А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

УДК 621.317.019.3

Б. В. КАРПЮК, Н. Ф. ШМОЙЛОВ
(Новосибирск)

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В статье на примере простейшего делителя напряжения рассмотрены способы определения оптимальных номинальных значений параметров элементов измерительных систем. Критерием оптимальности является максимум вероятности нахождения изображающей точки в области работоспособности системы.

При исследовании надежности измерительных приборов и систем необходимо учитывать (наряду с внезапными отказами элементов) постепенные изменения параметров элементов, которые могут привести к нарушению нормальной работы (например, к выходу из заданного класса точности) прибора или системы [1]. Следует отметить, что для приборов отказы типа выхода из класса составляют примерно 95% от всех отказов [2]. Актуальность задачи анализа и прогнозирования надежности систем с учетом постепенных отказов их элементов не вызывает сомнений, однако существующие методы решения этой задачи не позволяют считать ее полностью решенной.

В настоящее время разработаны методы анализа надежности устройств при постепенных отказах элементов [3], причем многие из них базируются на теории точности [1, 4, 5]. Эти методы позволяют определять погрешности или вероятностные характеристики (например, законы распределения или их числовые характеристики) выходных параметров устройств или систем по известным (заданным) погрешностям или вероятностным характеристикам параметров элементов этих устройств. Однако более трудной и, пожалуй, более важной является задача синтеза надежных измерительных устройств, для решения которой пока еще нет достаточно эффективных и удобных методов. Эта задача, в частности, может быть сформулирована следующим образом: по заданному допуску на выходные параметры устройства определить значения параметров элементов так, чтобы при их изменении вероятность того, что выходные параметры останутся в допустимых пределах, была максимальной.

Пусть измерительное устройство или отдельный функциональный блок измерительной системы характеризуется некоторыми выходными параметрами y_i и известна функциональная связь y_i с параметрами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов, входящих в состав этого блока, т. е. известны зависимости вида $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Кроме того, заданы (например в технических условиях) допустимые пределы изменения y_i и некоторые условия, ограничивающие выбор значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти условия математически выражаются обычно в виде определенной системы неравенств. Используя ограничения, налагаемые на y_i и $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в n-мерном пространстве параметров элементов определяется область допустимых значений этих параметров — область работоспособности устройства или блока. В общем случае определение области работоспособности проектируемого устройства представляет собой довольно сложную задачу, которую необходимо решать аналитическими методами или путем моделирования. Следует отметить, что область работоспособности уже спроектированных и изготовленных устройств может быть определена экспериментально с помощью граничных или матричных испытаний [6, 7], однако проведение этих испытаний и обработка результатов также является трудоемким и длительным процессом.

Следующий этап решения задачи — определение области возможных значений параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Так как параметры $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются, вообще говоря, случайными функциями, то для определения области возможных значений параметров необходимо располагать соответствующими данными, которые полностью описывают свойства и поведение случайных функций. Следует отметить, что во многих случаях, встречающихся на практике, достаточно ограничиться представлением параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в виде случайных величин. При этом определение области возможных значений параметров элементов устройства существенно упрощается, так как вся необходимая информация о параметрах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ содержится в их законах распределения.

Зная области допустимых и возможных значений параметров, необходимо далее выбрать первоначальные значения $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ так, чтобы вероятность того, что y будет находиться в допустимых пределах, была максимальной. Способ выбора и расчета оптимальных значений $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ во многом зависит от соотношений между областями допустимых и возможных значений параметров*. Возникающие при этом различные случаи, а также другие особенности указанных соотношений удобно рассмотреть на конкретном примере какого-либо измерительного устройства или блока.

В качестве такого примера нами взят простейший линейный омический делитель напряжения (рис. 1). При этом мы руководствовались следующими соображениями: 1) иллюстрация на простом примере является очень наглядной, так как не загромождается излишними математическими выкладками; 2) делители напряжения являются весьма распространенными элементами измерительных устройств; 3) многие более сложные схемы делителей можно привести к виду схемы рис. 1.

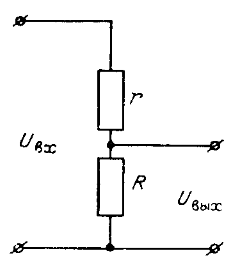

Рис. 1.

