

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

УДК 681.142.621

И. И. КОРШЕВЕР,
В. Б. СМОЛОВ, П. Е. ТВЕРДОХЛЕБ, В. С. ФОМИЧЕВ
(Новосибирск — Ленинград)

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРО-АНАЛОГОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Описывается метод построения цифро-аналоговых функциональных преобразователей, основанный на предварительном разложении функции в ряд по функциям Уолша. Показывается, что элементы цифро-аналогового преобразователя хорошо интерпретируются категориями этого разложения. Приводятся примеры реализации некоторых цифро-аналоговых функциональных преобразователей. Определяются ограничения, в пределах которых применение описанного метода дает выигрыш по сравнению с известными методами.

Многие задачи вычислительной и измерительной техники связаны с функциональным преобразованием величины x , заданной цифровым кодом, в некоторую непрерывную величину $z = \Phi(x)$. При этом нередко прибегают к кусочно-ступенчатой аппроксимации функции $z = \Phi(x)$, состоящей в том, что функция $\Phi(x)$ заменяется ступенчатой функцией $F(x)$ так, что отдельные значения функций $\Phi(x)$ и $F(x)$ совпадают [1].

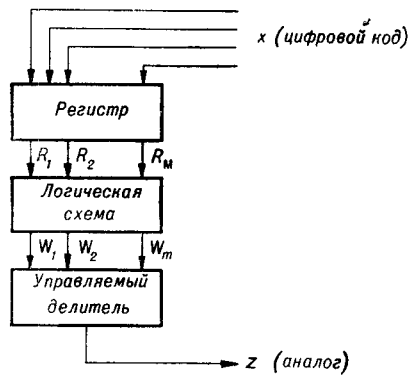


Рис. 1.

Такое представление функции аналогично ее табличному заданию, так как функция определяется n значениями величины z при n значениях аргумента x . В известных цифро-аналоговых преобразователях текущее значение функции $F(x)$ представляется напряжением, снимаемым с потенциального или токового делителя, а значение аргумента задается состоянием регистра дешифратора, управляющего работой этого делителя (рис. 1). Проектирование таких преобразователей затрудняется из-за сложности делителей и логических схем (эти устройства тем сложнее, чем более высокая точность преобразования необходима).

Авторам не известны попытки использования для представления функции при аналого-цифровом преобразовании ее приближения каким-либо рядом. Выгоды, связанные с подобного рода возможностями, оче-

видны, поскольку использование для воспроизведения функции коэффициентов ряда разложения значительно сократило бы количество задаваемых в функциональном преобразователе параметров по сравнению с табличным.

Нам представляется, что одним из наиболее удобных для этих целей рядов разложения является ряд, составленный из функций Уолша. В связи с этим основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать возможность и целесообразность применения разложений по функциям Уолша при проектировании цифро-аналоговых функциональных преобразователей.

Разложение по функциям Уолша является одним из видов разложения по функциям Фурье. Функции Уолша строятся из так называемых функций Радемахера, заданных на полуоткрытом отрезке (0,1) следующим образом:

$$R_l(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } \frac{2i}{2^l} \leq x < \frac{2i+1}{2^l}; \\ -1, & \text{если } \frac{2i+1}{2^l} \leq x < \frac{2i+2}{2^l}, \end{cases} \quad (1)$$

где l — порядок функции ($l=1,2, \dots, M$);

i — порядковый номер интервала задания функции $R_l(x)$ ($i=0, 1, \dots, 2^{l-1}$).

Иными словами, знакопеременная функция $R_l(x)$ задается на 2^l интервалах таким образом, что если порядковый номер интервала i четный (начиная с нулевого), то $R_l(x) = +1$, а если нечетный, то $R_l(x) = -1$.

