А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 5 1966

УДК 62—503

В. А. ВИТТИХ
(*Новосибирск*)

ОЦЕНКА СРЕДНЕГО КОЭФФИЦИЕНТА СЖАТИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ АДАПТИВНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПО АЛГОРИТМАМ ЛЕЖАНДРОВСКОГО ТИПА

Получена оценка коэффициента сжатия сигналов, дискретизируемых по алгоритмам адаптивной дискретизации лежандровского типа, и исследована зависимость коэффициента сжатия от допустимой ошибки приближения и максимальной степени аппроксимирующего полинома.

На этапе проектирования измерительной системы, предназначенной для исследования сложных объектов, необходимо решать ряд задач по обработке данных, в частности, по сокращению объема измерительной информации. Естественно, что наиболее эффективная измерительная система может быть построена при условии, когда известны основные характеристики отдельных ее элементов. Основным показателем функционирования аппаратуры для сокращения объема информации является средний коэффициент сжатия, который может быть получен при обработке измерительных сигналов данного класса.

Методы адаптивной дискретизации являются одними из эффективных среди методов сокращения объема измерительной информации. В [1] изложен один из алгоритмов адаптивной дискретизации, основанный на использовании ортогональных полиномов Лежандра (алгоритм адаптивной дискретизации лежандровского типа).

В этой статье найдена оценка среднего коэффициента сжатия, получаемого при дискретизации измерительных сигналов по алгоритму адаптивной дискретизации лежандровского типа, и исследована зависимость коэффициента сжатия от максимальной степени аппроксимирующего полинома Лежандра для гауссовского стационарного случайного процесса.

* * *

Пусть $F(t)$ — стационарный случайный процесс с известной корреляционной функцией $B(\tau)$ и математическим ожиданием m. Предполагается, что существует $n+1$ производная $F^{(n+1)}(t) = Y_{n+1}(t)$ процесса и известна ее функция распределения $w(y_{n+1})$.

Любая реализация $f(t)$ процесса $F(t)$ может быть представлена рядом с коэффициентами Котельникова, являющимися отсчетами непрерывной функции $f(t)$ через равные промежутки времени $\frac{1}{2\nu_{max}}$. Такая дискретизация наиболее часто применяется в измерительных и телеметрических системах, а также в системах централизованного контроля. Причем максимальная частота ν_{max} выбирается из условия минимальной погрешности дискретизации.

Если сигнал $f(t)$ задан на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, то число отсчетов на этом отрезке будет равно $s_k = 2T\nu_{max}$. Пусть каждый отсчет $f(t_k)$ сигнала представляется числом с g_k значащими цифрами; тогда число двоичных разрядов, необходимое для кодирования каждого отсчета, будет равно

$$l_k = g_k \frac{\ln 10}{\ln 2},$$

а общее число двоичных разрядов, требуемое для передачи всего сигнала, будет определяться выражением

$$s = s_k l_k = 2T\nu_{max} g_k \frac{\ln 10}{\ln 2}, \text{ \textit{бит}}.$$

Для восстановления сигнала после его дискретизации по алгоритму дискретизации лежандровского типа необходимо знать $n+1$ коэффициент разложения c_i сигнала в ряд Фурье — Лежандра и величину отрезка аппроксимации Δt. Причем коэффициенты c_i должны быть известны с большей точностью, чем отсчеты сигнала $f(t_k)$, взятые в соответствии с теоремой Котельникова, поскольку аппроксимирующая функция $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i X_i(x)$ получается с некоторой погрешностью, связанной с действиями над приближенными числами c_i. Заметим, что точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных значащих цифр [2]. Допустим, что все g_k цифр в отсчетах $f(t_k)$ верные. Необходимо, чтобы погрешности восстановления сигнала при обоих способах дискретизации были равны. Поскольку при выполнении приближенных вычислений число значащих цифр промежуточных результатов не должно превышать числа верных цифр более чем на одну или две единицы [2], число значащих цифр коэффициентов Фурье — Лежандра будет равно

$$g_c = g_k + 2.$$

Таким образом, каждый коэффициент c_i будет представляться кодовой полосой, содержащей

$$l_c = g_c \frac{\ln 10}{\ln 2} = (g_k + 2) \frac{\ln 10}{\ln 2}, \quad \text{\textit{бит}}.$$

