А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 5 1966

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

УДК 681.2.088

В. И. ПАМПУРО
(Киев)

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБОРОВ ПРИ БОЛЬШИХ ПРИРАЩЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТОВ

Статья посвящена выводу точного уравнения погрешности для больших приращений n параметров элементов, определяемого суммой n слагаемых — частных погрешностей.

Анализ погрешности приборов при известной зависимости выходного параметра A от параметров элементов x_j

$$A = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

обычно производится по уравнению погрешности [1—3]

$$\delta A = y_1 \delta x_1 + y_2 \delta x_2 + \dots + y_n \delta x_n, \quad (2)$$

где y_j — чувствительность по параметру x_j, равная нормированной частной производной [4]

$$y_j = \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{x_{j0}}{A_0} \quad (x_z = x_{z0};\ z = 1, 2, \dots, n);$$

$\delta A = \dfrac{A - A_0}{A_0}$ и $\delta x_j = \dfrac{x_j - x_{j0}}{x_{j0}}$ — относительные приращения;

A_0 и x_{j0} — номинальные значения параметров.

Иногда интуитивно пользуются членами первого и второго порядков малости разложения (1) в ряд Тейлора [5, стр. 245—248]. С повышением точности приборов возникает задача оценки степени точности применяемого линейного приближения (2) разложения (1) в ряд Тейлора для оценки погрешности. Частично эти вопросы рассмотрены в [6, 7], где делаются попытки анализа погрешности при больших приращениях*. При этом трудности решения резко возрастают. Чтобы решить

* Заметим, что правильно было бы говорить не о малых и больших приращениях, а о линейном и нелинейном уравнениях погрешности, так как при одних и тех же приращениях в зависимости от требуемой точности задача анализа погрешности может быть решена тем или иным уравнением погрешности.

вопрос о необходимости и целесообразности определения погрешности с нужной точностью, надо знать погрешность приближения.

Поэтому целесообразно для больших приращений иметь уравнение погрешности, по виду аналогичное уравнению (2), а именно:

$$\delta A = \varkappa_1 \delta x_1 + \varkappa_2 \delta x_2 + \ldots + \varkappa_n \delta x_n. \qquad (3)$$

В работе рассматривается возможность получения уравнения (3) и способы его определения.

В случае больших приращений параметров x_j ограниченная непрерывная функция (1) может быть разложена в ряд Тейлора вида

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} y_k \delta x_k + \frac{1}{f_{10}(\ )} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k0}\ \delta x_k \frac{\partial}{\partial x_{k0}} \right)^i f_{10}(\ ), \qquad (4)$$

где $f_{10}(\ ) = f_1(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$.

Чтобы перейти от (4) к (3), надо определить условия математически и физически однозначного преобразования (4) в (3). Условие математической однозначности выполняется, если (4) представляет абсолютно сходящийся ряд, который путем предельного перехода преобразуется в вид (3), т. е. в сумму n бесконечных элементарных рядов. При этом возможно множество видов однозначных группирований членов ряда (4). Например,

$$\varkappa_j = y_j + \frac{1}{\delta x_j f_{10}(\ )} \lim_{p \to \infty} \left[\sum_{i=2}^{p} \frac{1}{a_i\, i!} \left\{\ \right\} \right], \qquad (5)$$

где $a_i = C_n^i - C_{n-1}^i$ (C_n^i — число сочетаний из n по i); в сумму $\sum_{i=2}^{p} \frac{1}{a_i\, i!} \left\{\ \right\}$ входят все члены ряда $\sum_{i=2}^{p} \frac{1}{a_i\, i!} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k0}\ \delta x_k \frac{\partial}{\partial x_{k0}} \right)^i f_{10}(\ )$, содержащие множителем δx_j.

Условие физической однозначности требует выбора вида однозначного группирования членов ряда (4) в (3). Члены ряда (4) представляют произведения погрешностей δx_j на постоянные коэффициенты. Поэтому вид однозначного группирования удобно рассматривать на примере конечных произведений.

Пусть имеется функция $A = x_1 x_2$. Ее разложение в ряд (4) будет иметь вид

$$\delta A = \delta x_i + \delta x_2 + \delta x_1 \delta x_2. \qquad (6)$$

Приведение (6) к (3) в общем случае можно представить как

$$\delta A = (1 + a_1 \delta x_2)\, \delta x_1 + (1 + a_2 \delta x_1)\, \delta x_2 = \varkappa_1 \delta x_1 + \varkappa_2 \delta x_2,$$

где $\varkappa_1 = (1 + a_1 \delta x_2)$; $\varkappa_2 = (1 + a_2 \delta x_1)$; $a_1 + a_2 = 1$, причем a_1 и a_2 — величины постоянные.