Правило образования функций Уолша из функций Радемахера подобно правилу образования двоичных чисел и наглядно иллюстрируется табл. 1. Из таблицы видно, что функция $W_k(x)$ есть произведение функ-

Таблица 1

Функции Уолша \ Функции Радемахера	...	$R_4(x)$	$R_3(x)$	$R_2(x)$	$R_1(x)$	Выражение функций Уолша через функции Радемахера
$W_1(x)$...	0	0	0	1	$W_1(x) = R_1(x)$
$W_2(x)$...	0	0	1	0	$W_2(x) = R_2(x)$
$W_3(x)$...	0	0	1	1	$W_3(x) = R_1(x) R_2(x)$
$W_4(x)$...	0	1	0	0	$W_4(x) = R_3(x)$
$W_5(x)$...	0	1	0	1	$W_5(x) = R_3(x) R_1(x)$
$W_6(x)$...	0	1	1	0	$W_6(x) = R_3(x) R_2(x)$
$W_7(x)$...	0	1	1	1	$W_7(x) = R_3(x) R_2(x) R_1(x)$
$W_8(x)$...	1	0	0	0	$W_8(x) = R_4(x)$
$W_9(x)$...	1	0	0	1	$W_9(x) = R_4(x) R_1(x)$
...

ций Радемахера, порядки которых соответствуют значащим разрядам в двоичном разложении индекса k функции $W_k(x)$.

Графики первых четырех функций Радемахера и Уолша показаны на рис. 2.

Система функций Уолша является ортогональной, нормированной и полной [2].

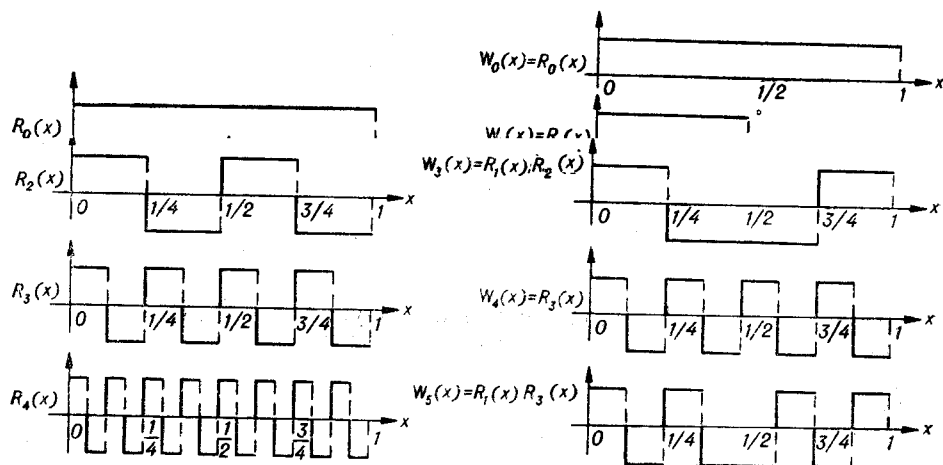


Рис. 2

Разложение интегрируемой функции $\Phi(x)$ по функциям Уолша имеет следующий вид:

$$\Phi(x) \approx \sum_{m=0}^n a_m W_m(x), \quad (2)$$

а коэффициенты a_m находятся так же, как и коэффициенты Фурье:

$$a_m = \int_0^1 \Phi(x) W_m(x) dx,$$

или при дискретном задании функции

$$a_m = \sum_{l=0}^{2M-1} \Phi_l(x) W_m(x).$$

Следовательно, для подсчета коэффициента при любой из функций разложения необходимо получить значения интеграла функции $\Phi(x)$ на интервалах задания функции $W_m(x)$ и затем суммировать эти значения с учетом ее знаков на этих интервалах. Из-за громоздкости вычислений, связанных с подсчетом коэффициентов, эти операции рекомендуется выполнять на цифровых вычислительных машинах. Программирование

вычисления коэффициентов особого труда не составляет. Следует отметить, что в случае графического задания функции процедура нахождения коэффициентов разложения отличается от описанной лишь тем, что интегрирование функции в интервалах изменения переменной x осуществляется одним из приближенных графических методов.

