АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1966

УДК 681.2.08

В. И. ПАМПУРО
(Киев)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ АНАЛОГОВЫХ ПРИБОРОВ ВО ВРЕМЕНИ ПРИ БОЛЬШИХ ИЗМЕНЕНИЯХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТОВ

Приводится метод расчета случайной и систематической погрешностей аналоговых приборов во времени для случая больших изменений средних значений и малых среднеквадратических приращений параметров элементов.

Задача определения погрешности аналоговых приборов во времени возникает в связи с изменением параметров узлов (элементов) прибора в процессе его эксплуатации. Необходимо оценить как величину изменения параметров блоков во времени, так и степень влияния этого изменения на погрешность прибора.

Данная задача аналогична определению вероятности безотказной работы прибора по постепенным отказам. Это объясняется тем, что в обоих случаях нужно определить качество работы прибора во времени. Отличие состоит только в различных пределах допустимого изменения параметра, обусловливающего качество. Если рассматривать малые приращения параметров элементов, то можно воспользоваться работами типа [1, 2].

В общем случае последовательность расчета погрешности прибора во времени для больших приращений средних значений параметров элементов во времени может быть представлена тремя этапами.

I этап. Определение функциональной зависимости выходного параметра от параметров элементов. Для определения функциональной зависимости выходного параметра прибора A от параметров элементов X, т. е.

$$A = f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \tag{1}$$

можно использовать методы теории автоматического регулирования (например, метод структурных схем [3]) или специально разработанный автором обобщенный рациональный метод [2, 4, 5]. Следует отметить, что задача определения зависимости (1) заключается в нахождении взаимосвязи блоков (элементов) по информационным составляющим сигнала, а не по всему сигналу. Например, в случае использования линейного детектора, на который воздействует амплитудно-модулируемый сигнал, нас интересует передача модулирующей составляющей сигнала и только. При этом детектор представляется линейным блоком (линейной подсхемой). Параметры X при использовании метода, рассмотренного в [5], определяются безразмерными коэффициентами передачи. По известной блок-схеме и известным параметрам X составляется матричное уравнение, решение которого определяет параметр A [4].

II этап. Определение функциональной зависимости приращения выходного параметра от приращений выходных параметров элементов. В случае малых приращений параметров X эта задача решается путем разложения в ряд Тейлора функции (1) с последующим пренебрежением членами второго и выше порядка малости. При этом число членов ряда равно числу элементов X:

$$\delta A = Y_1 \delta X_1 + Y_2 \delta X_2 + \ldots + Y_n \delta X_n, \tag{2}$$

где δA и δX_i — относительные приращения;

Y_i — чувствительность по элементу X_i, равная

$$Y_i = \frac{\partial A}{\partial X_i} \quad \frac{X_{i0}}{A_0}. \tag{3}$$

Здесь нулевым индексом обозначаются точки, возле которых ведется разложение в ряд Тейлора. Зависимость приращений вида (2) очень удобна тем, что позволяет оценить влияние нестабильности каждого параметра X_i, а следовательно, и каждого блока в отдельности. С практической точки зрения анализ зависимости (2) дает возможность пренебречь изменениями параметров X_j, для которых произведения $Y_j \delta X_j$ сравнительно малы. Это позволяет в дальнейшем, в случае анализа вероятностной зависимости A от X, свести необходимые статистические данные к данным по параметрам элементов с максимальными произведениями $Y_i \delta X_i$.

III этап. Определение вероятностной зависимости приращения выходного параметра от приращений параметров элементов. Зависимость приращений δA от $\delta X_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ можно рассматривать как зависимость между случайными величинами или случайными функциями. В первом случае имеем

$$\delta A = f_2(\delta X_1, \delta X_2, \ldots, \delta X_n). \tag{4}$$

Можно показать, что для больших средних значений приращений и малых дисперсий параметров X_i, рассматриваемых как случайные величины, зависимость (4) может быть представлена в виде [6, 7]

$$\delta A = \varkappa_1 \delta X_1 + \varkappa_2 \delta X_2 + \ldots + \varkappa_n \delta X_n, \tag{5}$$