Так как функция $A=x_1x_2$ симметричная, т. е. $A=x_1x_2=x_2x_1$, то должно быть симметричным и ее разложение*. Тогда имеют место тождества $1+a_1\delta x_1=1+a_2\delta x_1$, $1+a_2\delta x_2=1+a_2\delta x_2$, откуда $a_1=a_2$, и при $a_1+a_2=1$

$$\delta A = \left(1+\frac{1}{2}\delta x_2\right)\delta x_1 + \left(1+\frac{1}{2}\delta x_1\right)\delta x_2.$$

Смысл полученного выражения нетрудно уяснить на примере коэффициента передачи $K_д$ двухкаскадного усилителя, у которого каскады идентичны, т. е. коэффициенты K_1 и K_2 равны друг другу: $K_1=K_2=K$ и $\delta K_1=\delta K_2=\delta K$. Физически очевидно, что в таком случае влияние изменения коэффициента K каждого каскада на стабильность коэффициента $K_д$ одинаково. Это очевидно также из приведенного выше разложения, согласно которому функция $K_д=K_1K_2$ разлагается в ряд и приводится к виду (3) $\delta K_д = \varkappa_1\delta K_1+\varkappa_2\delta K_2$, где $\varkappa_1=\varkappa_2=1+\frac{1}{2}\delta K$.

В случае функции трех переменных $A=x_1x_2x_3$ целесообразным группированием ее разложения в ряд будет

$$\delta A = \left[1+\frac{1}{2}(\delta x_2+\delta x_3)+\frac{1}{3}(\delta x_2\,\delta x_3)\right]\delta x_1 + \left[1+\frac{1}{2}(\delta x_3+\delta x_2)+\frac{1}{3}(\delta x_3\delta x_2)\right]\delta x_2 + \left[1+\frac{1}{2}(\delta x_1+\delta x_2)+\frac{1}{3}(\delta x_1\delta x_2)\right]\delta x_3.$$

Указанный подход распространяется и на функцию n переменных

$$A = x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{7}$$

Как известно [8], ее относительное приращение равно

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} C^k_{(\delta x_1,\,\delta x_2,\,\ldots,\,\delta x_n)},$$

где символ $C^k_{(\delta x_1,\,\delta x_2,\,\ldots,\,\delta x_n)}$ обозначает сочетание из δx_1, $\delta x_2, \ldots$, δx_n по k.

По аналогии с предыдущим целесообразным видом группирования будет

$$\delta A = \left[1+\frac{1}{\delta x_1}\sum_{k=2}^{n} a_{1k}\, C^k_{1\,(\delta x_1,\,\delta x_2,\,\ldots,\,\delta x_n)}\right]\delta x_1 + \ldots + \left[1+\frac{1}{\delta x_n}\sum_{k=2}^{n} a_{nk}\, C^k_{n\,(\delta x_1,\,\delta x_2,\,\ldots,\,\delta x_n)}\right],$$

---

* Действительно, рассматривая функцию $B=\alpha_1\alpha_2$, найдем $\delta B=(1+a_1\delta\alpha_2)\delta\alpha_1+(1+a_2\delta\alpha_1)\delta\alpha_2$; полагая $\alpha_1=x_2$, $\alpha_2=x_1$ и $\delta\alpha_1=\delta x_1$, $\delta\alpha_2=\delta x_1$, получим $\delta A=\delta B$. Приравнивая коэффициенты перед одними и теми же переменными, найдем:

$$(1+a_1\delta x_2)=(1+a_2\delta x_2) \text{ и } (1+a_2\delta x_1)=(1+a_1\delta x_1),$$

откуда следует, что $a_1=a_2=\frac{1}{2}$.

где символ $C_j^k{}_{(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)}$ обозначает сочетание δx_j с δx_s $(s=1, 2, \ldots, n)$ по k. Число таких сочетаний равно $|C_n^k - C_{n-1}^k|$. Величины a_{jk} $(j=1, 2, \ldots, n)$ являются постоянными.