Легко заметить, что полиномы Уолша хорошо интерпретируются элементами цифро-аналоговых преобразователей. Действительно, выходное напряжение делителя напряжения (или токового делителя, состоящего из проводимостей, коммутируемых на два уровня) описывается уравнением

$$U_{\text{вых}} = m_v \sum_{m=0}^n y_m \varphi_m(x), \quad (3)$$

где m_v — масштабный коэффициент преобразования;

y_m — величина весового элемента, включенного в m -ю ветвь делителя;

$\varphi_m(x)$ — переключательная функция, управляющая положением ключа в m -й ветви делителя;

x — цифровой код аргумента.

Из соответствия выражений (2) и (3) заключаем о возможности моделирования ряда Уолша выходным напряжением биполярного делителя напряжения (или тока). Следовательно, выполняя значения проводимостей (сопротивлений) в соответствии с коэффициентами a_m ряда (2) и переключая направление напряжения (тока) в соответствии со значениями функций $W_m(x)$, можно на выходе цифро-аналогового преобразователя получить напряжение, находящееся в искомой функциональной зависимости от числа x .

Значения функций $W_m(x)$ в зависимости от величины числа x могут быть получены следующим образом. Известно [2], что число x , имеющее в двоичном представлении M разрядов, изображается M начальными функциями Радемахера. Разряд l ($1 \leq l \leq M$) с весом 2^{l-1} интерпретируется функцией Радемахера, индекс которой тоже l . Эта функция может быть сформирована двухустойчивым элементом, представляющим разряд l двоичного разложения аргумента x , а вся совокупность функций Радемахера — регистром, являющимся фиксатором кода аргумента. При этом нулевое состояние l -го двухустойчивого элемента соответствует значению $+1$ функции $R_l(x)$, а возбуждение — значению -1 . Тогда функции Уолша получаются путем перемножения функций Радемахера по правилу, указанному в табл. 1.

Операция умножения легко моделируется с помощью двухпозиционных ключей, коммутирующих на два уровня. Управление ключами осуществляется с помощью схем, реализующих переключательные функции «сумма по модулю два». Пример схемы, реализующей операцию «сумма по модулю два», приведен на рис. 3, а. Схема построена на типовых динамических ячейках. Полная логическая схема, воспроизводящая все функции Уолша для случая четырехразрядного двоичного кода аргумента x , приведена на рис. 3, б.

Логическая схема состоит из нескольких ярусов, на каждом из которых формируются функции Уолша одного ранга (ранг — число значащих разрядов в двоичном разложении порядка функции Уолша). Функции Уолша первого ранга (функции Радемахера) формируются на первом ярусе двухустойчивыми элементами регистра кода аргумента. На каждом из последующих ярусов логической схемы происходит нарастание ранга функции Уолша на единицу по сравнению с функция-

ми Уолша предыдущего яруса, причем это нарастание происходит за счет перемножения функций Уолша, сформированных на предыдущем ярусе логической схемы, на соответствующие функции Радемахера.

Сигналы, сформированные логической схемой, используются для управления ключами, осуществляющими коммутацию напряжений (то-

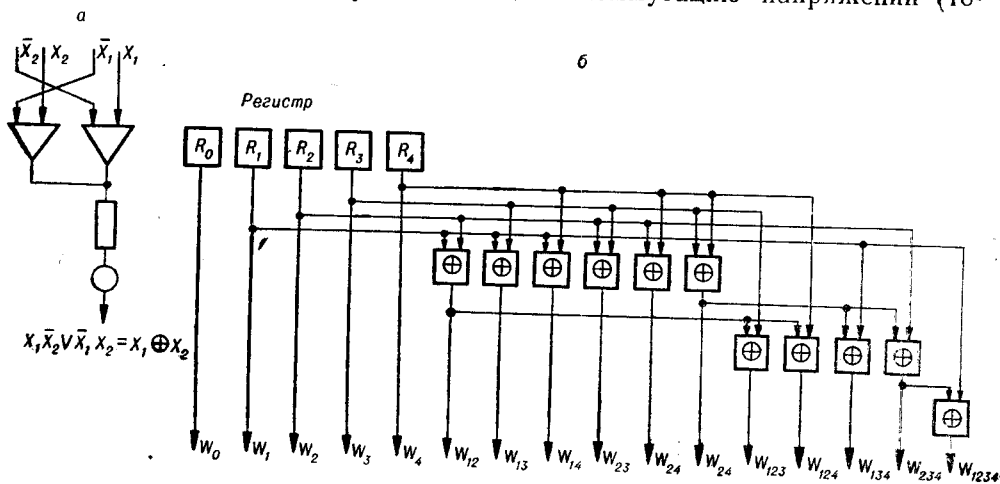


Рис. 3.

