}. \qquad (1)$$

Так как спектр суммы функций равен сумме спектров этих функций, то

$$S_{f(t)} = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_k + \ldots + S_{n+1}, \qquad (2)$$

но

$$f_0(t)\Big|_{-\infty}^{t_1} = f_{n+1}(t)\Big|_{t_{n+1}}^{+\infty} = 0. \qquad (3)$$

Следовательно,

$$S_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 0; \qquad (4)$$

$$S_{n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 0. \qquad (5)$$

Спектры остальных функций $f_k(t)$ соответственно равны:

$$S_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\, e^{-j\omega t}\, dt; \qquad (6)$$

$$S_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{t_2}^{t_3} f_2(t)\, e^{-j\omega t}\, dt; \qquad (7)$$

. . . .

$$S_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_k(t)\, e^{-j\omega t}\, dt; \qquad (8)$$

. . . .

$$S_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_n(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \qquad (9)$$

Тогда спектр рассматриваемой функции $f(t)$ определяется

$$S_{f(t)} = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_k(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \qquad (10)$$

Но в результате аппроксимации на каждом участке функция представлена отрезком прямой (рис. 2). Следовательно,

$$f_k(t) = a_k t + b_k, \tag{11}$$

где a_k — угловой коэффициент;

b_k — отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат.

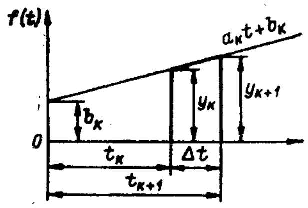

Рис. 2.

Тогда из (10) и (11) а спектр одного из участков нашей функции представляет собой спектр одиночного импульса, имеющего длительность Δt и ограниченного отрезком прямой $a_k t + b_k$. Пользуясь (8) и (11), вычислим этот спектр

$$S_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (a_k t + b_k)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{13}$$

После преобразования получим

$$S_k = \frac{e^{-jk\omega\Delta t}}{\omega}\left[e^{-j\omega\Delta t}\left(\frac{a_k}{\omega} + jy_{k+1}\right) - \left(\frac{a_k}{\omega} + jy_k\right)\right]. \tag{14}$$

Отсюда спектр всей функции $f(t)$ определяется

$$S_{f(t)} = \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{n} e^{-jk\omega\Delta t}\left[e^{-j\omega\Delta t}\left(\frac{a_k}{\omega} + jy_{k+1}\right) - \left(\frac{a_k}{\omega} + jy_k\right)\right]. \tag{15}$$

Эта формула дает возможность быстро определить спектр функции произвольного очертания, заданной графически.

Имея заданные функции возбуждения $\alpha(t)$ и отклика $\beta(t)$ системы, можно теперь найти их спектры, а следовательно, и частотную характеристику системы $K(j\omega)$ *.

Следует помнить, что обе функции должны быть изображены в одном масштабе. Если же при анализе определяется и фазо-частотная характеристика, то следует соблюдать равенство Δt.

Итак, частотная характеристика системы равна

$$K(j\omega) = \frac{\sum_{k=1}^{n} e^{-j\omega k\Delta t}\left[e^{-j\omega\Delta t}\left(\frac{a_{\beta_k}}{\omega} + jy_{\beta_{k+1}}\right) - \left(\frac{a_{\beta_k}}{\omega} + jy_{\beta_k}\right)\right]}{\sum_{k=1}^{n} e^{-j\omega k\Delta t}\left[e^{-j\omega\Delta t}\left(\frac{a_{\alpha_k}}{\omega} + jy_{\alpha_{k+1}}\right) - \left(\frac{a_{\alpha_k}}{\omega} + jy_{\alpha_k}\right)\right]}. \tag{16}$$

---

* А. А. Харкевич. Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1962.

Эта формула определяет частотную характеристику системы, если графически заданы возмущение на входе и соответствующий отклик (реакция) на выходе системы. Модуль частотной характеристики (амплитудно-частотная характеристика) определяется отношением модулей числителя и знаменателя.