Производя n перестановок в (7) и приравнивая коэффициенты $\varkappa$ перед аргументом δx_j найдем систему p уравнений:

$$\left[1+\frac{1}{\delta x_1}\sum_{k=2}^{n} a_{1k}\, C_j^k{}_{(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)}\right]=$$

$$=\left[1+\frac{1}{\delta x_j}\sum_{k=2}^{n} a_{jk}\, C_j^k{}_{(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)}\right] \qquad (j=1, 2, \ldots, p),$$

где $p = C_n^k - C_{n-1}^k$.

Из полученной системы следует, что

$$a_{1k} = a_{2k} = \ldots a_{pk} = a_k,$$

а так как $\sum\limits_{k=1}^{p} a_{ki} = 1$, то

$$a_k = \frac{1}{p} = (C_n^i - C_{n-1})^{-1}. \tag{8}$$

Следовательно, разложение функции (7) в ряд (4) может быть приведено к виду (3), где

$$\varkappa_j = 1 + \frac{1}{\delta x_j}\sum_{k=2}^{n} a_k\, C_j^k{}_{(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)}. \tag{9}$$

Если функция A (7) содержит бесконечное число членов и является конечной, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n} x_k = \text{const}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n} x_k \neq 0$, то она может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд Тейлора и затем приведена к виду (3) путем предельного перехода.

Рассмотренный подход можно распространить и на любой другой вид нелинейной функции A в области абсолютной сходимости ее разложения в ряд Тейлора. В самом деле, рассматривая ряд (4), видим, что правая часть состоит из суммы произведений чувствительности y_k на относительное приращение δx_k и суммы произведений не зависящих от приращений коэфициентов на произведения приращений δx_k $(k=1, 2, \ldots, n)$. Причем в сумму входят приращения δx_k в разных степенях. Вводя новые переменные и обозначая $\delta x_k^p = \delta x_{k1}\delta x_{k2}\ldots\delta x_{kp}$, где $\delta x_{k1} = \delta x_{k2} = \delta x_{kp} = \delta x_k$, получим ряд (4) в виде

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} y_k\,\delta x_k + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\, b_{kp} = \prod_s \delta x_{js},$$

где b_{kp} — постоянные коэффициенты ряда (4).

Группируя подобные члены δx_{js} так, как это мы делали выше, и переходя к пределу, получим $\delta A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{\infty} \varkappa_{ks}\, \delta x_{ks}$. Учитывая тождества $\delta x_{k1} = \delta x_{k2} = \ldots = \delta x_{ks} = \delta x_k$ $(k = 1,\ 2, \ldots, n)$ и вытекающие отсюда тождества $\varkappa_{k1} = \varkappa_{k2} = \ldots = \varkappa_{ks} = \varkappa_k$ $(k = 1,\ 2, \ldots, n)$, после после приведения подобных и перехода к пределу получим выражение (3).

Так как разложение в ряд (4) функции (1) отличается от подобного разложения функции конечных произведений только наличием постоянных коэффициентов перед произведениями погрешностей δx_j, то указанный подход однозначного группирования элементов ряда (4) с помощью (5) можно считать общим, справедливым для любой функции, разлагаемой в абсолютно сходящийся ряд.

Сравнивая уравнение погрешности для малых приращений (2) с уравнением погрешности для больших приращений (3), учитывая выражение $\varkappa_j$ (5), видим, что первое линейно, а второе нелинейно. Коэффициент $\varkappa_j$ состоит из линейного члена чувствительности y_j и нелинейной части. В связи с нелинейностью уравнения (3) принцип наложения неприменим. Возможная оценка влияния нестабильности параметра x_j на стабильность выходного параметра A с помощью коэффициента $\varkappa_j$ будет рассмотрена дальше.

Итак, в общем виде решена задача однозначного математического и физического приведения (4) к (3).

В практическом отношении приведенные формулы малопригодны. Используя выражение сложной функции через основные элементарные [8], можно в значительной степени решить и практическую сторону задачи. Как показано в [8], относительные приращения элементарных функций $\frac{y}{x}$, $\prod_{j=1}^{n} x_j$, $\sum_{j=1}^{n} x_j$, x^n, ax, $\ln x$, a^x довольно просто выражаются через относительные приращения аргументов. Причем первые пять элементарных функций представляют частные случаи дробно-рациональной функции, а две последние сводятся практически к анализу погрешности дробно-рациональной функции.