где $\varkappa_i$ определяет степень влияния на выходной параметр изменения случайной величины δX_i вблизи ее математического ожидания $M_{\delta X_i}$ при малых ее дисперсиях и постоянстве приращений всех остальных случайных величин ($\delta X_j = M_{\delta X_j}$; $j \neq i$). Иначе говоря, приращение δX_i может быть представлено в виде

$$\delta X_i = M_{\delta X_j} + \delta' X_i, \tag{6}$$

где $\delta' X_i$ — переменная составляющая случайной величины δX_i, среднеквадратическое значение которой равно

$$\sigma_{\delta X_i} \ll |M_{\delta X_i}|. \tag{7}$$

Коэффициенты $\varkappa_i$ представляют неслучайные величины, определяемые номинальными значениями параметров X_i и математическими ожиданиями $M_{\delta X_i}$, т. е. $\varkappa_i = \bar{\varkappa}_i$.

Можно показать, что между чувствительностью Y_i и коэффициентом $\bar{\varkappa}_i$ существует однозначная связь (см. приложение):

$$\bar{\varkappa}_i = \frac{\bar{A}}{A_0} \frac{X_{i0}}{\bar{X}_i} \bar{Y}_i, \tag{8}$$

где $\bar{X}_i$ — среднее значение величины X_i;

$\bar{A} = f_1(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n)$;

$\bar{Y_i}$ — чувствительность, определенная для нового среднего значения параметра $A = \bar{A}$:

$$\bar{Y}_i = \frac{\partial A}{\partial X_i}\Big|_{X_i = \bar{X}_i} \cdot \frac{\bar{X}_i}{\bar{A}}; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Формулой (8) целесообразно пользоваться при расчете коэффициентов $\varkappa_i$, так как выражение чувствительности $\bar{Y}_i$ проще соответствующих выражений коэффициентов $\varkappa_i$, определенных непосредственно через параметры $\bar{X}_i$ и их приращения $\delta \bar{X}_i$.

Случайная величина δA распределена по нормальному закону. Поэтому для ее характеристики достаточно знать ее математическое ожидание и дисперсию:

$$M_{\delta A} = \bar{\varkappa}_1 M_{\delta X_1} + \bar{\varkappa}_2 M_{\delta X_2} + \ldots + \bar{\varkappa}_n M_{\delta X_n}; \tag{10}$$

$$\sigma^2_{\delta A} = \sum^{n} \bar{\varkappa}_i^2 \sigma^2_{\delta X_i} + 2 \sum_{i > j} Z_{ij} \bar{\varkappa}_i \bar{\varkappa}_j \sigma_{\delta X_i} \sigma_{\delta X_j}, \tag{11}$$

где Z_{ij} — коэффициент корреляции величин δX_i и δX_j.

Если математическое ожидание $M_{\delta A}$ равно нулю, то среднеквадратическое $\sigma_{\delta A}$ равно коэффициенту вариации $\gamma_{\delta A}$, тройное значение которого и определяет случайную погрешность прибора.

В тех случаях, когда $M_{\delta A} \neq 0$, среднее значение выходного параметра равно $\bar{A} = A_0(1 + M_{\delta A})$. Величина $M_{\delta A}$ определяет систематическую погрешность, а тройное значение среднеквадратического $\sigma_{\delta A}$ — случайную погрешность.

Анализируя процесс во времени, зависимость (4) следует рассматривать как зависимость случайной функции $\delta A(t)$ от случайных функций-аргументов $\delta X(t)$:

$$\delta A(t) = f_2[\delta X_1(t), \delta X_2(t), \ldots, \delta X_n(t)]. \tag{12}$$

При этом целесообразно воспользоваться идеей канонических разложений [8], позволяющих случайные функции выражать через случайные величины.

Обычно статистический материал по элементам задан в виде их числовых характеристик для фиксированных моментов времени. Поэтому целесообразно использовать такой вид канонических разложений, в котором можно было бы непосредственно воспользоваться этими числовыми характеристиками.