Если для кодирования отрезка времени Δt необходимо также l_c *бит*, то общее число двоичных разрядов, необходимое для передачи коэффициентов c_i и отрезков аппроксимации Δt, будет равно

$$g = (n+2)\, l_c \alpha_0 = (n+2)(g_k+2)\, \alpha \frac{\ln 10}{\ln 2},$$

где α_0 — среднее число отрезков аппроксимации, на которое разбит весь интервал $[0, T]$.

Средний коэффициент сжатия определим как

$$K = \frac{s}{g} = \frac{2T\,\nu_{\max}}{(n+2)\,\alpha_0}\;\frac{g_k}{g_k+2}. \qquad (1)$$

Поскольку

$$\alpha_0 = \frac{T}{\Delta t_0},$$

где Δt_0 — средняя длина отрезка аппроксимации, то (1) можно переписать в виде

$$K = \frac{2\nu_{\max}\,\Delta t_0}{(n+2)}\;\frac{g_k}{g_k+2}.$$

В дальнейшем нам понадобится другое выражение для коэффициента сжатия

$$K = \frac{2\nu_{\max}}{(n+2)\,N_0}\;\frac{g_k}{g_k+2}, \qquad (2)$$

где $N_0 = \frac{1}{\Delta t_0}$ — средняя частота отрезков аппроксимации.

Максимальная ошибка приближения ε_m функции $f(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ отрезком ряда

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\,X_i(x)$$

($X_i(x)$-й полином Лежандра) определяется соотношением [3]

$$\varepsilon_m = \frac{1{,}5\,M_{n+1}\sqrt{n+1}}{2^n\,(n+1)!}, \qquad (3)$$

где M_{n+1} — модуль-максимум $(n+1)$-й производной на отрезке $[-1,1]$.

Сигнал в реальном времени задан на отрезке $-\frac{\Delta t}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta t}{2}$ длины Δt. Заменой переменной по формуле

$$x = \frac{2}{\Delta t}\,t$$

отрезок $[-1,1]$ может быть приведен к отрезку $\left[-\frac{\Delta t}{2},\ \frac{\Delta t}{2}\right]$. Воспользовавшись правилом замены переменных в дифференциальных выражениях, получим:

$$f'(x) = \frac{\Delta t}{2}\,f'(t);$$

$$f''(x) = \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 f''(t);$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^n f^{(n)}(t).$$

Очевидно, что

$$M_{n+1} = \max_{-1 < x < 1} |f^{(n+1)}(x)| = \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{n+1} \max_{-\frac{\Delta t}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta t}{2}} |f^{(n+1)}(t)|. \quad (4)$$

Из (4) получим

$$N = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{2\sqrt[n+1]{M_{n+1}}} \sqrt[n+1]{\max_{-\frac{\Delta t}{2} < t < \frac{\Delta t}{2}} |f^{(n+1)}(t)|}.$$

Математическое ожидание частоты N будет равно

$$m[N] = N_0 = \frac{1}{2\sqrt[n+1]{M_{n+1}}} m\left[\sqrt[n+1]{\max_{-\frac{\Delta t}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta t}{2}} |f^{(n+1)}(t)|}\right].$$

При малых допустимых погрешностях приближения отрезки Δt будут малы, поэтому можно считать, что распределение max $|f^{(n+1)}(t)|$ приближенно совпадает с распределением $|f^{(n+1)}(t)|$. Тогда

$$N_0 = \frac{1}{2\sqrt[n+1]{M_{n+1}}} m\left[\sqrt[n+1]{|y_{n+1}|}\right],$$

где $|y_{n+1}|$ — модуль $(n+1)$-й производной.