Таким образом, анализ уравнения погрешности в случае дробно-рациональной функции A представляет большой практический интерес. Пусть задана непрерывная ограниченная дробно-рациональная функция

$$A = \frac{M}{N}, \tag{10}$$

где

$$M = \sum_{\varepsilon=1}^{r} \gamma_\varepsilon; \tag{11}$$

$$N = \sum_{y=1}^{s} \beta_y. \tag{12}$$

В свою очередь,

$$\gamma_\varepsilon = \prod_{q=1}^{t} x_{\varepsilon q}; \tag{13}$$

$$\beta_y = \prod_{p=1}^{e} x_{yp}. \tag{14}$$

Основные элементарные функции (11) и (12) связаны линейно со своими аргументами γ_ε и β_y, соответственно. Поэтому их разложение в ряд Тейлора (2) дает также линейные функции:

$$\delta M = \sum_{\varepsilon=1}^{r} \varkappa_{M\varepsilon}\, \delta \gamma_\varepsilon, \tag{15}$$

где

$$\varkappa_{M\varepsilon} = \frac{\gamma_{\varepsilon 0}}{M_0}; \tag{16}$$

$$\delta N = \sum_{y=1}^{s} \varkappa_{Ny}\, \delta \beta_y, \tag{17}$$

где

$$\varkappa_{Ny} \frac{\beta_{y0}}{N_0} \quad (y = 1,\ 2, \ldots ,\ s). \tag{18}$$

Как и раньше, нулевым индексом отмечены значения функций и аргументов, возле которых ведется разложение в ряд Тейлора.

Функции (13) и (14) ограничены и разлагаются в абсолютно сходящийся ряд Тейлора. Приведение полученных рядов к виду (3) было уже рассмотрено, т. е.

$$\delta \gamma_\varepsilon = \sum_{q=1}^{t} \varkappa_{\gamma_\varepsilon q}\, \delta x_{\varepsilon q}, \tag{19}$$

где

$$\varkappa_{\gamma_\varepsilon q} = 1 + \frac{1}{\delta x_{\varepsilon q}} \sum_{q=}^{t} a_q\, C^q_{q\,(\delta x_{\varepsilon 1},\, \delta x_{\varepsilon 2}, \ldots,\, \delta x_{\varepsilon t})} \quad (q = 1,\ 2, \ldots ,\ t); \tag{20}$$

$$\delta \beta_y = \sum_{p=1}^{e} \varkappa_{\beta_y p}\, \delta x_{yp}, \tag{21}$$

где

$$\varkappa_{\beta_y p} = 1 + \frac{1}{\delta x_{yp}} \sum_{q=2}^{e} a_q\, C^q_{p\,(\delta x_{y1},\ \delta x_{y2}, \ldots,\ \delta x_{ye})}. \tag{22}$$

Разлагая функцию (10) в ряд Тейлора, видим, что ряд сходится абсолютно в радиусе $-1 < \delta N < 1$. В более общем случае, когда разложение ведется в ряд Лорана, можно показать, что ряд сходится абсолютно всюду, исключая точки $\delta N = \pm 1$*. Таким образом, для устойчивой системы всегда можно обеспечить условие абсолютной сходимости разложения функции-коэффициента передачи A в абсолютно сходящийся ряд Лорана. Используя выражение (5), найдем

$$\delta A = \frac{1}{1+\delta N}\, \delta M - \frac{1}{1+\delta N}\, \delta N = \varkappa_{AM}\, \delta M + \varkappa_{AN}\, \delta N,$$

---

* Точку $\delta N = +1$ можно считать устранимой особой точкой, так как соответствующее значение функции конечно.

откуда

$$\varkappa_{AM} = -\varkappa_{AN} = \frac{1}{1+\delta N}. \qquad (23)$$

Согласно выражениям (23), (22), (18) и (16), приращение

$$\delta A = \varkappa_{AM} \sum_{\varepsilon=1}^{r} \varkappa_{M\varepsilon} \Big(\sum_{q=1}^{t} \varkappa_{\gamma q}\, \delta x_{\varepsilon q} \Big) + \varkappa_{AN} \sum_{y=1}^{s} \varkappa_{Ny} \Big(\sum_{p=1}^{e} \varkappa_{\beta p}\, \delta x_{yp} \Big)$$

