А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1966

УДК 681.2.08+621.3.019.3

Н. В. КИНШТ
(Новосибирск)

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ПРИ ВОЗМОЖНОСТИ ПРОВЕРОК МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ

Предложена модель объекта диагностики, предполагающая возможными как непосредственную проверку элементов, так и замену непроверенных элементов на заведомо исправные. Найдены необходимые условия оптимальности процедуры восстановления работоспособности. Рассмотрены некоторые алгоритмы построения оптимальных процедур.

В связи с высокими требованиями к надежности современных технических систем в последнее время большое внимание уделяется разработке оптимальных методов восстановления их работоспособности. Восстановление работоспособности исследуемой системы можно условно подразделить на поиск неисправного элемента (или элементов) и восстановление работоспособности соответствующего элемента (или элементов). Возможны два метода восстановления работоспособности системы. Первый предполагает детерминистскую диагностику, т. е. восстановление работоспособности некоторого элемента (его ремонт, регулировка или замена на заведомо исправный) производится после однозначного установления факта его неисправности. Нетрудно видеть, что в этом случае средние затраты на восстановление работоспособности элементов не зависят от процедуры поиска и, следовательно, минимизация средних затрат на восстановление работоспособности системы сводится к оптимизации только процедуры поиска (такие задачи известны [1—4]). Второй метод допускает восстановление работоспособности элементов, неисправность которых установлена с вероятностью, меньшей единицы (например, замену элементов на заведомо исправные); при этом будем говорить о вероятностной диагностике. Вероятностная диагностика может быть вызвана двумя причинами. Во-первых, если при проверках возможны ошибки двоякого рода, то детерминистская диагностика принципиально невозможна. Во-вторых, зачастую в практике, даже при возможности постановки детерминистского диагноза, для получения информации о состоянии неисправного элемента применяют его замену на заведомо исправный [5]. Очевидно, что в обоих случаях оптимизацию восстановления работоспособности системы необходимо производить с учетом стоимостей операций восстановления работоспособности элементов. В [6] рассматривается задача оптимизации при наличии ошибок двоякого рода, однако задачи оптимального восстановления работоспособности систем при возможности выбора между детерминистской и вероятностной диагностиками (т. е. при выборе между достоверной проверкой элемента с последующим при необходимости его восстановлением и заменой его на заведомо исправный) неизвестны.

Ниже рассматривается задача такого рода применительно к следующей математической модели объекта диагностики: объект предполагается состоящим из n элементов, причем одновременно возможна проверка или восстановление только одного из элементов. Для каждого i-го элемента ($i=1, 2, \ldots, n$) заданы: p_i — априорная вероятность отказа; τ_i — стоимость проверки; ρ_{0i} — стоимость замены без предварительной проверки; ρ_{1i} — стоимость восстановления элемента, заведомо отказавшего. (В дальнейшем, если применительно к некоторому элементу предполагается детерминистская диагностика, будем для краткости говорить о способе обслуживания *1*, в противном случае — о способе *О*. В этом же смысле понимаются индексы у стоимостей ρ_{0i} и ρ_{1i}.) После каждой замены элемента производится общая проверка системы, выясняющая необходимость продолжения дальнейшего поиска; стоимость общей проверки включена в стоимость замены. Процедура восстановления работоспособности заключается в обслуживании элементов в порядке выбранной нумерации, т. е. изменение процедуры эквивалентно изменению нумерации. Критерием оптимальности является минимум средней стоимости восстановления работоспособности.

Выясним необходимые условия оптимальности процедуры восстановления работоспособности. Предполагая, что обслуживание элементов производится в порядке их нумерации, найдем величину средних затрат на восстановление работоспособности. Пусть x_i — случайная величина затрат на i-м шаге. Так, для способа *1* на i-м шаге

$$x_i = \begin{cases} 0 — \text{событие } A_i; \\ \tau_i — \text{событие } B_i; \\ \tau_i + \rho_{1i} — \text{событие } C_i. \end{cases}$$

Событие A_i осуществляется в том случае, когда, начиная с i-го элемента, все элементы системы исправны, т. е. i-й элемент не проверяется; событие B_i имеет место, когда i-й элемент исправен, а среди последних $n-i$ элементов существует хотя бы одна неисправность; событие C_i заключается в том, что i-й элемент неисправен. Для способа *О* имеем

$$x_i = \begin{cases} 0 — \text{событие } A_i; \\ \rho_{0i} — \text{событие } B_i + C_i. \end{cases}$$

Средние затраты на i-м шаге для каждого способа есть математическое ожидание величины x_i:

$$M_1[x_i] = P(B_i)\tau_i + P(C_i)(\tau_i + \rho_{1i});$$
$$M_0[x_i] = P(B_i + C_i)\rho_{0i}, \qquad (1)$$

где $P(B_i)$, $P(C_i)$, $P(B_i + C_i)$ — соответственно вероятности событий B_i, C_i, $B_i + C_i$.