ков) в цепях весовых сопротивлений (или проводимостей). Напомним, что значения сопротивлений выбираются в соответствии с коэффициентами функций Уолша.

Следует отметить, что если разложение (2) содержит небольшое число функций Уолша высших рангов и, следовательно, логическая схема, формирующая эти функции, проста, то оказывается возможным реализовывать эти функции непосредственно на измерительных ключах,

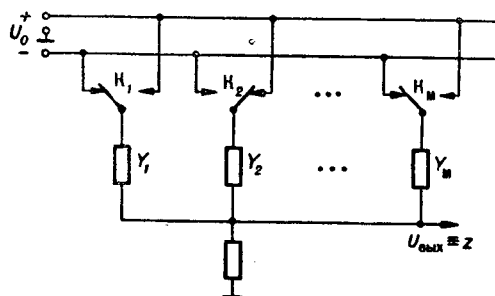


Рис. 4.

коммутирующих весовые токи или напряжения.

Для иллюстрации описываемого способа построения цифро-аналоговых функциональных преобразователей рассмотрим несколько примеров.

Случай 1.

$$z = x. \quad (4)$$

Это функция линейного цифро-аналогового преобразователя, широко используемого для формирования компенсационных на-

пряжений в аналого-цифровых преобразователях (рис. 4).

Разложение зависимости (4) по функциям Радемахера (или, что то же самое, по функциям Уолша первого ранга) имеет следующий вид:

$$z = \frac{1}{2} - \sum_{l=1}^M \frac{1}{2^{l+1}} R_l(x),$$

где $\frac{1}{2^{l+1}} = a_l$ — коэффициент разложения, соответствующий весу проводимости Y_l делителя;

$R_l(x)$ — функция Радемахера, интерпретируемая состоянием ключа K_l .

Управление ключами в данном случае осуществляется непосредственно от регистра (см. рис. 1), состояние которого соответствует значению кода x_l .

Линейная функция — единственная непрерывная функция, которая может быть представлена в виде ряда по функциям Уолша первого порядка.

Случай 2.

$$z = x^2.$$

Этой зависимости соответствует разложение

$$z = x^2 \approx A_0 - \sum_{l=1}^M \frac{1}{2^{l+1}} R_l(x) + \sum_{l=1}^{M-1} \sum_{\xi=l+1}^M \frac{1}{2^{l+\xi+1}} R_l(x) R_\xi(x), \quad (5)$$

где

$$A_0 = \sum_{l=0}^M \frac{1}{2^{2(l+1)}}.$$

Можно видеть, что в (5), помимо функций Уолша первого ранга, присутствуют функции Уолша второго ранга, т. е.

$$W_m(x) = R_l^s(x) R_\xi(x).$$

Если в (5) принять $M=6$, то это выражение приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned} z = & \sum_{l=0}^6 \frac{1}{4^{l+1}} - \sum_{l=1}^6 \frac{1}{2^{l+1}} R_l(x) + \frac{1}{2^4} R_1(x) R_2(x) + \\ & + \frac{1}{2^5} R_1(x) R_3(x) + \frac{1}{2^6} R_1(x) R_4(x) + \frac{1}{2^7} R_1(x) R_5(x) + \\ & + \frac{1}{2^8} R_1(x) R_6(x) + \frac{1}{2^6} R_2(x) R_3(x) + \frac{1}{2^7} R_2(x) R_4(x) + \\ & + \frac{1}{2^8} R_2(x) R_5(x) + \frac{1}{2^9} R_2(x) R_6(x) + \frac{1}{2^8} R_3(x) R_4(x) + \\ & + \frac{1}{2^9} R_3(x) R_5(x) + \frac{1}{2^{10}} R_3(x) R_6(x) + \frac{1}{2^{10}} R_4(x) R_5(x) + \\ & + \frac{1}{2^{11}} R_4(x) R_6(x) + \frac{1}{2^{12}} R_5(x) R_6(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнивая теперь способ разложения по функциям Уолша со способом, основанным на табличном представлении функции $\Phi(x)$, следует отметить, что в общем случае для получения определенного количества ступеней разложения необходимо формировать столько же функций Уолша, сколько требуется ступеней при табличном разложении, ибо