после преобразования будет равно

$$\delta A = \Big[\varkappa_{AM} \Big(\sum_{\varepsilon=1}^{r} \varkappa_{M\varepsilon} \varkappa_{\gamma_\varepsilon 1} \Big) \delta x_{\varepsilon 1} + \ldots + \varkappa_{AM} \Big(\sum_{\varepsilon=1}^{r} \varkappa_{M\varepsilon} \varkappa_{\gamma_\varepsilon t} \Big)_{\delta x_{\varepsilon t}} \Big] +$$

$$+ \Big[\varkappa_{AN} \Big(\sum_{y=1}^{s} \varkappa_{Ny} \varkappa_{\beta_y} \Big) \delta x_{y1} + \ldots + \varkappa_{AN} \Big(\sum_{j=1}^{s} \varkappa_{Ny} \varkappa_{\beta y\, e} \Big) \delta x_{ye} \Big].$$

Дополним выражение в квадратных скобках членами δx_j до δx_n включительно $(j=1, 2, \ldots, n)$. С целью сохранения равенства будем полагать, что отсутствующие в первых или вторых квадратных скобках члены δx_α имеют нулевые значения коэффициентов $\varkappa_{\gamma_\varepsilon \alpha}$ и $\varkappa_{\beta_y \alpha}$. Тогда последнее выражение приводится к виду выражения (3), а коэффициент $\varkappa_j$ будет равен

$$\varkappa_j = \varkappa_{AM} \Big(\sum_{r=1}^{r} \varkappa_{M\varepsilon} \varkappa_{\gamma_\varepsilon j} \Big) + \varkappa_{AN} \Big(\sum_{j=1}^{s} \varkappa_{Nj} \varkappa_{\beta_y j} \Big) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \quad (24)$$

Таким образом, используя выражение (24), путем алгебраических преобразований можно получить совершенно точное уравнение погрешностей (3), где коэффициент $\varkappa_j$ служит оценкой влияния изменения параметра δx_j на стабильность параметра A. Полученная оценка $\varkappa_j$ коренным образом отличается от чувствительности, позволяя сделать только сравнительную оценку влияния нестабильности параметров x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$) относительно друг друга. Остановимся на этом более подробно. Подставляя в (24) выражение (23), видим, что у всех коэффициентов $\varkappa_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ знаменатель один и тот же, так как $\varkappa_{AM} = -\varkappa_{AN}$. Поэтому для сравнительной оценки влияния изменения параметров элементов достаточно сравнить числители выражения $\varkappa_j$. Когда дробно-рациональная функция A в числителе содержит один или сумму элементов x_k, числитель выражения $\varkappa_j$ не содержит приращений δx_k, что позволяет сделать сравнительную оценку в один этап, как в случае чувствительности. Практически с таким случаем встречаемся, например, при анализе стабильности однокаскадных усилителей, в числителе коэффициента усиления которых имеется один член или их сумма [9].

В тех случаях, когда числители коэффициентов $\varkappa_j$ включают в себя приращения δx_k, сравнительную оценку можно сделать в несколько этапов следующим образом. Подставляя выражение (12) в (22), найдем

$$\delta A = \varkappa_{AM} \sum_{\varepsilon=1}^{r} \varkappa_{M\varepsilon}\, \delta \gamma_\varepsilon + \varkappa_{AN} \sum_{y=1}^{\infty} \varkappa_{Ny}\, \delta\beta_y. \qquad (25)$$

Функциональное уравнение погрешности, согласно (3) и (24), будет определяться

$$\delta A = (\varkappa_{AM}\,\varkappa_{M1}\,\varkappa_{\gamma_1 K_1} + \varkappa_{AN}\,\varkappa_{N1}\,\varkappa_{\beta_1 K_1})\,\delta K_1 +$$

$$+ (\varkappa_{AM}\,\varkappa_{M1}\,\varkappa_{\gamma_1 K_2} + \varkappa_{AN}\,\varkappa_{N1}\,\varkappa_{\beta_1 K_2})\,\delta K_2 + \varkappa_{AN}\,\varkappa_{N1}\,\varkappa_{\beta_1\sigma}\,\delta\sigma.$$