В связи с изложенным случайную функцию $\delta A(t)$ можно представить системой ее сечений в виде

$$\delta A(t_s) = M_{1s}\,\delta X_{1s} + M_{2s}\,\delta X_{2s} + \ldots + M_{ns}\,\delta X_{ns};\ S = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

где M_{is} — координатные функции [8];

δX_{is} — сечение случайной функции $\delta X_i(t)$ для $t = t_s$, представляющее собой случайную величину.

По аналогии с (6) случайная величина

$$\delta X_{is} = M_{\delta X_{is}} + \delta' X_{is} \tag{14}$$

состоит из постоянной составляющей — математического ожидания $M_{\delta X_{is}}$ — и переменной составляющей — случайной величины $\delta' X_{is}$.

Рассматривая выражения (6) и (13), видим, что они отличаются только тем, что (6) справедливо для какого-то одного момента времени, а (13) — для любого момента. Из сравнения выражений (6) и (13) следует также, что координатные функции M_{is} представляют собой коэффициенты $\bar{\varkappa}_i$, определенные для момента $t = t_s$, т. е.

$$M_{is} = \frac{A_s}{A_0}\ \frac{X_{i0}}{\overline{X}_{is}}\ \overline{Y}_{is}, \tag{15}$$

где $\overline{Y}_{is}$, — чувствительность по параметру X_{is}, определенная по средним значениям параметров $X_j = \overline{X}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ для момента $t = t_s$.

Числовые характеристики сечения случайной функции определяются по формулам, аналогичным (10) и (11), т. е. математическое ожидание сечения случайной функции имеет вид

$$M[\delta A(t_s)] = M_{1s} M_{\delta X_{1s}} + M_{2s} M_{\delta X_{2s}} + \ldots + M_{ns} M_{\delta X_{ns}};$$
$$s = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{16}$$

а дисперсия сечения случайной функции —

$$\sigma^2[\delta A(t_s)] = \sum_i^n (M_{is}\,\sigma_{\delta X_{is}})^2 + 2\sum_{i<j} Z_{ijs}\, M_{is}\, M_{js}\, \sigma_{\delta X_{is}}\, \sigma_{\delta X_{js}};$$
$$s = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

где $\sigma_{\delta X_{is}}$ — среднеквадратическое величины δX_i для момента $t = t_s$.

Выражение (16) определяет систематическую погрешность во времени, а тройное значение среднеквадратического $\sigma[\delta A(t_s)]$ — случайную погрешность во времени.

Таким образом, имея значения числовых характеристик элементов $M_{\delta x_{is}}$ и $\sigma_{\delta x_{is}}$ для разных сечений времени $s=0, 1, 2, \ldots$, можно определить изменение систематической и случайной погрешностей, вызванных изменением элементов во времени. Причем следует иметь в виду, что если систематическая погрешность сравнительно легко устранима калибровкой, то случайная погрешность со временем увеличивается и устранить ее калибровкой невозможно.

Чтобы рассчитать погрешность во времени, нужно, по крайней мере, иметь характеристики поведения параметров исходных элементов в зависимости от времени t, влажности b и температуры $t°$. Обычно это известно для параметров двухполюсников — сопротивлений, конденсаторов, катушек индуктивностей — и для параметров зависимых источников — ламп и транзисторов. Иначе говоря, приращение параметра элемента равно

$$\delta X_i = \varphi(\delta X_{i0},\ t,\ t°,\ b),$$

где δX_{i0} — производственный допуск.