$$\sum_{m=0}^n C_n^m = 2^n. \quad \text{Однако выигрыш при использовании данного способа за-}$$

ключается в том, что при разложении конкретных функций очень часто ряд коэффициентов при функциях Уолша обращается в нуль. В рассмотренных случаях это справедливо для коэффициентов при функциях Уолша соответственно выше первого и второго рангов.

Кроме того, некоторым числом функций Уолша почти всегда можно пренебречь ввиду малости их коэффициентов (количество отбрасываемых коэффициентов зависит от свойств приближаемой функции). Отбрасывание коэффициентов должно осуществляться таким образом, чтобы для заранее заданной среднеквадратической погрешности приближения выполнялось неравенство

$$\delta^2 \geq \int_0^1 [\Phi(x)]^2 dx - \sum a_m^{*2},$$

где a_m^* — коэффициенты при оставшихся функциях Уолша.

Благодаря этому количество коэффициентов в разложении часто удается сократить. Члены, которыми можно пренебречь, в разложении (6) подчеркнуты.

Определим окончательное значение среднеквадратической погрешности приближения после отбрасывания коэффициентов:

$$a_0 = 0,33323; a_0^2 = 0,111045; \sum a_m^{*2} = 0,0888915;$$

$$\delta = \sqrt{0,2 - 0,1999365} \approx 0,01.$$

Принципиальная схема квадратичного цифро-аналогового преобразователя, построенного с помощью разложения по Уолшу, показана на рис. 5. Дешифратор, формирующий функции Уолша, строится непосред-

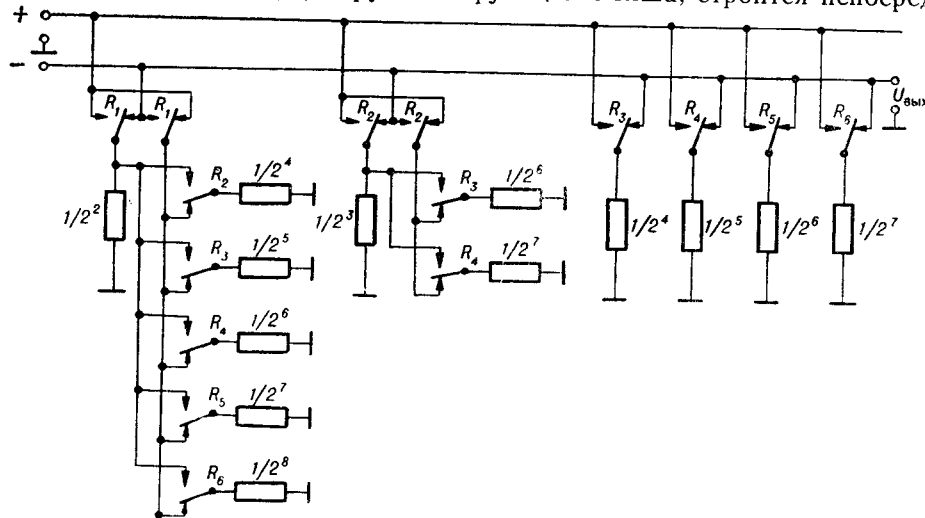


Рис. 5.

ственно на измерительных ключах, выполненных в виде перекидных контактных групп.