Подставляя значения коэффициентов, найдем

$$\delta A = \frac{1 + \frac{1}{2} K_2 - B_0 \left[1 + \frac{1}{2}(\delta\sigma + \delta K_2) + \frac{1}{3}\delta\sigma\,\delta K_2\right]}{1 + \delta(1 + \sigma K_1 K_2)}\,\delta K_1 +$$

$$+ \frac{1 + \frac{1}{2}\delta K_1 - B_0 \left[1 + \frac{1}{2}(\delta\sigma + \delta K_1) + \frac{1}{3}\delta\sigma\,\delta K_2\right]}{1 + \delta(1 + \sigma K_1 K_2)}\,\delta K_2 -$$

$$- \frac{B_0 \left[1 + \frac{1}{2}(\delta K_1 + \delta K_2) + \frac{1}{3}\delta K_1\,\delta K_2\right]}{1 + \delta(1 + \sigma K_1 K_2)}\,\delta\sigma,$$

где

$$B_0 = \frac{\sigma_0 K_{10} K_{20}}{1 + \sigma_0 K_{10} K_{20}}.$$

Если петлевое усиление велико $|\sigma_0 K_{10} K_{20}| \gg 1$, то $B_0 \simeq 1$ как для отрицательной, так и для положительной обратной связи. Тогда

$$\delta(1 + \sigma K_1 K_2) \simeq \delta(\sigma K_1 K_2)$$

и уравнение погрешности принимает вид

$$\delta A = -\frac{\frac{1}{2}\delta\sigma + \frac{1}{3}\delta\sigma\,\delta K_2}{1 + \delta(\sigma K_1 K_2)}\,\delta K_1 - \frac{\frac{1}{2}\delta\sigma + \frac{1}{3}\delta\sigma\,\delta K_1}{1 + \delta(\sigma K_1 K_2)}\,\delta K_2 -$$

$$- \frac{1 + \frac{1}{2}(\delta K_1 + \delta K_2) + \frac{1}{3}\delta K_1\,\delta K_2}{1 + \delta(\sigma K_1 K_2)}\,\delta\sigma.$$

Из приведенного выражения видно, что при положительных относительных приращениях наибольшим влиянием обладает нестабильность σ-параметра (параметра цепи обратной связи). Если относительные приращения по модулю меньше единицы, то

$$\delta A \simeq -\frac{\frac{1}{2}\delta\sigma}{1 + \delta(\sigma K_1 K_2)}(\delta K_1 + \delta K_2) - \frac{1 + \frac{1}{2}(\delta K_1 + \delta K_2)}{1 + \delta(\sigma K_1 K_1)}\,\delta\sigma,$$

а погрешность приближения равна

$$\delta = -\frac{\frac{1}{3}\delta\sigma\,\delta K_2}{1 + \delta(\sigma K_1 K_2)}\,\delta K_1 - \frac{\frac{1}{3}\delta\sigma\,\delta K_1}{1 + \delta(\sigma K_1 K_2)}\,\delta K_2 - \frac{\frac{1}{3}\delta K_1\,\delta K_2\,\delta\sigma}{1 + \delta(\sigma K_1 K_2)}.$$

Так как коэффициенты $\varkappa_{AM}$ и $\varkappa_{AN}$ по модулю равны, то оценкой влияния приращений $\delta\gamma_\varepsilon$ и $\delta\beta_y$ будут коэффициенты $\varkappa_{M\varepsilon}$ и $\varkappa_{Ny}$. А так как коэффициенты $\varkappa_{M\varepsilon}$(13) и $\varkappa_{Ny}$ (15) не зависят от приращений, то можно сделать сравнительную оценку влияния приращений $\delta\gamma_\varepsilon$ и $\delta\beta_y$. В свою очередь, приращение $\delta\gamma_\varepsilon\,(\delta\beta_y)$ определяется как сумма сочетаний по одному, по два, . . . , по t из приращений элементов, входящих в выражение $\gamma_\varepsilon\,(\beta_y)$ как

$$\delta\,\gamma_\varepsilon = \sum_{q=1}^{t} C^{q}_{(\delta\,x_{\varepsilon 1},\ \delta\,x_{\varepsilon 2},\ \dots,\ \delta\,x_{\varepsilon\,t})}.$$

Очевидно, что в этой сумме наибольшим влиянием будет обладать максимальное по модулю приращение $\delta\,x_k$, так как модуль произведения приращений практически всегда меньше его в силу справедливости неравенства $|\delta\,x_k| \leqslant 1$. Зная функциональное уравнение погрешности (3) при больших приращениях параметров элементов, можно определить значения отклонения δA, используя метод максимума—минимума [6, 10]. Более строгий анализ требует перехода от функционального уравнения погрешности к вероятностному, чему будет посвящена отдельная работа.