Ограничиваясь первыми членами ряда Тейлора, найдем

$$\delta X_i = \delta X_{i0} + Y_{it}\,\delta t + Y_{it°}\,\delta t° + Y_{ib}\,\delta b, \qquad (18)$$

где Y_{it} — относительный коэффициент старения;

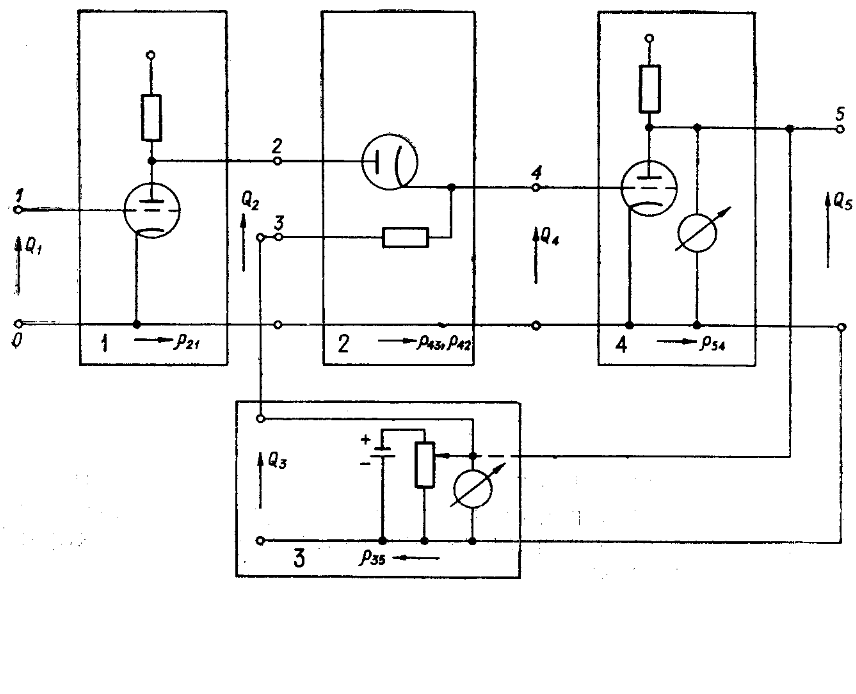
$Y_{it°}$ — относительный температурный коэффициент;

Y_{ib} — относительный коэффициент увлажнения.

Относительные коэффициенты определяются как чувствительность по элементу (3).

Зная величины допусков δX_{i0}, δt, $\delta t°$, δb, коэффициенты Y_{it}, $Y_{it°}$, Y_{ib}, а также их числовые характеристики, можно найти числовые характеристики приращения параметра δX_i [9].

В свою очередь, зная числовые характеристики параметров элементов, находим числовые характеристики блоков (например каскадов), а по ним числовые характеристики прибора.



П р и м е р. Рассмотрим расчет импульсного милливольтметра компенсационного типа (см. рисунок). Схема вольтметра имеет подсхемы: *1* — усилитель, предназначенный для усиления входного напряжения до уровня линейного детектирования; *2* — линейный детектор с опорным напряжением (дискриминатор); *3* — источник опорного напряжения с индикатором; *4* — индикатор и усилитель разности входного сигнала детектора Q_2 и опорного сигнала Q_3. Пунктирная связь между узлами *5* и *3* показывает, что величина сигнала Q_3 регулируется по величине сигнала Q_2 при наличии усиления разностного сигнала Q_5. Полагаем подсхемы однонаправленными. Тогда для схемы прибора [5] можно записать уравнение

$$\begin{Vmatrix} Q_1' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ \rho_{21} & 1 & & & \\ & & 1 & & \rho_{35} \\ & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 & \\ & & & \rho_{54} & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{Vmatrix} \tag{19}$$

Погрешность прибора определится разницей входного сигнала Q_1' и опорного сигнала Q_3. В случае отсутствия погрешности $Q_1' = Q_3$ полученный из (19) коэффициент передачи

$$A_{31} = \frac{Q_3}{Q_1'} = \frac{\rho_{21}\,\rho_{35}\,\rho_{42}\,\rho_{54}}{1 + \rho_{35}\,\rho_{43}\,\rho_{54}} \tag{20}$$

равен единице.