Фазо-частотная характеристика определяется разностью углов сдвига фаз векторов $\overline{\omega S_{\alpha(t)}}$ и $\overline{\omega S_{\beta(t)}}$

$$\varphi(\omega) = \varphi_\beta - \varphi_\alpha. \tag{17}$$

Таким образом, определение частотной характеристики сводится к нахождению векторов числителя и знаменателя на каждой частоте ω_i с последующим вычислением частного.

Так как структуры формул числителя и знаменателя одинаковы, то и процедура их определения одна и та же. Следовательно, чтобы избавиться от различительных индексов α и β, мы можем рассматривать определение некоего вектора как

$$\overline{\omega S_{f(t)}} = \sum_{k=1}^{n} e^{-jk\omega\Delta t}\left[e^{-j\omega\Delta t}\left(\frac{a_k}{\omega} + jy_{k+1}\right) - \left(\frac{a_k}{\omega} + jy_k\right)\right]. \tag{18}$$

Производим эквидистантное разбиение исследуемой функции на n участков вдоль оси времени (см. рис. 1). Ось ординат проводится на расстоянии, равном Δt, слева от начала $f(t)$:

$$\Delta t = \frac{T}{n}, \tag{19}$$

где T — протяженность кривой по оси времени;

n — количество участков, на которые разбита кривая.

Затем на графике функции измеряются величины y_k и y_{k+1}, определяются $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ и заполняется табл. 1. После этого задаются частоты $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_i, \ldots$ и высчитываются $\omega_1\Delta t, \omega_2\Delta t, \ldots, \omega_i\Delta t, \ldots$

Зная Δy_k и $\omega_i \Delta t$, определяем $\frac{a_k}{\omega}$:

$$\frac{a_1}{\omega_1} = \frac{\Delta y_1}{\omega_1 \Delta t}, \quad \frac{a_2}{\omega_1} = \frac{\Delta y_2}{\omega_1 \Delta t}, \ldots, \frac{a_n}{\omega_1} = \frac{\Delta y_n}{\omega_1 \Delta t} \text{ для } f_1$$

и аналогично для других заданных частот. Затем заполняется табл. 2.

В формуле (18) выражения, заключенные в круглые скобки, суть векторные суммы. Сумма $\left(\frac{a_k}{\omega_i} + jy_{k+1}\right)$ изображена в виде векторной диаграммы на рис. 3, *а*. Так как действительные части векторных сумм одинаковы, то диаграммы этих сумм могут быть совмещены (см. рис. 3, *б*).

Для изображения $e^{-j\omega_i\Delta t}\left(\frac{a_k}{\omega_i} + jy_{k+1}\right)$ нужно векторную сумму $\left(\frac{a_k}{\omega_i} + jy_{k+1}\right)$ повернуть по часовой стрелке на угол $\omega_i \Delta t$ (см. рис. 3, *в*). На следующей диаграмме (см. рис. 3, *г*) определяется векторная разность

$$\overline{M} = \left[e^{-j\omega_i\Delta t}\left(\frac{a_k}{\omega_i} + jy_{k+1}\right) - \left(\frac{a_k}{\omega_i} + jy_k\right)\right]. \tag{20}$$

Таблица 1

k	y_k	y_{k+1}	Δy_k
1	y_1	y_2	Δy_1
2	y_2	y_3	Δy_2
3	y_3	y_4	Δy_3
4	y_4	y_5	Δy_4
n	y_n	y_{n+1}	Δy_n

