АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1966

УДК 681.142.82

В. И. ЮШИН
(Новосибирск)

О ПОГРЕШНОСТИ, ВЫЗВАННОЙ РАЗБРОСОМ НАЧАЛ ОТСЧЕТА ПРИ ОСРЕДНЕНИИ ПО МНОЖЕСТВУ РЕАЛИЗАЦИЙ

Исследована точность оценок математического ожидания и дисперсии нестационарного случайного процесса, получаемых осреднением конечного числа реализаций при наличии случайного разброса их начал отсчета. Получены простые выражения для математических ожиданий и дисперсий этих оценок.

В связи с усиливающимся интересом к практическому использованию результатов теории нестационарных случайных функций приобретают актуальность вопросы, связанные с измерением статистических характеристик нестационарных случайных процессов. Такие измерения обычно производятся методом осреднения нескольких реализаций. Однако, как правило, не удается точно совместить начала отсчета реализаций перед осреднением, отчего появляется добавочная ошибка. Характер этой специфической ошибки для предельного случая, когда число осредняемых реализаций бесконечно, освещен в [1]. В настоящей работе рассматривается совместная ошибка из-за конечности объема выборки (конечного числа осредняемых реализаций) и случайного разброса начал отсчета отдельных реализаций. Задача решается для случая измерений математического ожидания и дисперсии случайного процесса. Для нормальной и равномерной плотностей вероятности начал отсчета при малом разбросе получены простые приближенные формулы.

Постановка задачи. Нестационарный случайный процесс $X(t)$ задан множеством своих независимых реализаций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$. В распоряжении наблюдателя имеются только реализации этого процесса, искаженные тем, что каждая из них сдвинута по аргументу относительно $X(t)$ на постоянную для нее величину δ_i.

Предполагается, что величины δ_i, $i = 1, 2, \ldots$, являются опытными значениями независимых случайных величин Δ_i, $i = 1, 2, \ldots$, причем плотности вероятностей $f_i(\delta)$, $i = 1, 2, \ldots$, случайных величин Δ_i равны между собой:

$$f_1(\delta) = f_2(\delta) = \ldots = f_i(\delta) = \ldots = f(\delta), \tag{1}$$

где $f(\delta)$ — плотность вероятности некоторой случайной величины Δ, которую мы будем называть случайным сдвигом, или случайным разбросом начал отсчета реализаций.

Вследствие независимости случайных величин Δ_i, Δ_k при $i \neq k$ совместная плотность их есть

$$f_{ik}(\delta_1 \delta_2) = f_i(\delta_1) f_k(\delta_2) = f(\delta_1) f(\delta_2), \qquad i \neq k. \tag{2}$$

Оценки математического ожидания $m_x(t)$ и дисперсии $D_x(t)$ случайного процесса $X(t)$ выражаются формулами:

$$m_x^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t + \delta_i); \tag{3}$$

$$D_x^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [x_i(t + \delta_i) - m_x(t + \delta_i)]^2, \tag{4}$$

где $N < \infty$.

Требуется оценить точность $m_x^*(t)$ и $D_x^*(t)$.

Точность оценки математического ожидания

Найдем математическое ожидание оценки $m_x^*(t)$:

$$M[m_x^*(t)] = M\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t + \delta_i)\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} M[x_i(t + \delta_i)] =$$
$$= M[X(t + \Delta)]. \tag{5}$$

Случайная функция $X(t+\Delta)$ есть случайная функция случайного аргумента. Разлагая операцию математического ожидания на две последовательные:

$$M = M_\delta M_{x/\delta}, \tag{6}$$

где $M_{x/\delta}$ — условное математическое ожидание случайной функции $X(t+\Delta)$ при фиксированном $\Delta = \delta$;

M_δ — математическое ожидание при случайном δ (более подробно см. приложение 1),

находим

$$M[m_x^*(t)] = M_\delta M_{x/\delta}[X(t + \Delta)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta) m_x(t + \delta) d\delta. \tag{7}$$

Следовательно, оценка $m_x^*(t)$ математического ожидания $m_x(t)$ нестационарной случайной функции $X(t)$ при наличии разброса начал отсчета реализаций является смещенной.