Оба выражения, входящие в (1), можно объединить

$$M[x_i] = P(B_i + C_i)[a_i\tau_i + (1 - a_i)\rho_{0i}] + a_i P(C_i)\rho_{1i},$$

где $a_i = 1$ для способа *1* и $a_i = 0$ для способа *О*.

Очевидно, что $P(C_i)=p_i$. Окончательно получим

$$M[x_i]=[1-P(A_i)]\,[a_i\tau_i+(1-a_i)\rho_{0i}]+a_i p_i \rho_{1i}. \tag{2}$$

Таким образом, выражение для средней стоимости всей процедуры $\tilde{\alpha}$ будет иметь вид

$$f(\tilde{\alpha})=\sum_{i=1}^{n} M[x_i]=\sum_{i=1}^{n} a_i p_i \rho_{1i}+\sum_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]\times$$
$$\times[a_i\tau_i+(1-a_i)\rho_{0i}], \tag{3а}$$

или в другой записи

$$f(\tilde{\alpha})=\sum_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]\,\rho_{0i}+\sum_{i=1}^{n} a_i([1-P(A_i)]\,(\tau_i-\rho_{0i})+p_i\rho_{1i}). \tag{3б}$$

Заметим, что слагаемое $\sum a_i p_i \rho_{1i}$ в (3а) не зависит от порядка нумерации элементов, а слагаемое $\sum[1-P(A_i)]\,\rho_{0i}$ в (3б) — от принятого на каждом шаге способа проверки. Таким образом, для минимизации $f(\tilde{\alpha})$ при фиксированных a_i необходимо минимизировать сумму $\sum t_i[1-P(A_i)]$ из (3а), где $t_i=a_i\tau_i+(1-a_i)\rho_{0i}$, а при фиксированном порядке обслуживания элементов — минимизировать сумму

$$\sum a_i([1-P(A_i)]\,(\tau_i-\rho_{0i})+p_i\rho_{1i}) \tag{4}$$

из (3б).

Зафиксировав нумерацию элементов, минимизируем $f(\tilde{\alpha})$ путем выбора надлежащих значений a_i, т. е. минимизируем сумму (4). В силу линейной зависимости этой суммы от a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ очевидно, что для фиксированной нумерации элементов имеет место равенство

$$\min\sum a_i([1-P(A_i)]\,(\tau_i-\rho_{0i})+p_i\rho_{1i})=$$
$$=\sum\min a_i([1-P(A_i)]\,(\tau_i-\rho_{0i})+p_i\rho_{1i}).$$

Отсюда непосредственно следует, что выбор значений a_i определяется знаком выражения $([1-P(A_i)]\,(\tau_i-\rho_{0i})+p_i\rho_{1i})$: если оно положительно, то $a_i=0$, если отрицательно, то $a_i=1$. Если $\tau_i\geqslant\rho_{0i}$, то всегда

$$[1-P(A_i)]\,(\tau_i-\rho_{0i})+p_i\rho_{1i}>0 \text{ и } a_i=0. \tag{5а}$$

Этот случай интуитивно очевиден.

Далее предположим, что $\tau_i<\rho_{0i}$. Тогда

$$a_i=\begin{cases}1, \text{ если } \beta_i<1-P(A_i);\\ 0, \text{ если } \beta_i>1-P(A_i),\end{cases} \tag{5б}$$

где $\beta_i=\dfrac{p_i\rho_{1i}}{\rho_{0i}-\tau_i}$.

