А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 3 1966

ЭЛЕКТРОИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

УДК 621.3.011.1

Э. В. ЗЕЛЯХ, В. А. КИСЕЛЬ
(Одесса)

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ПАРАМЕТРОВ N-ПОЛЮСНИКА

Предлагаются способы измерения элементов матриц проводимостей и сопротивлений как обратимых, так и необратимых многополюсников путем измерения входных иммитансов многополюсника в определенных режимах его полюсов.

Известно [1], что N-полюсник (рис. 1) полностью характеризуется любой из следующих матриц, называемых соответственно матрицей проводимостей и матрицей сопротивлений:

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11}\, y_{12} \ldots y_{1N} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{N1}\, y_{N2} \ldots y_{NN} \end{bmatrix}; \quad [z] = \begin{bmatrix} z_{11}\, z_{12} \ldots z_{1N} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_{N1}\, z_{N2} \ldots z_{NN} \end{bmatrix},$$

где y_{jj} — собственная проводимость j-го полюса (назовем так проводимость между полюсом j и остальными полюсами, соединенными накоротко) (рис. 2, *а*);

y_{jk} — взаимная проводимость j и k-го полюсов (назовем так проводимость, равную отношению тока I_j полюса j к напряжению u_k между полюсом k и остальными полюсами, соединенными накоротко) (см. рис. 2, *б*);

z_{jj} — собственное сопротивление j-го контура (назовем так сопротивление между полюсами j и $j+1$ при холостом ходе остальных полюсов) (рис. 3, *а*);

z_{jk} — взаимное сопротивление j и k-го контуров (назовем так со-

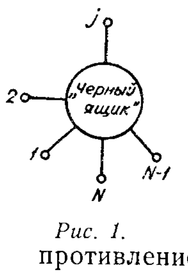

Рис. 1.

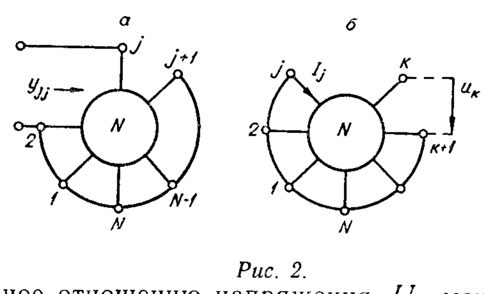

Рис. 2.

противление, равное отношению напряжения U_k между полюсами j и $j+1$ к току i_k, протекающему в контуре k при холостом ходе остальных полюсов) (см. рис. 3, *б*).

N-полюсник часто задается в виде «черного ящика» — устройства, внутренняя структура которого неизвестна. В этом случае значения элементов матриц проводимостей и сопротивлений необходимо измерять. Измерения собственных проводимостей y_{jj} и сопротивлений z_{jj} N-полюсника, являющихся входными иммитансами, можно выполнять мостовыми методами с высокой степенью точности.

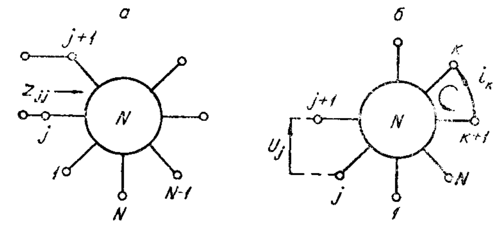

Рис. 3.

Для непосредственного же измерения взаимных проводимостей и сопротивлений мостовые способы непригодны.

В связи с этим представляет интерес вопрос о том, возможно ли определение взаимных сопротивлений и взаимных проводимостей многополюсника путем измерения одних лишь входных иммитансов N-полюсника. Положительный ответ на этот вопрос в применении к частному случаю — определению взаимных сопротивлений обратимого N-полюсника — можно дать на основании работы [2].

Настоящая статья имеет целью освещение данного вопроса в более общем виде — применительно к взаимным проводимостям и сопротивлениям как обратимого, так и необратимого N-полюсника, а также $(P+1)$-полюсника.