Найдем дисперсию оценки $m_x^*(t)$

$$D[m_x^*(t)] = M\{[m_x^*(t) - M[m_x^*(t)]]^2\} =$$
$$= M\left[\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t + \delta_i) x_k(t + \delta_k)\right] - \{M[m_x^*(t)]\}^2. \tag{8}$$

Введем центрированный процесс $\overset{\circ}{X}(t)$, заданный своими реализациями

$$\overset{\circ}{x}_i(t) = x_i(t) - m_x(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8) и меняя порядок операций математического ожидания и суммирования, получим

$$D\left[m_x^*(t)\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} M\left[\overset{\circ}{x}_i(t+\delta_i)\,\overset{\circ}{x}_k(t+\delta_k)\right] +$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} M\left[m_x(t+\delta_i)\,\overset{\circ}{x}_k(t+\delta_k) + \overset{\circ}{x}_i(t+\delta_i)\,m_x(t+\delta_k)\right] +$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} M\left[m_x(t+\delta_i)\,m_x(t+\delta_k)\right] - \{M\left[m_x^*(t)\right]\}^2. \tag{10}$$

Рассмотрим первое слагаемое формулы (10). Разлагая операцию математического ожидания по формуле (6) и учитывая независимость разных реализаций, благодаря которой члены суммы вида $M\left[\overset{\circ}{x}_i\overset{\circ}{x}_k\right]$ $(i \neq k)$ равны нулю, получим для первого слагаемого выражение

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} M_\delta\, M_{x/\delta}\left[\overset{\circ}{x}{}_i^2\,(t+\delta_i)\right]. \tag{11}$$

Используя изложенный в приложении 1 прием, находим окончательный вид этого члена

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} M_\delta\, M_{x/\delta}\left[\overset{\circ}{x}_i(t+\delta_i)\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} M_\delta\left[D_x(t+\delta)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, D_x(t+\delta)\, d\delta. \tag{12}$$

Второй член формулы (10), содержащий математические ожидания центрированных процессов, тождественно равен нулю.

Учитывая, что операции условного математического ожидания $M_{x/\delta_1\delta_2}$ и $M_{x/\delta}$ над неслучайной функцией случайного аргумента только фиксируют аргумент, третий член разложим следующим образом:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} M\left[m_x(t+\delta_i)\,m_x(t+\delta_k)\right] =$$

$$= \frac{N-1}{N}\, M_{\delta_1\delta_2}\left[m_x(t+\delta_1)\,m_x(t+\delta_2)\right] +$$

$$+\frac{1}{N}\, M_\delta\left[m_x^2(t+\delta)\right]. \tag{13}$$

Пользуясь независимостью случайных величин Δ_i и Δ_k, $k \neq i$, а также изложенным в приложении 1 приемом, представим третий член формулы (10) в виде

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} M\left[m_x(t+\delta_i)\, m_x(t+\delta_k)\right] =$$

$$= \frac{N-1}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta_1) f(\delta_2)\, m_x(t+\delta_1)\, m_x(t+\delta_2)\, d\delta_1\, d\delta_2 +$$

$$+ \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, m_x^2(t+\delta)\, d\delta. \tag{14}$$

Подставляя (12) и (14) в (10) и учитывая (7), получаем окончательное выражение для дисперсии оценки математического ожидания

$$D\left[m_x^*(t)\right] = \frac{1}{N}\left\{\int_{\infty}^{\infty} f(\delta)\left[D_x(t+\delta) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m_x^2(t+\delta)\right] d\delta - \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, m_x(t+\delta)\, d\delta\right]^2\right\}. \tag{15}$$

Рассмотрим два в известном смысле предельных случая.

1. *Нормальное распределение разброса начал отсчета.*

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma_\Delta\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_\Delta^2}\right), \tag{16}$$

где σ_Δ^2 — дисперсия случайной величины Δ.