Учитывая, что $\sqrt[n+1]{|y_{n+1}|}$ — довольно монотонная функция, и предполагая, что дисперсия y_{n+1} невелика, можно записать [4]

$$N_0 = \frac{1}{2} \sqrt[n+1]{\frac{m[|y_{n+1}|]}{M_{n+1}}}. \quad (5)$$

На выбранном отрезке аппроксимации максимальная ошибка приближения ε_m равна допустимой $\varepsilon_д$. С учетом этого из (3) можно определить модуль-максимум $(n+1)$-й производной

$$M_{n+1} = \frac{2^{n+1}(n+1)!\,\varepsilon_д}{1\sqrt{n+1}}. \quad (6)$$

Подставив (5) и (6) в (2), получим

$$K = \frac{8\nu_{\max}}{n+2} \frac{g_k}{g_k+2} \sqrt[n+1]{\frac{(n+1)!\,\varepsilon_д}{3\sqrt{n+1}\; m[|y_{n+1}|]}}. \quad (7)$$

Пусть $F(t)$ — нормальный случайный процесс. Известно [5], что в этом случае все его производные также нормальны и имеют нулевые математические ожидания. Закон распределения модуля $(n+1)$-й производной имеет вид

$$w(|y_{n+1}|) = \frac{2}{\sigma_{n+1}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{|y_{n+1}|}{2\sigma^2_{n+1}}},$$

где σ_{n+1} — среднеквадратическое отклонение $(n+1)$-й производной.

Математическое ожидание модуля $(n+1)$-й производной будет равно

$$m[|y_{n+1}|] = \int_0^\infty |y_{n+1}| \, w(|y_{n+1}|) \, d|y_{n+1}| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{n+1}. \qquad (8)$$

Подставив (8) в (7), получим

$$K = \frac{8\nu_{max}}{n+2} \frac{g_k}{g_k+2} \sqrt[n+1]{\sqrt{\frac{\pi}{18}} \frac{(n+1)! \, \varepsilon_д}{\sqrt{n+1} \, \sigma_{n+1}}}. \qquad (9)$$

Корреляционная функция $B_{n+1}(\tau)$ $(n+1)$-й производной случайного процесса $F(t)$ определяется выражением [6]

$$B_{n+1}(\tau) = (-1)^{n+1} B^{(2n+2)}(\tau),$$

из которого можно определить среднеквадратическое отклонение $(n+1)$-й производной

$$\sigma_{n+1} = \sqrt{|B^{(2n+2)}(0)|}. \qquad (10)$$

Учитывая (10), (9) можно переписать в виде

$$K = \frac{8\nu_{max} g_k}{(n+2)(g_k+2)} \sqrt[n+1]{\sqrt{\frac{\pi}{18}} \frac{(n+1)! \, \varepsilon_д}{\sqrt{(n+1) \, |B^{(2n+2)}(0)|}}}. \qquad (11)$$

Исследуем зависимость коэффициента сжатия K от максимальной степени n аппроксимирующего полинома Лежандра. Для этого необходимо знать, как изменяется $(2n+2)$-я производная корреляционной функции в точке $\tau=0$ с увеличением n. Поэтому нам придется выбрать для $B(\tau)$ аналитическое выражение. Пусть, например, $B(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{\lambda}{2}\tau^2}$, тогда $|B^{(2n+2)}(0)| = \sigma^2 \lambda^{n+1} [2(n+1)-1]!!$. Теперь (11) можно записать как

$$K = \frac{A}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{p+1} \sqrt[p]{\frac{\Theta \, p!}{\sqrt{p \, (2p-1)!!}}}, \qquad (12)$$