Объединив (5а) и (5б), получим

$$a_i = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 < \beta_i \leqslant 1 - P(A_i); \\ 0, \text{ если } \begin{cases} \beta_i \leqslant 0; \\ \beta_i \geqslant 1 - P(A_i). \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

При $\beta_i = 1 - P(A_i)$ выбор значения a_i произволен, так как i-е слагаемое в сумме (4) обращается в 0. Очевидно, что (6) — необходимое условие оптимальности рассматриваемой процедуры.

Как нетрудно видеть, с увеличением i $P(A_i)$ возрастает, и, следовательно, имеется тенденция к принятию $a_i = 0$, т. е. к замене без предварительной проверки. Так, если в качестве единственного способа восстановления работоспособности элемента предполагается его замена на заведомо исправный ($\rho_{0i} = \rho_{1i} = \rho_i$), то для $i = n$ имеем:

$$\beta_n > p_n = 1 - P(A_n), \text{ если } \rho_n \geqslant \tau_n;$$
$$\beta_n < 0, \text{ если } \rho_n < \tau_n,$$

и всегда $a_n = 0$. Следовательно, в этом случае необходимый способ проверки совпадает с методом исключения: если среди проверенных $n-1$ элементов обнаружены не все неисправности, то n-й элемент заменяется без предварительной проверки. Этот факт отмечен в [2].

Для нахождения условий, определяющих оптимальный порядок обслуживания элементов при фиксированной совокупности чисел a_i, рассмотрим два крайних случая: возможность лишь одного неисправного элемента и любого их числа.

Предположим вначале возможной лишь одну неисправность ($\sum p_i = 1$). Вероятности $P(A_i)$ будут равны

$$P(A_i) = 1 - \sum_{k=i}^{n} p_k,$$

и выражение (3а) примет вид

$$f(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i \rho_{1i} + \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{k=i}^{n} p_k. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что минимизация (7) может быть произведена лишь за счет суммы $\sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{k=i}^{n} p_k$, причем известно [1], что эта сумма минимизируется нумерацией элементов в порядке неубывания величины $\frac{t_i}{p_i}$, т. е. для $i<k$

$$\frac{a_i \tau_i + (1 - a_i)\rho_{0i}}{p_i} \leqslant \frac{a_k \tau_k + (1 - a_k)\rho_{0k}}{p_k}. \tag{8}$$

В более общем случае, когда возможно любое число неисправных элементов, вероятности $P(A_i)$ примут вид

$$P(A_i) = \prod_{k=i}^{n} (1 - p_k) = Q_i.$$

Средняя стоимость процедуры восстановления работоспособности будет равна

$$f(\widetilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i \rho_{1i} + \sum_{i=1}^{n} t_i (1 - Q_i). \tag{9}$$

Известно [2], что вторая сумма в (9) минимизируется нумерацией элементов в порядке, удовлетворяющем неравенству

$$\frac{t_i(1-p_i)}{p_i} \leqslant \frac{t_k(1-p_k)}{p_k} \qquad (i < k). \tag{10}$$

Соотношения (6), (8) и (10) являются необходимыми условиями оптимальности процедуры восстановления работоспособности. Так как эти условия были найдены для оптимизации лишь «по одному параметру» (соотношения (8) и (10) — оптимизация по порядку обслуживания при фиксированных a_i, соотношение (6) — оптимизация выбора a_i при фиксированной нумерации), то, очевидно, этими условиями не учтены возможности оптимизации при совместном изменении нумерации элементов и коэффициентов a_i. Таким образом, процедура, удовлетворяющая на каждом шаге условиям (6), (8) или (6), (10), может обладать неминимальной средней стоимостью. Процедуры, удовлетворяющие этим необходимым условиям, будем называть квазиоптимальными, или тупиковыми. Очевидно, что оптимальную процедуру следует искать среди тупиковых.

Обратимся к вопросам построения тупиковых процедур. В качестве одного из возможных алгоритмов построения тупиковой процедуры можно предложить такое последовательное ее построение, при котором на каждом шаге удовлетворялись бы условия оптимальности. Предположим для простоты, что в объекте диагностики возможна лишь одна неисправность. Предварительно введем некоторую вспомогательную нумерацию элементов по индексу j ($j=1, 2, \ldots, n$), причем индекс i будем употреблять для «оптимальной» нумерации элементов ($i=1, 2, \ldots, n$). Построение тупиковой процедуры будем производить, начиная с последнего элемента.