Случай 3.

$$y = \sqrt{x}. \quad (7)$$

Разложение зависимости (7) со среднеквадратической погрешностью 0,01 имеет вид

$$\sqrt{x} \approx 0,01 (66,67 - 19,52 W_1 - 10,53 W_2 - 3,27 W_3 - \\ - 5,55 W_4 - 1,9 W_5 - 1,31 W_6 - 1,0 W_7 - 2,88 W_8 - \\ - 1,05 W_9 - 0,75 W_{10} - 0,59 W_{11} - 0,5 W_{12} - 0,42 W_{13}).$$

Случай 4.

$$y = \sin x (0 \leq x < \pi/2).$$

Для функции (8) погрешность $\delta \leq 0,01$ достигается с помощью 23 членов ряда Уолша. Логическая схема функционального преобразователя, моделирующего разложение функции в ряд Уолша, строится аналогично схеме, изображенной на рис. 3, причем логические элементы, соответствующие отброшенным коэффициентам, исключаются. Аналоговая часть схемы по существу ничем не отличается от делителя напряжения линейного преобразователя (см. рис. 4). Значения сопротивлений делителя, а также аналитические выражения переключательных функций приведены в табл. 2.

В заключение необходимо отметить, что применение ряда Уолша для построения функциональных цифро-аналоговых преобразователей,

Таблица 2

m	W_m	$r_{m'}$ КОМ	m	W_m	$r_{m'}$ КОМ	m	W_m	$r_{m'}$ КОМ	m	W_m	$r_{m'}$ КОМ
0	R_0	12,6	6	$R_2 R_3$	636,0	12	$R_3 R_4$	2580,0	20	$R_3 R_5$	5000,0
1	R_1	30,1	7	$R_1 R_2 R_3$	1570,0	13	$R_1 R_3 R_4$	6170,0	32	R_6	1010,0
2	R_2	62,9	8	R_4	254,0	16	R_5	510,0	33	$R_1 R_6$	2430,0
3	$R_1 R_2$	150,7	9	$R_1 R_4$	610,0	17	$R_1 R_5$	1212,0	34	$R_2 R_6$	5000,0
4	R_3	126,6	10	$R_2 R_4$	1270,0	18	$R_2 R_5$	2580,0	64	R_7	2050,0
5	$R_1 R_3$	303,0	11	$R_1 R_2 R_4$	3080,0	19	$R_1 R_2 R_5$	6170,0	65	$R_1 R_7$	5000,0

обеспечивающих приближенное воспроизведение функций с заданной погрешностью δ , позволяет сократить количество элементов как цифровой, так и аналоговой частей преобразователя по сравнению со схемой кусочно-ступенчатого аппроксиматора. Однако схемы преобразователей, моделирующих ряд Уолша для монотонных функций, по сравнению со схемами кусочно-линейных аппроксиматоров оказываются одинаковыми по сложности или даже более сложными. Для функций с одной или несколькими точками экстремумов схемы на основе разложения Уолша проще, чем схемы кусочно-линейных аппроксиматоров.

Несомненным достоинством преобразователей, построенных с использованием разложений по функциям Уолша, является простота аналоговой части схемы. Структура аналоговой части ничем не отличается от соответствующих структур линейных преобразователей. Последнее весьма существенно при реализации схемы на переключателях с неидеальными ключевыми характеристиками. Так, например, в рассматриваемых схемах исключается влияние обратных токов полупроводниковых триодов, так как они замыкаются через малое выходное сопротивление источника опорного напряжения и т. п.

Другим достоинством такого рода преобразователей по сравнению с описанными цифро-аналоговыми функциональными преобразователями является постоянство выходного сопротивления аналоговой части схемы, что позволяет использовать их для работы с произвольной нагрузкой без нарушения характера воспроизводимой зависимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. См о л о в. Вычислительные преобразователи с цифровыми управляемыми сопротивлениями. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
2. Б. Т. По л я к, Ю. А. Ш р е й д е р. Применение полиномов Уолша в приближенных вычислениях.— В сб. «Вопросы теории математических машин», 2. М., Физматгиз, 1962.
3. С. К а ч м а ж, Г. Ш т е й н г а у з. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1962.

*Поступила в редакцию
27 ноября 1965 г.*