где

$$A = \frac{8\nu_{max} g_k}{g_k+2}; \quad \Theta = \sqrt{\frac{\pi}{18}} \frac{\varepsilon_д}{\sigma} = 0{,}415 \frac{\varepsilon_д}{\sigma}; \quad p = n+1.$$

Найдем

$$\lim_{p\to\infty} K = \frac{A}{\sqrt{\lambda}} \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p+1} \sqrt[p]{\frac{\Theta \, p!}{\sqrt{p}\sqrt{(2p-1)!!}}}.$$

Учитывая то, что при $p \to \infty$ справедливы соотношения [7]:

$$p! = p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p};$$

$$(2p-1)!! = \sqrt{2} \, (2p)^p e^{-p},$$

получим $\lim\limits_{p\to\infty} K = \lim\limits_{n\to\infty} K = 0$. Перепишем (12) в виде

$$K(p) = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}\, U(p)\, V(p),$$

где

$$U(p) = \sqrt[p]{\frac{\pi}{18}\,\frac{\varepsilon_д}{\sigma}};$$

$$V(p) = \frac{1}{p+1}\sqrt[p]{\frac{p!}{\sqrt{p\,(2p-1)!!}}}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $V(p)$ монотонно уменьшается от своего максимального значения $V(1) = 0{,}5$ до нуля, в то время как $U(p)$ при $\varepsilon < 2{,}41\,\sigma$ является возрастающей функцией. При достаточно малых допустимых погрешностях $\varepsilon_д$ функция $K(p)$ в некоторых пределах изменения $p = n+1$ может быть возрастающей функцией.

На рис. 1 представлены кривые коэффициента сжатия $K^*(n) = \dfrac{K(n)\sqrt{\lambda}}{A}$ в функции от n при различных допустимых ошибках приближения $\varepsilon_д$, а на рис. 2 — кривые $K^*(\varepsilon_д) = \dfrac{K(\varepsilon_д)\sqrt{\lambda}}{A}$ в функции от $\varepsilon_д$ при $n = 0$, 1, 2, 3. Мы ограничились максимальной степенью аппроксимирующего полинома Лежандра $n = 3$, поскольку на практике использование полиномов более высоких степеней будет затруднительно из-за необходимости $(n+1)$-кратного интегрирования сигнала.

Из рис. 1 и 2 видно, что если $\varepsilon_д < 0{,}4\,\sigma$, кривые $K^*(n)$ монотонно возрастают, а если $0{,}4\,\sigma < \varepsilon_д < 0{,}6\sigma$, они имеют максимумы при $n = 2$. С дальнейшим увеличением $\varepsilon_д$ от $0{,}6\,\sigma$ до $0{,}85\,\sigma$ максимум $K^*(n)$ имеет место при $n = 1$ и только при $\varepsilon_д > 0{,}85$ кривая $K^*(n)$ монотонно падает. Это объясняется тем, что задание допустимых погрешностей приближения, соизмеримых со среднеквадратическим отклонением сигнала, приводит к тому, что локальные (дифференциальные) свойства сигнала практически не учитываются и использование полиномов даже первой

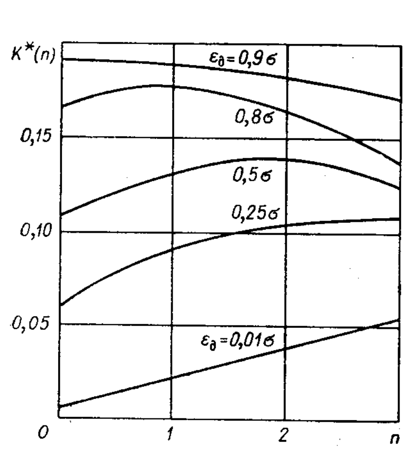

Рис. 1.