Основной характеристикой (выходным параметром) делителя является коэффициент деления

$$n = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{R}{r + R}. \tag{1}$$

Допустимые пределы изменения n запишем в виде неравенств

$$n_0 (1 - \delta) \leqslant n \leqslant n_0 (1 + \delta), \tag{2}$$

* Три основные ситуации, рассмотренные ниже, позволяют общую задачу конкретизировать до практически полезных способов определения оптимальных номинальных значений параметров элементов.

где n_0 — номинальное значение n;

δ — относительная погрешность коэффициента деления.

Подставляя значение n из (1) в (2) и оставляя только знаки равенства в (2), получим

$$r - \left(\frac{1}{n_0(1 \pm \delta)} - 1\right)R = 0. \tag{3}$$

В пространстве (в данном случае двухмерном) параметров r и R уравнения (3) являются уравнениями двух прямых (рис. 2), которые ограничивают допустимые значения этих параметров. На рис. 2 прямая ab соответствует знаку «—», а прямая cd — знаку «+» в (3).

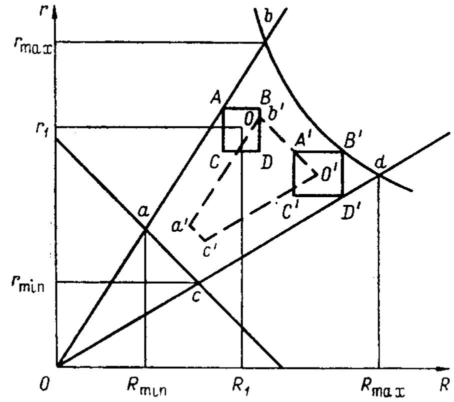

Рис. 2.

Для получения замкнутой области работоспособности делителя необходимо использовать дополнительные условия, ограничивающие значения параметров r и R. Такими условиями могут быть, например, следующие ограничения на входное и выходное сопротивления делителя:

$$R_{вх} = r + R \geqslant r_з \tag{4}$$

и

$$R_{вых} = \frac{rR}{r+R} \leqslant R_з. \tag{5}$$

Из (4) получаем уравнение нижней границы (прямая ac на рис. 2) области работоспособности

$$r = -R + r_з, \tag{6}$$

а из (5) — уравнение верхней границы (гипербола bd на рис. 2)

$$r = \frac{R_з R}{R - R_з}. \tag{7}$$

Таким образом, мы получили в пространстве параметров r и R замкнутую область допустимых значений этих параметров, ограниченную линиями ab, bd, cd и ac.

Для определения области возможных значений r и R необходимо предварительно выбрать тип сопротивлений и располагать данными о возможных номиналах, отклонениях от номиналов и изменениях во времени сопротивлений данного типа. В дальнейшем для упрощения задачи будем предполагать, что, во-первых, параметры r и R являются случайными величинами, законы распределения которых одномодальны, во-вторых, отклонения величин сопротивлений от их номинальных значений ограничены некоторым производственным допуском. Отметим, что эти предположения хорошо согласуются с опытными данными (см., например, [4]).

Из второго предположения следует, что при определенных номиналах областью возможных значений параметров r и R будет прямоугольник, размеры которого определяются производственными допусками на значения параметров. Если, например, производственный допуск на сопротивления r и R одинаков, симметричен и равен ρ, то при $r=r_1$ и $R=R_1$ областью их практически возможных значений (полем допуска) будет прямоугольник со сторонами $AB=CD=\rho R_1$ и $AC=BD=\rho r_1$ (см. рис. 2).

Метод определения оптимальных номинальных значений r и R существенно зависит от соотношений между областями их возможных и допустимых значений. Будем различать следующие возможные случаи:

1) область возможных значений параметров значительно меньше области допустимых значений;

2) области возможных и допустимых значений соизмеримы;

3) область возможных значений параметров больше области их допустимых значений.