Рассчитав β_j для всех j, обратимся к выбору n-го элемента. Для этого перепишем (6) в виде

$$a_j^{(n)} = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 < \beta_j \leqslant p_j; \\ 0, \text{ если } \begin{cases} \beta_j \leqslant 0; \\ \beta_j \geqslant p_j, \end{cases} \end{cases}$$

где $a_j^{(n)}$ — коэффициент a_j, рассчитанный применительно к выбору n-го элемента.

Затем определим коэффициенты $a_j^{(n)}$. Далее выберем n-й элемент так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{t_n}{p_n} = \max_j \frac{t_j^{(n)}}{p_j},$$

причем

$$t_j^{(n)} = a_j^{(n)} \tau_i + (1 - a_j^{(n)}) \rho_{0j}.$$

Предполагая $n-i$ элементов выбранными, произведем выбор i-го элемента. Коэффициенты $a_j^{(i)}$ найдем из соотношения

$$a_j^{(i)} = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 < \beta_j \leqslant p_j + \sum\limits_{k=n-i}^{n} p_k; \\ 0, \text{ если } \begin{cases} \beta_j \leqslant 0; \\ \beta_j \geqslant p_j + \sum\limits_{k=n-i}^{n} p_k, \end{cases} \end{cases}$$

причем i-й элемент должен обладать свойством

$$\frac{t_i}{p_i} = \max_j \frac{t_j^{(i)}}{p_j},$$

где $\max\limits_j$ берется лишь по тем элементам, которые не входят в определенные $n-i$ элементов.

Нетрудно видеть, что построенная таким образом процедура удовлетворяет необходимым условиям оптимальности (6) и (8). Аналогично можно построить тупиковую процедуру, начиная не с последнего элемента, а с первого. Эта процедура, вообще говоря, не совпадает с описанной выше. Очевидно, что в общем случае ни одна из построенных выше тупиковых процедур может не быть оптимальной, поэтому необходимо рассмотреть вопросы построения оптимальной процедуры из некоторой тупиковой путем улучшения последней. Как отмечалось выше, анализ необходимых условий оптимальности не учитывал возможностей оптимизации процедуры при совместном изменении порядка обслуживания элементов и коэффициентов a_i. Рассмотрим эти возможности подробнее.

Пусть нам задана тупиковая процедура $\tilde{\alpha}$. Выделим два следующих один за другим элемента с номерами r и s, причем соответствующие коэффициенты a_i будут равны a_r' и a_s'' (один штрих соответствует предшествующему элементу, два штриха — последующему). Очевидно, что эта пара элементов образует тупиковое сочетание, т. е. выполняется необходимое условие оптимальности (8), а коэффициенты a_r' и a_s'' удовлетворяют соотношению (6). Произведем перестановку выделенных элементов; пусть при этом коэффициенты a_i станут соответственно равными a_s' и a_r''. Естественно потребовать, чтобы такого рода перестановка привела к тупиковому сочетанию. Очевидно, что для каждого сочетания $a_r' a_s''$ принципиально возможно четыре сочетания $a_s' a_r''$: 11, 10, 01, 00. Однако, как нетрудно видеть, требование того, чтобы сочетание $a_s' a_r''$ было тупиковым, сужает возможности такого рода замен. Так, допустимыми в этом смысле являются лишь перестановки, приведенные в табл. 1 при указанных значениях параметров. Здесь $\sum = \sum\limits_{k=s+1}^{n} p_k$; $\beta_l > 0$.

Таблица 1

$a'_r\ a''_s$			$a'_s\ a''_r$
11	$\beta_r > \Sigma + p_r$	$\frac{\rho_{0r}}{p_r} > \frac{\tau_s}{p_s}$	10
10	$\beta_r < \Sigma + p_r$ $\beta_s < \Sigma + p_r + p_s$	$\frac{\tau_r}{p_r} < \frac{\rho_{0s}}{p_s}$	11
	$\beta_r > \Sigma + p_r$ $\beta_s < \Sigma + p_r + p_s$	$\frac{\rho_{0r}}{p_r} > \frac{\tau_s}{p_s}$	10
	$\beta_r > \Sigma + p_r$ $\beta_s > \Sigma + p + p_s$	$\frac{\rho_{0r}}{p_r} > \frac{\rho_{0s}}{p_s}$	00
00	$\beta_s < \Sigma + p_r + p_r$	$\frac{\rho_{0r}}{p_r} > \frac{\tau_s}{p_s}$	10