Допустим, что функции $D_x(t+\delta)$ и $m_x(t+\delta)$ могут быть представлены на интервале $6\sigma_\Delta$ в окрестности произвольной точки t в виде (см. приложение 2):

$$m_x(t+\delta) \approx m_x(t) + \frac{\alpha_m}{3\sigma_\Delta}\delta + \frac{\beta_m}{9\sigma_\Delta^2}\delta^2; \tag{17}$$

$$D_x(t+\delta) \approx D_x(t) + \frac{\alpha_D}{2\sigma_\Delta} + \frac{\beta_D}{9\sigma_\Delta^2}\delta^2, \tag{18}$$

где постоянные α_m и α_D определяют наклон, а β_m и β_D — кривизну функций m_x и D_x.

Подставляя выражения (17) и (18) в (7) и (15) и пользуясь формулами (П.2.6 — П.2.9)), можем записать:

$$M\left[m_x^*(t)\right] \approx m_x(t) + \frac{1}{9}\beta_m; \tag{19}$$

$$D\left[m_x^*(t)\right] \approx \frac{1}{N}\left[D_x(t) + \frac{1}{9}\beta_D + \frac{1}{9}\alpha_m^2 + \frac{2}{81}\beta_m^2\right]. \tag{20}$$

2. *Равномерное распределение.* Для равномерного закона (см. приложение 2) таким же образом находим:

$$M\left[m_x^*(t)\right] \approx m_x(t) + \frac{1}{3}\beta_m; \tag{21}$$

$$D\left[m_x^*(t)\right] \approx \frac{1}{N}\left[D_x(t) + \frac{1}{3}\beta_D + \frac{1}{3}\alpha_m^2 + \frac{4}{45}\beta_m^2\right]. \tag{22}$$

Точность оценки дисперсии

Рассмотрим точность оценки $D_x^*(t)$ дисперсии $D_x(t)$ в предположении, что процесс центрирован:

$$D_x^*(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2(t+\delta_i). \tag{23}$$

Пользуясь описанным методом условного математического ожидания, найдем математическое ожидание оценки $D_x^*(t)$

$$M\left[D_x^*(t)\right] = M\left[\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} x_i^2(t+\delta_i)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, D_x(t+\delta)\, d\delta \tag{24}$$

и дисперсию

$$D\left[D_x^*(t)\right] = M\left\{\left[D_x^*(t) - M\left[D_x^*(t)\right]\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{N}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\left[M\left[x^4(t+\delta)\right] + D_x^2(t+\delta)\right] d\delta -\right.$$

$$\left. - \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, D_x^2(t+\delta)\, d\delta\right]^2\right\}, \tag{25}$$

где $M[x^4(t)]$ — момент четвертого порядка случайной функции $X(t)$.

Как известно [2], для нормально распределенных процессов высшие моменты определяются через дисперсию, в частности,

$$M\left[x^4(t)\right] = 3D_x^2(t). \tag{26}$$

В этом случае

$$D\left[D_x^*(t)\right] = \frac{1}{N}\left\{4\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, D_x^2(t+\delta)\, d\delta - \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, D_x(t+\delta)\, d\delta\right]^2\right\}. \tag{27}$$

Если разброс Δ подчинен нормальному закону с дисперсией σ_Δ^2, определяемому формулой (16), а функция $D_x(\delta)$ в интервале $[t - 3\sigma_\Delta,$

$+t3\sigma_\Delta]$ приближенно представима в виде (18), то, пользуясь соотношениями, полученными в приложении 2, можем записать:

$$M[D_x^*(t)] = D_x(t) + \frac{1}{9}\beta_D; \tag{28}$$

$$D[D_x^*(t)] = \frac{1}{N}\left[3D_x(t)\left\{D_x(t) + \frac{2}{3}\beta_D\right\} + \frac{4}{9}\alpha_D^2 + \frac{11}{81}\beta_D^2\right]. \tag{29}$$