Определение взаимных проводимостей

Введем в рассмотрение матрицу входных проводимостей

$$[Y]_{\text{вх}} = \begin{bmatrix} Y'_{11}\, Y'_{12} \ldots Y'_{1N} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Y'_{N1}\, Y'_{N2} \ldots Y'_{NN} \end{bmatrix}$$

Под элементом Y'_{jk} будем понимать проводимость, измеренную в следующих условиях: j-й полюс соединяется с k-м полюсом, остальные полюса соединяются накоротко между собой; проводимость между указанными группами полюсов обозначим Y'_{jk} (рис. 4, a). Величина Y'_{jk} может быть названа собственной проводимостью j и k-го полюсов, соединенных накоротко. Проводимость между j-м полюсом и всеми остальными полюсами, соединенными накоротко, обозначим Y'_{jj}.

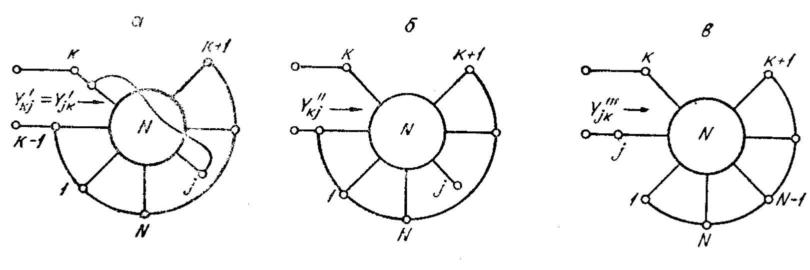

Рис. 4.

Нетрудно видеть, что

$$Y'_{jj} = y_{jj}. \tag{1}$$

Применив далее известное правило сложения полюсов (см. например [3]), найдем, что соединению k и j-го полюсов накоротко соответствует сложение в матрице $[y]$ j-й строки с k-й строкой и j-го столбца с k-м столбцом; следовательно, собственная проводимость k и j-го полюсов определится формулой

$$Y'_{jk} = Y'_{kj} = y_{jj} + y_{kk} + y_{jk} + y_{kj}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что для обратимых N-полюсников, у которых, как известно, $y_{jk} = y_{kj}$, по известной матрице $[Y]_{\text{вх}}$ легко вычислить матрицу $[y]$, согласно формулам:

$$y_{jj} = Y'_{jj}; \tag{3}$$

$$y_{jk} = y_{kj} = \frac{1}{2}\left(Y'_{jk} - Y'_{jj} - Y'_{kk}\right) \qquad (j \neq k). \tag{4}$$

Поскольку матрица $[y]$ является особенной:

$$\sum_{j=1}^{N} y_{jk} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N);$$

$$\sum_{k=1}^{N} y_{jk} = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

то нет необходимости находить все N^2 ее элементов. Приведенные формулы необходимы для нахождения лишь $(N-1)^2$ значений y_{jk} $(j,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N-1)$, а значения y_{jN} и y_{Nk} $(j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ можно определить из выражений:

$$y_{jN} = -\sum_{k=1}^{N-1} y_{jk} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N);$$

$$y_{Nk} = -\sum_{j=1}^{N-1} y_{jk} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Таким образом, для нахождения матрицы $[y]$ обратимого N-полюсника необходимо произвести $N-1$ измерений входных проводимостей типа Y'_{jj} $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1)$ и $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ измерений входных проводимостей типа Y_{jk} $(j \neq k;\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1)$, а затем воспользоваться формулами (4).

Для необратимых N-полюсников, для которых $y_{jk} \neq y_{kj}$, знание матрицы $[Y]_{\text{вх}}$ позволяет определить только сумму взаимных проводимостей y_{jk} и y_{kj}, согласно уравнению, вытекающему из (2):

$$y_{jk} + y_{kj} = Y'_{jk} - Y'_{jj} - Y'_{kk}. \tag{5}$$

Всего по матрице $[Y]_{\text{вх}}$ можно составить $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ независимых уравнений типа (5), содержащих $(N-1)(N-2)$ неизвестных y_{jk} и y_{kj} $(j \neq k;\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1)$. Поскольку число неизвестных вдвое больше числа уравнений, для нахождения y_{jk} и y_{kj} в случае необратимого N-полюсника требуется дополнительное знание еще $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ соотношений, связывающих y_{jk} и y_{kj}. Эти соотношения можно получить следующими способами.