В первом случае для определения номиналов r и R можно поступить следующим образом. Если иметь в виду, что в реальных условиях разности $R_{max}-R_{min}$ и $r_{max}-r_{min}$ обычно не больше $R_{ср}$ и $r_{ср}$ соответственно, то изменяющееся в зависимости от номиналов поле допуска можно заменить некоторым квадратом ($A'B'D'C'$ на рис. 2) со стороной $l=2\Delta_{max}$, где $\Delta_{max}=\max(\rho R_{max}, \rho r_{max})$. При перемещении этого квадрата внутри области работоспособности так, чтобы он касался некоторыми своими вершинами границ области, центр O' квадрата опишет замкнутую линию (пунктирная линия на рис. 2). Так как координатам центра квадрата соответствуют номинальные значения параметров, а перемещение квадрата без выхода его за границы области работоспособности не изменяет вероятности выполнения заданных технических условий, то, очевидно, любые номинальные значения r и R, которые соответствуют точкам, лежащим внутри области $a'b'o'c'$, являются решением задачи. Границами области $a'b'o'c'$ являются линии, параллельные соответствующим границам области работоспособности и сдвинутые от последних на расстояние $\Delta_{max}\sqrt{2}$. Уравнения этих линий легко найти по известным формулам аналитической геометрии [8].

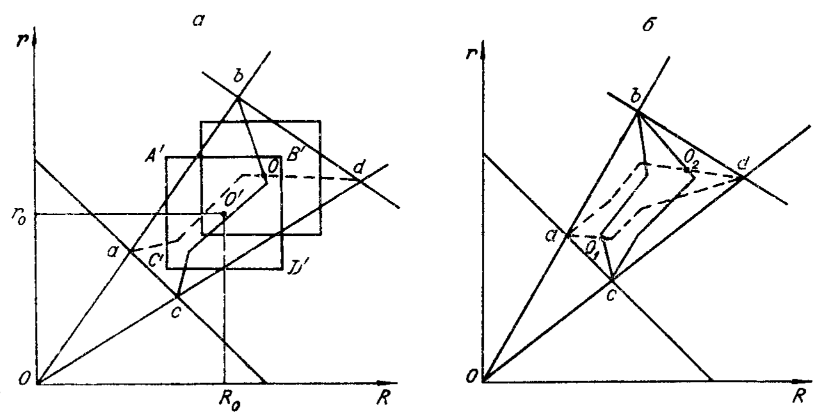

Рис. 3.

Во втором случае (рис. 3) задача определения оптимальных номиналов r и R значительно усложняется. Строгое решение ее заключается в следующем:

а) определяется область $S(R, r)=S_д(R, r)\cap S_в(R, r)$, т. е. определяется пересечение (общая часть) областей допустимых ($S_д$) и возможных ($S_в$) значений параметров;

б) аналитически выражается вероятность попадания точки с координатами (R, r) в область $S\ (R, r)$

$$P = \int\limits_{S\,(R,\,r)}\int f(R-R_0)\,f(r-r_0)\,d\,r\,d\,R, \tag{8}$$

где $f(R-R_0)$ и $f(r-r_0)$ — плотности распределения;

R_0 и r_0 — искомые номинальные значения (они же и математические ожидания) параметров r и R (предполагается, что r и R — независимые случайные величины).

в) определяются значения R_0 и r_0 из уравнений [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_0}\int\limits_{S\,(R,\,r)}\int f(R-R_0)\,f(r-r_0)\,d\,r\,d\,R = 0; \\ \frac{\partial}{\partial r_0}\int\limits_{S\,(R,\,r)}\int f(R-R_0)\,f(r-r_0)\,d\,r\,d\,R = 0; \end{aligned} \tag{9}$$

причем предполагается, что функция $f(R-R_0)f(r-r_0)$ непрерывна и достигает максимума в точке (R_0, r_0).

Подобное строгое решение задачи оказывается очень громоздким и трудоемким, поэтому практический интерес представляют более простые, хотя и менее строгие решения.