В табл. 1 не включены перестановки, которые заведомо не могут уменьшить среднюю стоимость процедуры, например:

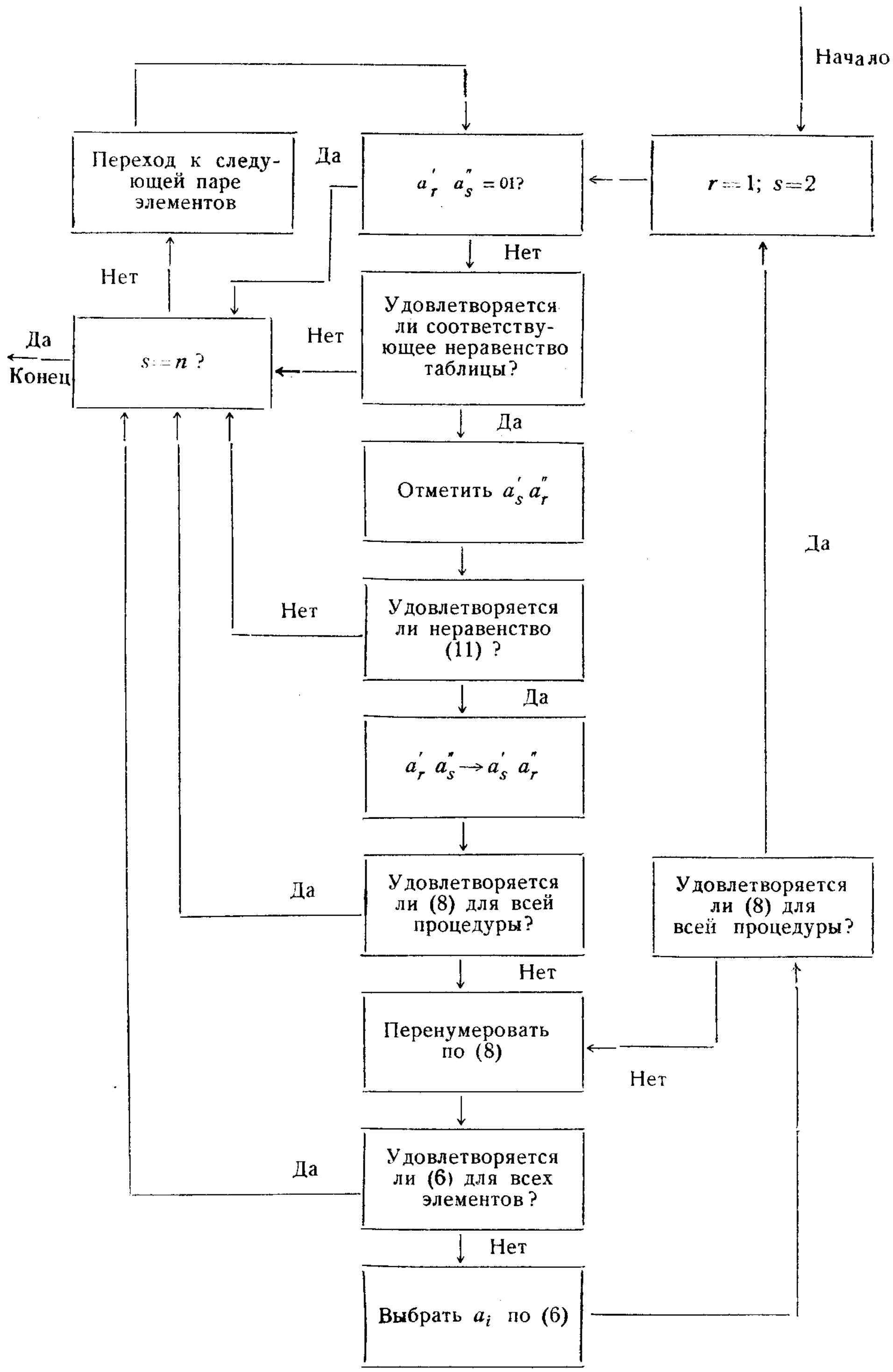
$$a'_r a''_s = 11; \quad \frac{\tau_r}{p_r} = \frac{\tau_s}{p_s}; \quad \beta_r < \sum + p_r;$$
$$a'_s a''_r = 11; \qquad \beta_s < \sum + p_s.$$