Первый способ. Создадим для j-го полюса режим холостого хода и измерим входную проводимость между k-м полюсом и всеми остальными полюсами (кроме j-го), соединенными накоротко между собой (см. рис. 4, *б*). Обозначим указанную проводимость Y''_{kj}. Пользуясь правилом исключения полюса [3], найдем, что

$$Y''_{kj} = y_{kk} - \frac{y_{jk}\, y_{kj}}{y_{jj}} \quad (j \neq k);$$

отсюда с учетом (3) получим

$$y_{jk}\, y_{kj} = \left(Y'_{kk} - Y''_{kj}\right) Y'_{jj}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что значения y_{jk} и y_{kj} являются корнями уравнения

$$y^2 - a_y\, y + b_y = 0, \tag{7}$$

где в соответствии с (5) и (6)

$$\begin{aligned} a_y &= Y'_{jk} - Y'_{jj} - Y'_{kk}; \\ b_y &= \left(Y'_{kk} - Y''_{kj}\right) Y'_{jj}. \end{aligned} \tag{8}$$

Поэтому

$$y_{jk},\ y_{kj} = \frac{a_y}{2} \pm \sqrt{\frac{a_y^2}{4} - b_y} \quad (j \neq k). \tag{9}$$

Второй способ. Создадим для j и k-го полюсов режим холостого хода при соединенных накоротко остальных полюсах и измерим проводимость между j и k-м полюсами (см. рис. 4, *в*). Обозначим указанную проводимость Y'''_{jk}. Можно показать, что

$$Y'''_{jk} = \frac{y_{jj}\, y_{kk} - y_{jk}\, y_{kj}}{Y'_{jk}}.$$

Следовательно,

$$y_{jk}\, y_{kj} = b'_y, \tag{10}$$

где

$$b'_y = y_{jj}\, y_{kk} - Y'''_{jk}\, Y'_{kj}.$$

Искомые проводимости y_{jk} и y_{kj} можно теперь найти по той же формуле (9), подставив в нее вместо b_y величину b'_y, определяемую из соотношения (10).

Выражение (9) позволяет, таким образом, вычислить значения взаимных проводимостей путем измерения входных проводимостей с помощью либо первого, либо второго способа. Заметим, однако, что оба способа не дают возможности определить, какое из решений (9) следует считать равным y_{jk} и какое — y_{kj}. Надо полагать, что измерениями одних лишь входных проводимостей этого вообще сделать нельзя *.

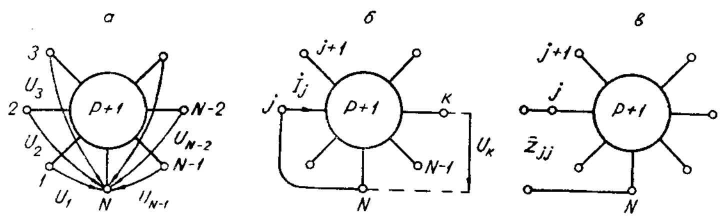

Рис. 5.

Приведенные рассуждения справедливы также для матрицы проводимостей $(P+1)$-полюсника [1], так как эта матрица получается из матрицы проводимостей N-полюсника путем вычеркивания N-го столбца и N-й строки, где N — базисный полюс $(P+1)$-полюсника (рис. 5, *а*).

Определение взаимных сопротивлений

Матрица сопротивлений $[z]$ многополюсника является особенной, так как сумма элементов строки или столбца равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{N} z_{jk} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N);$$

$$\sum_{k=1}^{N} z_{jk} = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Вычеркнув в матрице $[z]$ N-ю строку и N-й столбец, получим укороченную матрицу $[z]_a$. Если задана матрица $[z]_a$, то переход к матрице $[z]$ осуществляется добавлением к матрице $[z]_a$ N-й строки и N-го столбца, значения элементов которых равны:

$$\begin{aligned} z_{jN} &= -\sum_{k=1}^{N-1} z_{jk} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N); \\ z_{Nk} &= -\sum_{j=1}^{N} z_{jk} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \end{aligned} \tag{11}$$

---

* Когда данная статья была уже написана, вышла в свет работа [4], автор которой пришел к такому же выводу.