Одно из таких решений показано на рис. 3, *а**. Если значение одного из параметров (например r) фиксировать, то областью допустимых значений второго параметра (R) будет отрезок прямой, параллельной оси R, ограниченной границами области работоспособности. Так как производственный допуск на параметры предполагается симметричным, то, естественно, оптимальное значение R целесообразно выбрать в середине этого отрезка. Меняя значения r и выбирая каждый раз оптимальное значение R в середине отрезка, соответствующего данному фиксированному значению r, получим ломаную линию cOb — геометрическое место середин отрезков. Аналогично получается геометрическое место оптимальных значений параметра r (ломаная линия aOd на рис. 3, *а*), соответствующих различным фиксированным значениям R. Координаты точки O, в которой пересекаются эти линии, принимаются в качестве оптимальных значений параметров r и R. Следует отметить, что при подобном способе выбора номинальных значений параметров мы получаем не оптимальные, а лишь близкие к оптимальным номинальные значения r и R**. Кроме того, решение фактически не является однозначным, так как координаты точек, находящихся между линиями aOd и cOb (на том участке, где эти линии расположены близко друг от друга), также дают близкие к оптимальным решения задачи (из рис. 3, *а* видно, что расположение квадратов со сторонами $2\Delta_{max}$ в точках O или O' практически одинаково оптимально).

Если производственный допуск на сопротивления r и R одинаков, но не симметричен, т. е.

$$r_н(1-q) \leqslant r \leqslant r_н(1+P)$$

---

* На рис. 3 гипербола (7) заменена прямой линией, проходящей через точки b и d.

** Степень близости количественно можно всегда оценить при конкретно заданных технических условиях (2), (4), (5), решив (9) численными методами относительно R_0 и r_0.

и

$$R_{н}(1-q) \leqslant R \leqslant R_{н}(1+p),$$

то для определения оптимальных значений параметров отрезки прямых (допустимые области для одного из параметров при фиксированных значениях другого из них) следует делить пропорционально отношению допусков $\lambda = q/p$. На рис. 3, *б* показано расположение оптимальных точек для $\lambda = 1/2$ (точка O_1) и $\lambda = 2$ (точка O_2).

Задачу оптимального (точнее — близкого к оптимальному) выбора номинальных значений параметров, когда области допустимых и возможных значений соизмеримы, можно решить и аналитически, используя ту же идею пропорционального деления отрезков. В самом деле, зная уравнения границ области работоспособности, нетрудно записать уравнения линий, которые являются геометрическим местом точек, делящих соответствующие отрезки пропорционально λ. Эти уравнения имеют вид:

$$r = \frac{f_{н}(R) + \lambda f_{в}(R)}{1+\lambda}; \tag{10}$$

$$R = \frac{\lambda \varphi_{в}(r) + \varphi_{н}(r)}{1+\lambda}, \tag{11}$$

где $f_{н}(R)$ и $f_{в}(R)$ — уравнения соответственно нижней и верхней границ области работоспособности для r;

$\varphi_{н}(r)$ и $\varphi_{в}(r)$ — то же для R.

Номинальные значения параметров r и R определяются в результате совместного решения (10) и (11). В тех случаях, когда (10) и (11) не имеют совместного решения (т. е. соответствующие линии не пересекаются в области работоспособности), процедуру пропорционального деления необходимо продолжить в той части области работоспособности, которая лежит между линиями (10) и (11).

Определим оптимальные значения r и R для случая симметричного производственного допуска (см. рис. 3, *а*), т. е. $\lambda = 1$. Уравнения (10) и (11) (уравнения линий cOb и aOd) в этом случае имеют следующий вид:

$$r = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n_0(1-\delta)} - 2\right)R + r_з\right]; \quad R_a < R < R_c;$$

$$r = \left(\frac{1}{n_0(1-\delta^2)} - 1\right)R; \quad R_c < R < R_b; \tag{12}$$

$$r = \frac{1}{2n_0^2(1-\delta)^2}\{[n_0(3-\delta) - 1 - 2n_0^2(1-\delta^2)]R + R_з\}; \quad R_b < R < R_d$$

и

$$R = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n_0(1+\delta)}{1-n_0(1-\delta)} - 1\right)r + r_з\right]; \quad r_c < r < r_a;$$

$$R = \frac{n_0[1 - n_0(1-\delta^2)]}{1 - 2n_0 + n_0^2(1-\delta^2)} r; \quad r_a < r < r_d; \tag{13}$$

$$R = \frac{n_0(1-\delta)r + R_з}{2[1 - 2n_0 + n_0^2(1-\delta^2)]}; \quad r_d < r < r_b.$$

