точки лампы $Л_2$ и $Л_3$ располагались на линейных частях их анодно-сеточных характеристик. Применение усилителя позволило также использовать стандартные импульсные трансформаторы, не ухудшая существенно точности работы устройства.

Для того чтобы изменение постоянной составляющей входных напряжений не влияло на работу компаратора, на катоде левого триода $Л_2$ поддерживается напряжение, превышающее уровень сравнения (вход Б) на 1,5—2 *в*, что осуществляется с помощью правого триода $Л_2$.

Ошибка схемы обусловлена главным образом зависимостью момента сравнения от изменения напряжения накала $u_н$ диода $Л_1$. Увеличение $u_н$ от 5,7 до 6,5 *в* эквивалентно изменению уровня сравнения на 0,3 *в*. Амплитуда импульса на выходе В схемы равна 40 *в*, длительность — менее 1 *мксек*.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Iacob. Aufbau und Wirkundsweise eines Schwingungsviskosimeters.— Plast. und Kautchuk, 1957, № 4, S. 124.
2. Л. А. Меерович, Л. Г. Зеличенко. Импульсная техника. М., изд-во «Советское радио», 1954.

Поступило в редакцию
19 июля 1965 г.

УДК 621.317.725

О. М. МАНТУШ
(Новосибирск)

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ЦИФРОВЫХ ПРИБОРАХ

При измерении малых напряжений постоянного тока цифровыми приборами большое влияние на результаты измерений оказывают различные помехи. Для снижения ошибок, вызванных помехами, можно проводить усреднение результатов. Однако, как показывает опыт, закон распределения помех, которые накладываются на сигнал при измерении, обычно отличается от нормального. В общем случае это может быть какое-то несимметричное распределение с математическим ожиданием, не равным нулю. Использование в таких случаях обычного усреднения для оценки величины сигнала приводит к некоторой ошибке.

Поэтому нам представлялось весьма интересным проанализировать возможность проведения обработки результатов измерений мгновенных значений выходного сигнала непосредственно в цифровом приборе при действии случайной аддитивной помехи, закон распределения которой может быть произвольным и является заданным. Рассматривалась обработка по методу максимального правдоподобия, который может приводить к несмещенным и совместно-эффективным оценкам [1].

В ряде работ показано, что если измеряемая величина не меняется во времени и, кроме того, все ее значения равновероятны и независимы, то при нормальном законе распределения помех обработка сигналов сводится к усреднению всех отсчетов за время T:

$$x = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt,$$

где x — оценка истинного значения сигнала;

$y(t)$ — смесь сигнала и помехи $y=x+\xi$.

Для использования метода максимального правдоподобия в случае произвольного закона распределения помехи $P(\xi)$ необходимо найти аналитическое выражение этого закона. Имея это выражение, можно найти аналитическое выражение для функции правдоподобия $L(x)$, которое при постоянном x совпадает по виду с распределением шума, но смещено на x, и определить апостериорную вероятность x по известной формуле [2, 3]:

$$P_n(x) = kp_0(x) \prod_{i=1}^{n} L_i(x),$$

где k — коэффициент нормировки;
$p_0(x)$ — априорная вероятность x;
$L(x)$ — функция правдоподобия.

Обычно дифференциальный закон распределения задается в виде графика или таблицы. Одним из требований, которые предъявляются к закону распределения, является выполнение условия нормирования на каком-то конечном участке оси.

Аналитическое выражение для закона распределения может быть получено путем аппроксимации. Для простоты математических операций будем аппроксимировать не самую функцию $P(\xi)$, а ее логарифм степенным полиномом n-го порядка

$$f(\xi) = C_0 + C_1\xi + C_2\xi^2 + \ldots + C_n\xi^n,$$

коэффициенты которого можно определить с помощью метода наименьших квадратов [4]. Тогда аналитическое выражение для распределения помехи будет иметь вид

$$P(\xi) = e^{f(\xi)},$$

а функция правдоподобия будет равна

$$L(x) = \prod_{i=1}^{n} e^{f(y_i - x)}.$$

Для апостериорной вероятности x справедливо выражение

$$P_n(x) = kp_0(x) \prod_{i=1}^{n} e^{f(y_i - x)},$$

или

$$P_n(x) = kp_0(x) \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} f(y_i - x)\right\}.$$

Пусть $f_1(\xi)$ — квадратичная парабола: $f_1(\xi) = a\xi^2 + b\xi + c$. Необходимым условием такого приближения является $a<0$. Тогда апостериорная вероятность x выражается в виде

$$P_n(x) = kp_0(x) \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} [a(y_i - x)^2 + b(y_i - x) + c]\right\}.$$

Найдем наиболее вероятное значение x, т. е. значение, которое обращает в максимум функцию $P_n(x)$:

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = 0; \qquad x = \bar{y} + \frac{b}{2a}, \tag{1}$$

где $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} y_i$ — среднее значение измеряемого сигнала;

$\frac{b}{2a}$ — некоторая константа для данного закона распределения помехи, величина и знак которой определяются коэффициентами интерполирующей функции.

Ее можно рассматривать как математическое ожидание помехи $m(\xi)$. При получении оценки x эту постоянную можно заранее ввести в устройство обработки, а затем вычесть из усредненного значения сигнала.

Рассмотрим приближение закона распределения помехи полиномом 3-го порядка, ограниченным на некотором участке ab так, чтобы выполнялось условие

$$\int_a^b P(\xi)\, d\xi = 1.$$

Интерполирующий полином $f_2(\xi)$ равен $f_2(\xi) = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d$. Тогда

$$P_n(x) = kp_0(x) \exp\left\{ \sum_1^n \left[a(y_i - x)^3 + b(y_i - x)^2 + c(y_i - x) + d\right] \right\}.$$

Значение x, соответствующее максимуму этой функции, определяется выражением

$$x = \bar{y} + \frac{b}{3a} - \sqrt{\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a} - \frac{1}{n} \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2}\ . \qquad (2)$$

Величина $\frac{1}{n} \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2$ приближается к 0 при достаточно больших n, поэтому ею можно пренебречь. Следовательно, варажение (2) примет вид

$$x = \bar{y} + \frac{b}{3a} - \sqrt{\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a}}\ ,$$

где величину $\frac{b}{3a} - \sqrt{\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a}}$ аналогично предыдущему случаю можно рассматривать как математическое ожидание помехи $m(\xi)$ и вводить заранее в устройство обработки.

Естественно, что с повышением порядка полинома вычислительные операции усложняются. Отметим также, что аппроксимация закона распределения помехи кривой 2-го порядка общего вида (наклонной параболой) приводит к более сложному выражению для оценки x.

Известно, что среднеквадратическое значение погрешности осредненного значения сигнала уменьшается в $\sqrt{n}$ раз, где n — число измерений, и может быть весьма малой величиной. Однако при такой обработке в случае произвольного закона распределения помехи оценка x оказывается смещенной на $m(\xi)$, т. е. включает в себя некоторую систематическую составляющую погрешности, устранение которой может быть произведено представленным в данной работе способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Л. Ван-Дер-Варден. Математическая статистика. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Ф. М. Вудворд. Теория вероятностей и теория информации с применением в радиолокации. М., изд-во «Советское радио», 1955.
3. А. А. Фельдбаум и др. Теоретические основы связи и управления. М., Физматгиз, 1963.
4. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.

Поступило в редакцию
14 сентября 1965 г.,
окончательный вариант —
3 декабря 1965 г.