Таблица 2

f_1		f_2		f_3	
ω_1	$\omega_1 \Delta t$	ω_2	$\omega_2 \Delta t$	ω_3	$\omega_3 \Delta t$
$k\,\omega_1 \Delta t$	$\frac{a_k}{\omega_1} = \frac{\Delta y_k}{\omega_1 \Delta t}$	$k\,\omega_2 \Delta t$	$\frac{a_k}{\omega_2} = \frac{\Delta y_k}{\omega_2 \Delta t}$	$k\,\omega_3 \Delta t$	$\frac{a_k}{\omega_3} = \frac{\Delta y_k}{\omega_3 \Delta t}$
$1\omega_1 \Delta t$	$\frac{\Delta y_1}{\omega_1 \Delta t}$	$1\omega_2 \Delta t$	$\frac{\Delta y_1}{\omega_2 \Delta t}$	$1\omega_3 \Delta t$	$\frac{\Delta y_1}{\omega_3 \Delta t}$
$2\omega_1 \Delta t$	$\frac{\Delta y_2}{\omega_1 \Delta t}$	$2\omega_2 \Delta t$	$\frac{\Delta y_2}{\omega_2 \Delta t}$	$2\omega_3 \Delta t$	$\frac{\Delta y_2}{\omega_3 \Delta t}$
$3\omega_1 \Delta t$	$\frac{\Delta y_3}{\omega_1 \Delta t}$	$3\omega_2 \Delta t$	$\frac{\Delta y_3}{\omega_2 \Delta t}$	$3\omega_3 \Delta t$	$\frac{\Delta y_3}{\omega_3 \Delta t}$
$4\omega_1 \Delta t$	$\frac{\Delta y_4}{\omega_1 \Delta t}$	$4\omega_2 \Delta t$	$\frac{\Delta y_4}{\omega_2 \Delta t}$	$4\omega_3 \Delta t$	$\frac{\Delta y_4}{\omega_3 \Delta t}$
$n\,\omega_1 \Delta t$	$\frac{\Delta y_n}{\omega_1 \Delta t}$	$n\,\omega_2 \Delta t$	$\frac{\Delta y_n}{\omega_2 \Delta t}$	$n\,\omega_3 \Delta t$	$\frac{\Delta y_n}{\omega_3 \Delta t}$

$f \rightarrow$

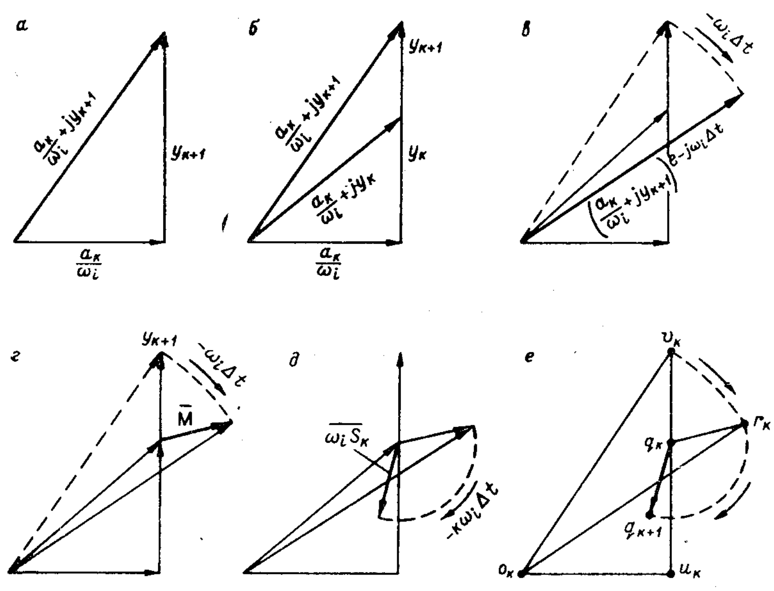

Рис. 3.

Поворачивая вектор $\overline{M}$ вокруг своего начала по часовой стрелке на угол $k\,\omega_i\,\Delta t$, получим вектор (см. рис. 3, *д*)

$$\overline{\omega_i S_k} = e^{-jk\omega_i\Delta t}\,\overline{M} = e^{-jk\omega_i\Delta t}\left[e^{-j\omega_i\Delta t}\left(\frac{a_k}{\omega_i} + jy_{k+}\ \right) - \left(\frac{a_k}{\omega_i} + jy_k\right)\right], \tag{21}$$

который является одним из n слагаемых искомой векторной суммы $\overline{\omega_i S_{f(t)}}$. Слагаемые $\overline{\omega_i S_1}$, $\overline{\omega_i S_2}, \ldots, \overline{\omega_i S_n}$ удобнее всего получать так, чтобы не требовалось их переносить и чтобы после окончания построения вектора $\overline{\omega_i S_n}$ достаточно было соединить начало $\overline{\omega_i S_1}$ с концом $\overline{\omega_i S_n}$ для получения векторной суммы $\overline{\omega_i S_{f(t)}}$ (рис. 4). Для этого все построение следует производить так, чтобы конец вектора jy_k (начало вектора $\overline{\omega_i S_k}$) совпадал с концом предыдущего вектора $\overline{\omega_i S_{k-1}}$ (точка q_k на рис. 3, *е*), а конец вектора jy_{k+1} (в построении для $\overline{\omega_i S_{k+1}}$) совпадал с концом вектора $\overline{\omega_i S_k}$ (точка q_{k+1}) и т. д. Таким образом, каждое построение вектора начинаем, задаваясь положением его начала — точкой q_k. Через точку q_k проводим вертикально отрезок прямой. От точки q_k вниз откладываем величину y_k (точка u_k), от точки u_k вверх — величину y_{k+1} (точка v_k).