Совместное решение (12) и (13) дает координаты точки O — значения r и R, близкие к оптимальным, например:

$$r_0 = \frac{R_з [1 - n_0 (1 - \delta^2)]}{n_0 (1 - \delta) \{2 (1 + \delta) [(1 - n_0)^2 - n_0^2 \delta^2] - 1 + n_0 (1 - \delta^2)\}}; \tag{14}$$

$$R_0 = \frac{R_з (1 + \delta)}{2 (1 + \delta) [(1 - n_0)^2 - n_0^2 \delta^2] - 1 + n_0 (1 - \delta^2)}. \tag{15}$$

В третьем случае, когда область возможных значений параметров больше области работоспособности, оптимальные значения r и R можно определить из (9), только интегрировать необходимо по всей области работоспособности. Последнее обстоятельство несколько упрощает решение задачи, однако и в этом случае оно оказывается достаточно трудоемким.

Задачу можно решить более просто, используя теорему [7, стр. 304], в которой утверждается, что вероятность P, определяемая равенством (8), достигает максимума, когда значения параметров r и R соответствуют координатам центра тяжести области работоспособности.

На основании этой теоремы и известных формул [9] для определения центра тяжести произвольной плоской фигуры получаем следующие формулы, выражающие оптимальные значения параметров r и R через исходные данные n_0, δ, $R_з$ и $r_з$:

$$r_0 = \frac{2}{3Q} \left[\frac{R_з^3}{n_0 (1 - \delta^2) [(1 - n_0)^2 - n_0^2 \delta^2]} - r_з^3 (1 - n_0) n_0^2 (1 - \delta^2) \right]; \tag{16}$$

$$R_0 = \frac{2}{3Q} \left[\frac{R_з^3 (1 - n_0)}{[(1 - n_0)^2 - n_0^2 \delta^2]} - r_з^3 n_0^3 (1 - \delta^2) \right], \tag{17}$$

где

$$Q = \frac{R_з^2}{(1 - n_0)^2 - n_0^2 \delta^2} - r_з^2 n_0^2 (1 - \delta^2). \tag{18}$$

Приведенные выше методы оптимального выбора номинальных значений параметров делителя напряжения для трех возможных соотношений между областями допустимых и возможных значений этих параметров могут использоваться, очевидно, только тогда, когда сами параметры рассматриваются как случайные величины, т. е. не учитываются их изменения во времени, температурные изменения и т. п.

Таким образом, разграничение на три случая, обусловленное техническими условиями, свойствами системы и характером распределения параметров элементов, позволило решить задачу определения оптимальных номиналов.

Каждый из предложенных методов пригоден для любого числа параметров, но с увеличением числа параметров растет размерность пространства, где расположена область работоспособности, и, следовательно, возрастают трудности вычислений. В этом случае рационально выделить наиболее критические параметры, а влияние остальных учитывать коррекцией оптимальной точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Бруевич, В. П. Грабовецкий. Об основных направлениях теории надежности. — Сб. «Кибернетику на службу коммунизму», т. 2. М., изд-во «Энергия», 1964.
2. Н. Я. Феста. Вопросы повышения надежности и точности средств получения и переработки информации для систем управления технологическими процессами в химической промышленности.— Автометрия, 1965, № 1.
3. А. М. Половко. Основы теории надежности. М., изд-во «Наука», 1964.
4. В. П. Гусев, А. В. Фомин и др. Расчет электрических допусков радиоэлектронной аппаратуры. М., изд-во «Советское радио», 1963.
5. М. Л. Быховский. Основы динамической точности электрических и механических цепей. М., Изд-во АН СССР, 1958.
6. Н. Тейлор. Проектирование надежной аппаратуры.— Вопросы радиолокационной техники, 1958, № 1.
7. Б. В. Васильев, Б. А. Козлов, Л. Г. Ткаченко. Надежность и эффективность радиоэлектронных устройств. М., изд-во «Советское радио», 1964.
8. И. И. Привалов. Аналитическая геометрия. М., Физматгиз, 1962.
9. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике. М., изд-во «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
10 января 1966 г.