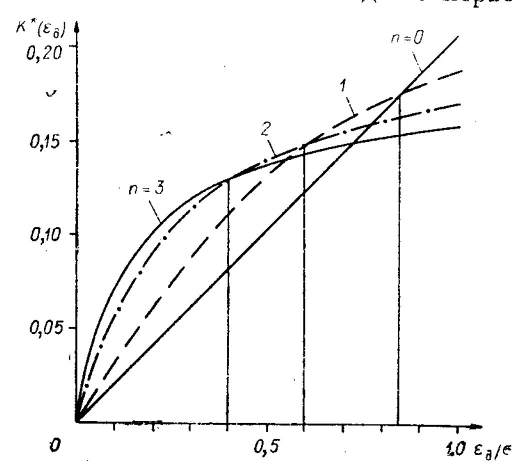

Рис. 2.

и второй степени приводит к появлению на выходе дискретизатора избыточной информации. В таких условиях контроль средних значений c_0 сигнала $f(t)$

$$c_0 = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} f(t)\, dt$$

за промежуток времени $\left[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}\right]$ дает наилучшие результаты.

Мы рассмотрели вопрос оценки коэффициента сжатия в предположении, что сигнал $f(t)$ без помех. Представляется интересным исследовать влияние помех, которыми сопровождается сигнал, на величину коэффициента сжатия, получаемого при адаптивной дискретизации. Решить эту задачу в общем виде для широкого класса помех чрезвычайно затруднительно, если мы хотим получить формулы, удобные для анализа. Пусть помеха $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию

$$B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\frac{\lambda_\xi}{2}\tau^2},$$

т. е. такую же, как и корреляционная функция полезного сигнала $f(t)$

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{\lambda}{2}\tau^2}.$$

При этом будем предполагать, что процессы $f(t)$ и $\xi(t)$ статистически независимы, помеха более высокочастотна и менее коррелирована, чем полезный сигнал $(\lambda_\xi > \lambda)$, а отношение мощности сигнала к мощности помехи

$$\eta = \frac{\sigma^2}{\sigma_\xi^2},$$

по крайней мере, не меньше двух.

Поскольку при сложении некоррелированных случайных функций их корреляционные функции складываются [8], то корреляционная функция процесса

$$\Psi(t) = f(t) + \xi(t)$$

будет равна

$$B_\Psi(\tau) = B(\tau) + B_\xi(\tau).$$

Вычислим модуль $(2n+2)$-й производной корреляционной функции процесса $\Psi(t)$ в точке $\tau=0$:

$$|B_\Psi^{(2n+2)}(0)| = |B^{(2n+2)}(0) + B_\xi^{(2n+2)}(0)| =$$

$$= \sigma^2 \lambda^{n+1} [2(n+1) - 1]!! \left(1 + \frac{\beta^{n+1}}{\eta}\right), \qquad (13)$$

где $\eta = \frac{\sigma^2}{\sigma_\xi^2}$ — отношение мощности сигнала к мощности помехи: $\beta = \frac{\lambda_\xi}{\lambda}$.

С учетом того, что

$$\sigma^2 \lambda^{n+1} [2(n+1) - 1]!! = |B^{(2n+2)}(0)|,$$

(13) можно переписать в виде

$$|B_{\Psi}^{(2n+2)}(0)| = |B_{\eta}^{(2n+2)}(0)| \left(1 + \frac{\beta^{n+1}}{\eta}\right). \qquad (14)$$

где K — коэффициент сжатия, получаемый при адаптивной дискретизации полезного сигнала $f(t)$.

Таким образом, помеха $\xi(t)$ уменьшает коэффициент сжатия полезного сигнала $f(t)$ в $\gamma = \sqrt[2n+2]{1 + \frac{\beta^{n+1}}{\eta}}$ раз.