При наличии погрешности $A_{31} \neq 1$ относительное приращение коэффициента передачи будет определять погрешность прибора. Рассматривая (20) как зависимость случайных функций и переходя к относительным приращениям, согласно (13), будем иметь

$$\begin{aligned} \delta A_{31}(t_s) = M_{21,s}\,\delta\rho_{21,s} + M_{35,s}\,\delta\rho_{35,s} + M_{42,s}\,\delta\rho_{42,s} + \\ + M_{43,s}\,\delta\rho_{43,s} + M_{54,s}\,\delta\rho_{54,s}, \end{aligned} \tag{21}$$

где M_{ijs} — координатные функции, определяемые, согласно (15), в момент времени $t = t_s$.

Найдем вспомогательные выражения чувствительности $\overline{Y}_{ijs}$. Они могут быть определены, согласно (9) или [6, 7]:

$$\overline{Y}_{21,s} = \overline{Y}_{42,s} = 1;$$

$$Y_{35,s} = Y_{54,s} = \frac{1}{1 + \bar{\rho}_{35,s}\,\bar{\rho}_{43,s}\,\bar{\rho}_{54,s}}; \quad \overline{Y}_{43,s} = -\frac{\bar{\rho}_{35,s}\,\bar{\rho}_{43,s}\,\bar{\rho}_{54,s}}{1 + \bar{\rho}_{35,s}\,\bar{\rho}_{43,s}\,\bar{\rho}_{54,s}},$$

где чертой сверху обозначены средние значения параметров для момента $t = t_s$.

Данные расчета по блокам (подсхемам)* приводятся в таблице.

---

* Расчет параметров блоков (подсхем) по параметрам их элементов дан в [10].

	$t=0$					$t=t_s$				
	$\rho_{21,0}$	$\rho_{35,0}$	$\rho_{42,0}$	$\rho_{43,0}$	$\rho_{54,0}$	$\rho_{21,s}$	$\rho_{35,s}$	$\rho_{42,s}$	$\rho_{43,s}$	$\rho_{54,s}$
$M_\rho=\overline{\rho}$	-200	$-0,1$	-1	-1	10^3	-180	$-0,09$	-1	-1	$5\cdot10^2$
$M_{\delta\rho}$	0	0	0	0	0	$-0,1$	$-0,1$	0	0	$-0,5$
$\sigma_{\delta\rho}$	0,01	0,02	0,01	0,01	0,1	0,02	0,03	0,01	0,02	0,15
$\overline{Y}$	1	10^{-2}	1	-1	10^{-2}	1	$2,18\cdot10^{-2}$	1	$-0,98$	$2,18\cdot10^{-2}$
M	1	10^{-2}	1	-1	10^{-2}	1	$2,74\cdot10^{-2}$	1,14	1,11	$5,1\cdot10^{-2}$

Как видно из таблицы, в начальный момент времени $t=0$ (момент выхода из производства) систематическая погрешность равна нулю. Случайная погрешность для данного момента определяется выражением

$$3\sigma[\delta A(0)] = 3\sqrt{(M_{21,0}\sigma_{\delta\rho_{21,0}})^2 + (M_{35,0}\sigma_{\delta\rho_{35,0}})^2 + (M_{42,0}\sigma_{\delta\rho_{42,0}})^2 + (M_{43,0}\sigma_{\delta\rho_{43,0}})^2 + (M_{54,0}\sigma_{\delta\rho_{54,0}})^2}.$$

Здесь не учитывается корреляционная связь между блоками (соответствующие коэффициенты корреляции равны нулю или близки к нему). Объясняется это тем, что каждый блок имеет входное сопротивление, намного большее выходного сопротивления предыдущего блока. Поэтому изменение входного сопротивления, вызванное изменением параметров блоков, практически не сказывается на стабильности коэффициента передачи A_{31} и, как следствие, корреляционная связь между блоками отсутствует.

Учитывая числовые значения координатных функций M и среднеквадратических $\sigma_{\delta\rho}$, найдем величину случайной погрешности прибора

$$3\sigma[\delta A(0)] = 5{,}19\cdot10^{-2}.$$

В момент времени $t=t_s$ наблюдается рост систематической и случайной погрешностей из-за старения элементов. Систематическая погрешность, согласно выражению (16), равна

$$M[\delta A(t_s)] = M_{21,s}M_{\delta\rho_{21,s}} + M_{35,s}M_{\delta\rho_{35,s}} + M_{42,s}M_{\delta\rho_{42,s}} + M_{43,s}M_{\delta\rho_{43,s}} + M_{54,s}M_{\delta\rho_{54,s}},$$

а с учетом числовых значений —

$$M[\delta A(t_s)] = -0{,}125.$$

Систематическая погрешность вызвана в основном нестабильностью усилителя *1* и усилителя разности *4*. Она устраняется калибровкой.