Пример. Пусть имеется система с обратной связью, описываемая функцией

$$A = \frac{K_1\,K_2}{1+\sigma\,K_1\,K_2}.$$

Найдем функциональное уравнение погрешности при больших приращениях параметров K_1K_2 и σ. Учитывая равенства $M = K_1K_2$ и $N = 1+\sigma K_1K_2$, согласно (23), имеем

$$\varkappa_{AM} = -\,\varkappa_{AN} = \frac{1}{1+\delta\,(1+\sigma\,K_1\,K_2)}.$$

Числитель M содержит одно слагаемое, поэтому $M=\gamma_1$ $(M_0=\gamma_{10})$ и выражением $\varkappa_{M1}$ (16) будет $\varkappa_{M1}=\frac{\gamma_{10}}{M_0}=1\ (M_0=K_{10}\,K_{20})$. Произведение $\gamma_1=K_1K_2$. Согласно (20), $\varkappa_{\gamma_1}=\varkappa_{\gamma_1 K_1}=\left(1+\frac{1}{2}\,\delta\,K_2\right)$ и $\varkappa_{\gamma_2}=\varkappa_{\gamma_2 K_2}=1+\frac{1}{2}\delta\,K_1$. Выражение для коэффициента передачи содержит два слагемых $\beta_1 = \sigma K_1 K_2$ и $\beta_2 = 1$. Согласно (18),

$$\varkappa_{N1} = \frac{\beta_{10}}{N_0} = \frac{\sigma_0\,K_{10}\,K_{20}}{1+\sigma_0\,K_{10}\,K_{20}};\qquad \varkappa_{N2} = \frac{\beta_{20}}{N_0} = \frac{1}{1+\sigma_0\,K_{10}\,K_{20}}.$$

Относительное приращение $\delta\beta_2=0$; приращение $\delta(1+\sigma K_1K_2 = \varkappa_{N1}\,(\varkappa_{\beta_1\sigma}\,\delta\,\sigma + \varkappa_{\beta_1 K_1}\,\delta\,K_1 + \varkappa_{\beta_2 K_2}\,\delta\,K_2)$, где, согласно (22), $\varkappa_{\beta_1\sigma} = 1 + \frac{1}{2}(\delta\,K_1+\delta\,K_2)+\frac{1}{3}\delta\,K_1\,\delta\,K_2$; $\varkappa_{\beta_1 K_1} = 1+\frac{1}{2}(\delta\,\sigma+\delta\,K_2)+\frac{1}{3}\,\delta\,\sigma\,\delta\,K_2$; $\varkappa_{\beta_1 K_2} = 1+\frac{1}{2}\,(\delta\,\sigma+\delta\,K_1)+\frac{1}{3}\,\delta\,\sigma\,\delta\,K_1$.

Как числовые значения погрешности δA, так и погрешности приближения δ при известных исходных данных могут быть определены по методу максимума — минимума, как показано в [6] или [10]. Оценка погрешности приближения δ в сравнении с погрешностью δA при заданной точности позволяет сделать вывод о допустимости указанного приближения. Более точный ответ на поставленный вопрос дает последующий вероятностный анализ.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Коротков, Б. А. Тайц. Основы метрологии и точности механизмов приборов. М., Машиздат, 1961.
2. Н. Г. Бруевич, Б. Г. Доступов. Основы теории счетно-решающих устройств. М., изд-во «Советское радио», 1964.
3. М. Л. Быховский. Основы динамической точности электрических и механических цепей. М., Изд-во АН СССР, 1958.
4. Г. Боде. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. М.—Л., Изд-во иностр. лит., 1948.
5. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., Машиздат, 1958.
6. S. L. Hakimi, I. B. Grus. Measure of Sensitivety for Linear System with Large Multiple Parameter Variations.— IRE Wescon Convention Record, 1960, P. II, pp. 109—122.
7. Ю. М. Туз. Исследование и разработка электронных компенсационных преобразователей переменного тока. Автореф. канд. дисс. Киев, 1965.
8. В. И. Пампуро. Теоремы приращения функции при вариации аргументов.— Математическое моделирование и электрические цепи. Киев, Изд-во АН УССР, 1965.
9. В. И. Пампуро. Стабильность однокаскадных апериодических усилителей низкой частоты.— Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 8.
10. В. И. Пампуро. Основные положения методов граничных испытаний. Киев, КДНТП, 1965.

Поступила в редакцию
31 января 1966 г.