Для равномерной на интервале $2T$ плотности вероятности находим:

$$M[D_x^*(t)] = D_x(t) + \frac{1}{3}\beta_D; \tag{30}$$

$$D[D_x^*(t)] = \frac{1}{N}\left\{3D_x(t)\left[D_x(t) + \frac{2}{3}\beta_D\right] + \frac{4}{3}\alpha_D^2 + \frac{7}{9}\beta_D^2\right\}. \tag{31}$$

В заключение отметим, что простые формулы (19)—(22), (28)—(31), выражающие математические ожидания и дисперсии оценок $m_x(t)$ и $D_x^*(t)$, справедливы только при сравнительно небольших разбросах начал отсчета, что следует из допущений (17), (18). Однако в случаях сильного разброса смещенность реализаций становится очевидной, и ее всегда можно уменьшить заранее визуально или с помощью какой-нибудь автоматизированной процедуры, например, попарной взаимной корреляции разных реализаций с осреднением по времени и др. Таким образом, оказывается, что случай малых разбросов является наиболее интересным и практически исчерпывает поставленную задачу.

Приложение 1

Рассмотрим операцию математического ожидания над случайной функцией $Y(t+\Delta)$ случайного аргумента Δ. Совместная плотность вероятностей случайной функции $Y(t)$ и случайной величины Δ есть

$$f(y, \delta, t) = f(\delta) f_\delta(y, t), \tag{П.1.1}$$

где $f(\delta)$ — одномерная плотность случайной величины Δ;
$f_\delta(y, t)$ — условная одномерная плотность случайной функции $Y(t+\Delta)$ при фиксированном значении $\Delta=\delta$;
t — неслучайный аргумент.

Математическое ожидание функции $Y(t+\Delta)$ выражается формулой [2]

$$M[Y(t+\Delta)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(y, \delta, t)\, d\delta\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta) \int_{-\infty}^{\infty} y f_\delta(y, t)\, dy\, d\delta. \tag{П.1.2}$$

Внутренний интеграл в формуле (П.1.2) есть условное математическое ожидание случайной функции $Y(t+\Delta)$ при фиксированном $\Delta=\delta$. Эту операцию будем обозначать символом $M_{y/\delta}$. Очевидно, что

$$M_{y/\delta}\left[Y(t+\Delta)\right]=m_y(t+\delta). \qquad (\text{П.1.3})$$

С учетом (П.1.3) формула (П.1.2) приобретает вид

$$M\left[Y(t+\Delta)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, m_y(t+\delta)\, d\delta \qquad (\text{П.1.4})$$

и, как нетрудно видеть [2], представляет собой математическое ожидание детерминированной функции $m_y(t+\delta)$ случайного аргумента Δ. Операцию математического ожидания в формуле (П.1.4) будем обозначать символом M в отличие от операции условного математического ожидания $M_{y/\delta}$. Учитывая сказанное, можем записать следующее выражение:

$$M\left[Y(t+\Delta)\right]=M_\delta M_{y/\delta}\left[Y(t+\Delta)\right]=M_\delta\left[m_y(t+\delta)\right]=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, m_y(t+\delta)\, d\delta \qquad (\text{П.1.5})$$

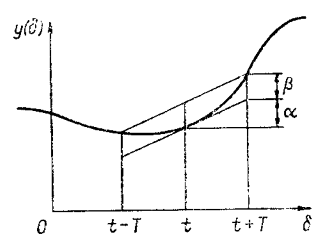
Все проделанные операции справедливы и для случаев многомерных плотностей вероятностей.

Приложение 2

Случай 1. Пусть

$$f(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (\text{П.2.1})$$

Предположим, что функция $y(\delta)$ такова, что она с достаточной точностью может быть представлена кривой второго порядка в симметричной окрестности $2T$ произвольной точки t, т. е. ее можно выразить через тангенс угла приближенной касательной $\frac{\alpha}{T}$ и свое максимальное отклонение β от линейной функции в интервале $[t-T,\ t+T]$ (см. рисунок):



$$y(t+\delta)\approx y(t)+\frac{\alpha}{T}\delta+\frac{\beta}{T^2}\delta^2. \qquad (\text{П.2.2})$$