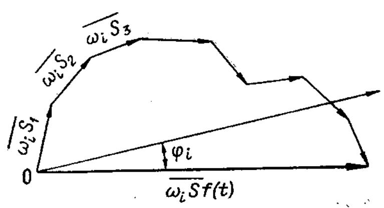

Рис. 4.

Через точку u_k проводим горизонтальную прямую, на которой влево откладываем ранее вычисленную величину $\frac{a_k}{\omega_i}$ (точка o_k). Отрезок $\overline{o_k v_k}$ вокруг точки o_k, как вокруг центра, поворачиваем по часовой стрелке на угол, равный $\omega_i\,\Delta t$ (точка r_k). Отрезок $\overline{q_k r_k}$ вокруг точки b_k, как вокруг центра, поворачиваем по часовой стрелке на угол, равный $k\omega\Delta t$. Получаем точку q_{k+1}. Отрезок $\overline{q_k q_{k+1}}$ является искомым вектором $\overline{\omega_i S_k}$, направленным к точке q_{k+1}. Точка q_{k+1}, являясь концом вектора $\overline{\omega_i S_k}$, одновременно является началом вектора $\overline{\omega_i S_{k+1}}$, для получения которого проводится аналогичное построение. Здесь все построения проводились с учетом того, что величины $\frac{a_k}{\omega_i}$, y_k и y_{k+1} являются положительными. Отрицательные величины, естественно, следует откладывать в противоположные стороны.

После определения $\overline{\omega_i S_n}$ — последнего из векторов $\overline{\omega_i S_k}$ на данной частоте ω_i — проводим замыкающий вектор $\overline{\omega_i S_{f(t)}}$ (см. рис. 4).

Проводя описанную выше операцию с обеими кривыми $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, находим:

$$\overline{\omega_i S_{\alpha(t)}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\omega_i S_{\alpha_k}}; \tag{22}$$

$$\overline{\omega_i S_{\beta(t)}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\omega_i S_{\beta_k}}. \tag{23}$$

Тогда коэффициент передачи по частоте ω_i равен

$$K_i(j\omega) = \frac{\overline{\omega_i S_{\beta(t)}}}{\overline{\omega_i S_{\alpha(t)}}} = \frac{|\overline{\omega_i S_{\beta(t)}}|\, e^{-j\varphi_{\beta_i}}}{|\overline{\omega_i S_{\alpha(t)}}|\, e^{-j\varphi_{\alpha_i}}} = K_i(\omega)\, e^{-j(\varphi_{\beta_i} - \varphi_{\alpha_i})}. \quad (24)$$

Здесь $K_i(\omega) = \dfrac{|\overline{\omega_i S_{\beta(t)}}|}{|\overline{\omega_i S_{\alpha(t)}}|}$ — амплитудно-частотная характеристика;

$\varphi_i(\omega) = \varphi_{\beta i} - \varphi_{\alpha_i}$ — фазо-частотная характеристика.

Повторяя определение величин $K_i(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ для ряда частот, можно получить частотные характеристики исследуемой системы.

ВЫВОДЫ

Рассмотренный метод прост и пригоден для практического исследования.

Метод не накладывает ограничений на частотный диапазон исследования системы, а частоты, для которых определяется коэффициент передачи, могут распределяться как угодно неравномерно по всему частотному диапазону.

К форме и стабильности испытательных импульсов особых требований не предъявляется. Это положение значительно упрощает конструирование установок для снятия частотных характеристик измерительных систем.

Поступила в редакцию
17 сентября 1965 г.,
окончательный вариант —
11 апреля 1966 г.