Рассмотрим N-полюсник как $(P+1)$-полюсник с полюсом N в качестве базисного. Матрица сопротивлений $[\bar{z}]$ $(P+1)$-полюсника имеет вид

$$[\bar{z}] = \begin{bmatrix} \bar{z}_{11}\,\bar{z}_{12}\,\ldots\,\bar{z}_{1,\,N-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{z}_{N-1,\,1}\,\bar{z}_{N-1,\,2}\,\ldots\,\bar{z}_{(N-1),\,(N-1)} \end{bmatrix}$$

где $\bar{z}_{jj}$ — сопротивление между j и N-м полюсами при холостом ходе остальных полюсов (см. рис. 5, *б*), которое можно назвать собственным сопротивлением контура j;

$\bar{z}_{jk}$ — сопротивление, равное отношению напряжения k-го полюса относительно базиса к току j-го полюса, когда j-й полюс соединен с базисом, а остальные полюсы разомкнуты, как показано на рис. 5, *в* (это сопротивление можно назвать взаимным сопротивлением контуров j и k).

Сравнив уравнение внешних контурных токов N-полюсника с соответствующими уравнениями полученного из него $(P+1)$-полюсника, можно убедиться, что между матрицами $[z]_a$ и $[\bar{z}]$ существует зависимость

$$[z]_a = P_t\,[\bar{z}]\,P, \qquad (12)$$

где

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

P_t — транспонированная матрица P.

Будем искать непосредственно не матрицу $[z]$, а матрицу $[\bar{z}]$, так как от матрицы $[\bar{z}]$ просто перейти к матрице $[z]$, согласно (11) и (12).

Составим матрицу входных сопротивлений N-полюсника [2]

$$[Z]_{\text{вх}} = \begin{bmatrix} 0 & Z'_{12} & Z'_{13}\ldots Z'_{1N} \\ Z'_{21} & 0 & Z'_{23}\ldots Z'_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ Z'_{N1} & Z'_{N2} & Z'_{N3}\ldots 0 \end{bmatrix}$$

В этой матрице $Z'_{jj} = 0$; Z'_{jk} равно сопротивлению между j и k-м полюсами при холостом ходе остальных полюсов (рис. 6, *а*). Матрица $[Z]_{\text{вх}}$ симметрична как для обратимых, так и для необратимых N-полюсников, поскольку $Z'_{jk} = Z'_{kj}$.

Элементы матриц $[Z]_{\text{вх}}$ и $[\bar{Z}]$ связаны между собой зависимостью [2]:

$$Z'_{jN} = \bar{z}_{jj};$$

$$Z'_{jk} = \bar{z}_{jj} + \bar{z}_{kk} - \bar{z}_{kj} - \bar{z}_{jk} \quad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1). \qquad (13)$$

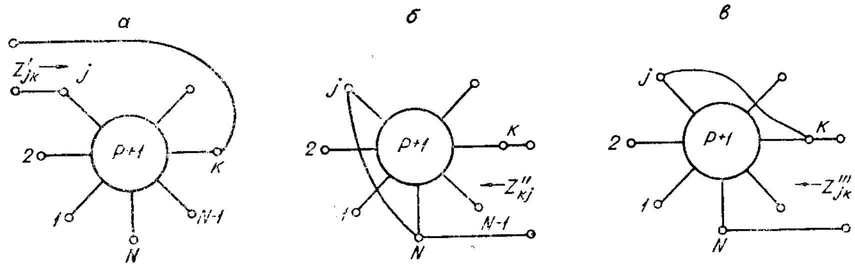

Рис. 6.

Для обратимых N-полюсников $\bar{z}_{kj} = \bar{z}_{jk}$, поэтому

$$\bar{z}_{jk} = \bar{z}_{kj} = \frac{1}{2}\left(Z'_{jN} + Z'_{kN} - Z'_{kj}\right). \tag{14}$$

Таким образом, выражения (13) и (14) позволяют определить матрицу $[\bar{z}]$ обратимого $(P+1)$-полюсника по известной матрице $[Z]_{\text{вх}}$.