Рассмотрим интеграл

$$Z_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, y(t+\delta)\, d\delta. \qquad (\text{П.2.3})$$

Предположим, что приближение (П.2.2) не нарушится, если принять

$$T=3\sigma. \qquad (\text{П.2.4})$$

Тогда, пренебрегая эффектами за пределами интервала интегрирования $[-3\sigma,\ 3\sigma]$, можно записать

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma} f(\delta)\, y(t+\delta)\, d\delta \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\left[y(t) + \frac{\alpha}{3\sigma}\delta - \frac{\beta}{9\sigma^2}\delta^2\right] d\delta \approx$$

$$\approx Z_1(t), \tag{П.2.5}$$

где $f(\delta)$ определено формулой (П. 2.1).

Производя почленное интегрирование, находим

$$Z_1(t) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)\left[y(t) + \frac{\alpha}{3\sigma}\delta + \frac{\beta}{9\sigma^2}\delta^2\right] d\delta =$$

$$= y(t) + \frac{\beta}{9}. \tag{П.2.6}$$

Нетрудно получить [3] также следующие приближенные соотношения:

$$Z_2(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta}{2\sigma^2}\right) y^2(t+\delta)\, d\delta \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)\left[y^2(t) + \left(\frac{\alpha}{3\sigma}\right)^2\delta^2 + \left(\frac{\beta}{9\sigma^2}\right)^2\delta^4 +\right.$$

$$\left. + 2y(t)\frac{\alpha}{3\sigma}\delta + 2y(t)\frac{\beta}{9\sigma^2}\delta^2 + 2\frac{\alpha}{3\sigma}\frac{\beta}{9\sigma^2}\delta^3\right] d\delta =$$

$$= y^2(t) + \frac{\alpha^2}{9} + \frac{1}{27}\beta^2 + \frac{2}{9}y(t)\beta; \tag{П.2.7}$$

$$Z_3(t) = Z_1^2 \approx y^2(t) + \frac{2}{9}y(t)\beta + \frac{\beta^2}{81}; \tag{П.2.8}$$

$$Z_4(t) = Z_2(t) + Z_3(t) \approx \frac{\alpha^2}{9} + \frac{2\beta^2}{81}. \tag{П.2.9}$$

С л у ч а й 2. Пусть

$$f(\delta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2T_1}; & |\delta| < T_1; \\ 0\ ; & |\delta| > T_1, \end{cases} \tag{П.2.10}$$

где T_1 — некоторая постоянная.

Предполагая, что приближение (П. 2.2) не нарушается при

$$T = T_1, \tag{П. 2.11}$$

можем вычислить следующие интегралы:

$$Z_1(t) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t+\delta)\, d\delta \approx \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[y(t) + \frac{\alpha}{T}\delta +\right.$$

$$\left. + \frac{\beta}{T^2}\delta\right] d\delta = y(t) + \frac{1}{3}\beta; \tag{П.2.12}$$

$$Z_2(t) = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} y^2(t+\delta)\,d\delta \approx \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\Big[y^2(t) + \frac{\alpha^2}{T^2}\delta^2 + \frac{\beta^2}{T^4}\delta^4 + 2y(t)\frac{\alpha}{T}\delta + 2y(t)\frac{\beta}{T^2}\delta^2 + 2\frac{\alpha\beta}{T^3}\delta^3\Big]d\delta = y^2(t) + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\beta^2}{5} + \frac{2}{3}y\beta; \qquad (\text{П}.2.13)$$

$$Z_3(t) = Z_1^2(t) \approx y^2(t) + \frac{2}{3}y(t)\beta + \frac{1}{9}\beta^2; \qquad (\text{П}.2.14)$$

$$Z_4(t) = Z_2(t) - Z_3(t) \approx \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{4}{45}\beta^2. \qquad (\text{П}.2.15)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Юшин. Влияние разброса начал отсчета реализаций на измерение корреляционных функций нестационарных процессов.— Автометрия, 1966, № 1.
2. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
3. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. М., Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию
9 ноября 1965 г.