Такого рода перестановки целесообразны лишь в том случае, когда они уменьшают среднюю стоимость восстановления работоспособности, или, как следует из (7), при выполнении неравенства

$$(a'_r - a''_r) p_r \rho_{1r} + (t'_r - t''_r)\left(\sum + p_r\right) + t'_r p_s >$$
$$> (a'_s - a''_s) p_s \rho_{1s} + (t'_s - t''_s)\left(\sum + p_s\right) + t'_s p_r. \qquad (11)$$

Теперь возможно сформулировать алгоритм улучшения тупиковой процедуры (табл. 2). В общих чертах этот алгоритм состоит в следующем: начиная с первой пары элементов, проверяем, возможно ли при перестановке элементов подобрать коэффициенты a'_s и a''_r так, чтобы получившееся сочетание было тупиковым. При этом руководствуемся табл. 1. Если такого рода перестановка возможна, то ее целесообразность оцениваем по (11). Получившаяся процедура может оказаться нетупиковой; последовательным улучшением ее по (6) и (8) приводим ее к тупиковой. Затем этот процесс продолжается вплоть до получения оптимальной процедуры, т. е. до момента, когда не найдется ни одного тупикового сочетания, которое было бы целесообразно изменить. Как видно, основная черта данного алгоритма есть перебор тупиковых процедур в порядке убывания их средних стоимостей, и его трудоемкость может быть охарактеризована общим числом тупиковых процедур. В то время как общее возможное число процедур равно $2^n n!$, число процедур,

Таблица 2


Начало
$r=1$; $s=2$
$a'_r\ a''_s=01$?
Да
Переход к следующей паре элементов
Нет
Удовлетворяется ли соответствующее неравенство таблицы?
Нет
Да
Конец
$s=n$?
Нет
Да
Отметить $a'_s\ a''_r$
Удовлетворяется ли неравенство (11) ?
Нет
Да
$a'_r\ a''_s \rightarrow a'_s\ a''_r$
Удовлетворяется ли (8) для всей процедуры?
Да
Нет
Да
Удовлетворяется ли (8) для всей процедуры?
Перенумеровать по (8)
Нет
Удовлетворяется ли (6) для всех элементов?
Да
Нет
Выбрать a_i по (6)

удовлетворяющих условию (8), составляет лишь 2^n. Тупиковыми процедурами будут лишь те из 2^n, в которых соотношение (6) удовлетворяется для каждого элемента, и поэтому 2^n можно считать оценкой сверху для числа тупиковых процедур. Практически число тупиковых процедур бывает значительно меньше. Так, например, в частном случае, когда все β_i равны между собой, существует не более n тупиковых процедур. Однако получить оценку сверху лучше, чем 2^n, не удается.

Вопросы построения и улучшения тупиковых процедур, рассмотренные выше в предположении существования единственного неисправного элемента, не представляет труда обобщить на случай любого числа неисправностей.

Выводы

Предложенная модель объекта диагностики позволяет в отдельных случаях количественно проанализировать возможности оптимизации восстановления работоспособности при проверках методом замены.

Полученные необходимые условия оптимальности могут быть использованы при построении оптимальных программ диагностики, а также при анализе более сложных моделей объектов диагностики.

Автор считает своим долгом выразить благодарность В. И. Рабиновичу и Л. С. Тимонену за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Glass. An Optimum Policy for Detecting a Fault in a Complex System.— Operation Research, 1959, v. 7, № 4.
2. B. B. Winter. Optimal Diagnostic Procedures.— IRE Trans., 1960, RQC-9, № 3.
3. О. В. Староверов. Об одной задаче поиска.— Теория вероятностей и ее применения, 1963, т. VIII, вып. 2.
4. Ю. В. Любатов. Оптимальная процедура локализации неисправности в модуляризированной радиоэлектронной системе.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 4.
5. С. П. Ксенз. Поиск неисправностей в радиоэлектронных системах методом функциональных проб. М., изд-во «Советское радио», 1965.
6. С. И. Фирстман, Б. Гласс. Оптимальные маршруты поиска при автоматическом отыскании неисправностей.— Зарубежная радиоэлектроника, 1963, № 6.

Поступила в редакцию 9 августа 1965 г., окончательный вариант — 11 января 1966 г.