В случае необратимого $(P+1)$-полюсника матрица $[Z]_{\text{вх}}$ позволяет определить $(N-1)$ значений собственных сопротивлений $\bar{z}_{jj}$ $(j = 1, 2, \ldots, N-1)$ и составить $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ уравнений для взаимных сопротивлений $\bar{z}_{jk}$ и $\bar{z}_{kj}$ вида

$$\bar{z}_{jk} + \bar{z}_{kj} = a_z, \tag{15}$$

где

$$a_z = Z'_{jN} + Z'_{kN} - Z'_{kj}.$$

Недостающие уравнения можно получить следующими способами.

Первый способ. Соединим полюс j с полюсом N накоротко и измерим сопротивление между k и N-м полюсами (см. рис. 6, *б*). Обозначим полученное сопротивление Z''_{kj}. Воспользовавшись правилом исключения контура [3], получим

$$Z''_{kj} = \bar{z}_{kk} - \frac{z_{jk}\, z_{kj}}{\bar{z}_{jj}},$$

откуда с учетом (9) найдем

$$\bar{z}_{jk}\,\bar{z}_{kj} = b_z, \tag{16}$$

где

$$b_z = Z'_{jN}\, Z'_{kN} - Z''_{kj}\, Z'_{jN}.$$

Из (15) и (16) следует, что значения $\bar{z}_{jk}$ и $\bar{z}_{kj}$ являются корнями уравнения, аналогичного уравнению (7):

$$z^2 - a_z z + b_z = 0.$$

Поэтому

$$\bar{z}_{jk},\ \bar{z}_{kj} = \frac{a_z}{2} \pm \sqrt{\frac{a_z^2}{4} - b_z}\,. \tag{17}$$

Второй способ. Соединим полюс k с полюсом j и измерим сопротивление Z_{jk}''' между j и N-м полюсами (см. рис. 6, *в*). Можно показать, что

$$Z_{jk}''' = \frac{\bar{z}_{jj}\bar{z}_{kk} - \bar{z}_{jk}\bar{z}_{kj}}{Z_{jk}'}\,.$$

Следовательно,

$$\bar{z}_{jk}\bar{z}_{kj} = b_z',$$

где

$$b_z' = \bar{z}_{jj}\bar{z}_{kk} - Z_{jk}''' Z_{jk}'. \tag{18}$$

Значения $\bar{z}_{jk}$ и $\bar{z}_{kj}$ можно теперь найти по формуле (17), подставив в нее вместо b_z величину b_z', определенную из (18).

Из изложенного выше вытекает, что матрица $[z]$ так же, как и матрица $[y]$, может быть определена по результатам измерения входных сопротивлений N-полюсника при определенных режимах его полюсов.

Заметим, что в данном случае нельзя различить $\bar{z}_{jk}$ и $\bar{z}_{kj}$.

Обращает на себя внимание тот факт, что изложенные способы измерения матриц $[z]$ и $[y]$ полностью взаимно дуальны, в чем легко убедиться, сравнивая (4)—(10) с (13)—(18).

В заключение отметим, что описанные способы определения параметров многополюсника могут быть полезны не только при измерениях, но и при вычислениях матриц $[z]$ и $[y]$, т. е. в том случае, когда N-полюсник задан «на бумаге» (неизвестны его схема и величины элементов). Действительно, вычисление входных проводимостей и сопротивлений рассмотренных здесь видов выполняется легче, чем вычисление взаимных проводимостей и сопротивлений N-полюсника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических схем. М., Изд-во АН СССР, 1951.
2. Б. В. Карпюк. О синтезе линейных многополюсников.— Электричество, 1964, № 2.
3. В. П. Сигорский. Анализ электронных схем. Киев, Гостехиздат УССР, 1960.
4. L. Weinberg. Reciprocal and Nonreciprocal Systems, Characteristic Polynomials and Driving Point Functions.— Transaction IEEE, 1965, CT—12, № 2.

Поступила в редакцию
16 декабря 1965 г.,
окончательный вариант —
23 января 1966 г.