Рассмотрим, как изменяется γ в функции от максимальной степени n аппроксимирующего полинома. Для этого прежде всего найдем предел $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma(n)$. Нетрудно видеть, что он равен $\sqrt{\beta}$. Теперь необходимо установить: функция $\gamma(n)$ является возрастающей или падающей. С этой целью выясним: больше или меньше единицы отношение предельного значения $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma = \sqrt{\beta}$ к значению γ при произвольном n

$$\mu = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt[2n+2]{1 + \frac{\beta^{n+1}}{\eta}}} = \sqrt[2n+2]{\frac{1}{\frac{1}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\eta}}}.$$

Введем в рассмотрение эффективную протяженность $\Delta\nu$ спектральной плотности мощности $G(\omega)$ [9].

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi G(0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, d\omega. \qquad (15)$$

Спектральная плотность мощности процесса с корреляционной функцией $B(\tau)\, \sigma^2 e^{-\frac{\lambda}{2}\tau^2}$ будет равна

$$G(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi}}\, \sigma^2 e^{-\frac{\omega^2}{2\lambda}}.$$

Отсюда находим:

$$G(0) = \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi}}\, \sigma^2; \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, d\omega = 2\sigma^2.$$

Подставив эти значения в (15), получим

$$\Delta\nu = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}.$$

Отношение эффективной ширины спектра помехи $\Delta\nu_{\xi}$ к эффективной ширине спектра сигнала $\Delta\nu$ определяется как

$$\frac{\Delta\nu_{\xi}}{\Delta\nu}\sqrt{\frac{\lambda_{\xi}}{\lambda}} = \sqrt{\beta},$$

откуда

$$\beta = \frac{\lambda_{\xi}}{\lambda} = \left(\frac{\Delta\nu_{\xi}}{\Delta\nu}\right)^2.$$

Адаптивные дискретизаторы лежандровского типа целесообразно использовать в случаях, когда сигнал сопровождается более высокочастотными случайными помехами. Если принять, что $\frac{\Delta\nu_{\xi}}{\Delta\nu} > \sqrt{2}$, то $\beta > 2$ и, следовательно, $\mu > 1$ (необходимо учесть, что $\eta > 2$).

Таким образом, при высказанных условиях γ в функции от n является возрастающей функцией, т. е. одна и та же помеха в большей степени уменьшает коэффициент сжатия при использовании полиномов высших степеней. Заметим, что этот вывод согласуется с экспериментальными исследованиями, результаты которых изложены в [1].

ВЫВОДЫ

При допустимых ошибках приближения, значительно меньших среднеквадратического отклонения сигнала, с ростом максимальной степени аппроксимирующего полинома Лежандра коэффициент сжатия увеличивается. В случае, когда допустимые ошибки соизмеримы со среднеквадратическим отклонением, при увеличении максимальной степени полинома коэффициент сжатия уменьшается и наилучшие результаты получаются при аппроксимации полиномом нулевой степени.

Чем более коррелирован процесс и чем больше отношение сигнал/помеха, тем большие коэффициенты сжатия могут быть получены.

С увеличением максимальной степени аппроксимирующего полинома помехоустойчивость адаптивных дискретизаторов лежандровского типа уменьшается.

В заключение автор выражает благодарность канд. техн. наук В. М. Ефимову и А. Н. Гинзбургу за ряд ценных замечаний, высказанных при обсуждении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Виттих. Исследование помехоустойчивости некоторых типов дискретизаторов измерительных сигналов.— Автометрия, 1965, № 6.
2. Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1963.
3. V. A. Stekloff. Sur l'approx. des fonct. à l'aide des polyn. de Tchebyshef et sur les quadratures, II.— ИАН, 1917, № 11, pp. 535—666.
4. Я. Б. Шор. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., изд-во «Советское радио», 1962.

5. Д. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи, т. I. М., изд-во «Советское радио», 1961.
6. Б. Р. Левин. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М., изд-во «Советское радио», 1960.
7. Математический анализ. (Функции, пределы, ряды, цепные дроби).— СМБ. М., Физматгиз, 1961.
8. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
9. А. А. Харкевич. Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
24 сентября 1965 г.