Случайная погрешность равна

$$3\sigma[\delta A(t_s)] = 3\sqrt{(M_{21,s}\sigma_{\delta\rho_{21,s}})^2 + (M_{35,s}\sigma_{\delta\rho_{35,s}})^2 + (M_{42,s}\sigma_{\delta\rho_{42,s}})^2 + (M_{43,s}\sigma_{\delta\rho_{43,s}})^2 + (M_{54,s}\sigma_{\delta\rho_{54,s}})^2},$$

а с учетом числовых значений —

$$3\sigma\,[\delta A\,(t_s)] = 12{,}3\cdot10^{-2}.$$

Как видим, случайная погрешность значительно увеличивается со временем.

Приложение

Рассмотрим взаимосвязь чувствительности Y_i с коэффициентом положения $\bar{\varkappa}_i$.

Случайная величина определяется

$$X_i = X_{i0}\,(1 + \delta X_i),$$

где

$$\delta X_i = M_{\delta X_i} + \delta' X.$$

Приращение выходного параметра, вызванное переменной δX_i, равно

$$\frac{\Delta' A_i}{A_0} = \bar{\varkappa}_i\,\delta' X_i, \qquad (\text{П.1})$$

где $\delta' X_i$ нормировано относительно $\overline{X}_i$.

Приращение выходного параметра имеет вид

$$\frac{\Delta' A_i}{\bar{A}} = \overline{Y}_i\,(\delta' X_i\,\frac{X_{i0}}{\bar{X}_i}), \qquad (\text{П.2})$$

где $\bar{A} = f_1\,(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n)$;

$\overline{Y}_i$ — чувствительность, определенная для $X_j = \overline{X}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$;

$\delta' X_i \dfrac{X_{i0}}{\bar{X}_i}$ — относительное переменное приращение величины X_i, нормированное относительно $\overline{X}_i$.

Из формул (П. 1) и (П. 2) следует, что

$$\bar{\varkappa}_i = \frac{\bar{A}}{A_0}\;\frac{X_{i0}}{\bar{X}_i}\,\overline{Y}_i.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Гусев, А. В. Фомин и др. Расчет электрических допусков радиоэлектронной аппаратуры. М., Изд-во «Советское радио», 1963.
2. В. И. Пампуро. Расчет случайной погрешности сложных аналоговых приборов.— Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений. Новосибирск, 1963.
3. В. Дельтеро, С. Р. Паркер. Принципы проектирования систем автоматического управления. М., Машгиз, 1963.
4. В. И. Пампуро. Рациональный метод анализа линейных схем.— Математическое моделирование и электрические цепи, вып. 3. Киев, Изд-во АН СССР, 1963.
5. В. И. Пампуро. Обобщение одного метода анализа радиотехнических систем непрерывного действия.— Математическое моделирование и электрические цепи. Киев, Изд-во АН УССР, 1965.

6. В. И. Пампуро. Определение приращения выходного параметра для малых и больших приращений параметров элементов. КДНТП, 1965.
7. В. И. Пампуро. Теоремы приращения функций при вариации аргументов.— Математическое моделирование и электрические цепи. Киев, Изд-во АН УССР, 1965.
8. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
9. А. В. Фомин. Расчет электрических допусков на параметры радиоизделий, учитывающий влияние температуры, влаги и старения. КДНТП, 1965.
10. В. И. Пампуро. Оценка серийноспособности аппаратуры.— Вопросы технического прогреса в радиотехнике и электросвязи. Киевское областное правление НТОРиЭ, 1965.

Поступила в редакцию
16 декабря 1965 г.