А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 2 1966

КОДИРОВАНИЕ В ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

УДК 621.317.7

В. В. ЕФИМЕНКО, Б. В. КАРПЮК, А. В. САМОШИН
(Новосибирск)

О КОЛИЧЕСТВЕ ДВОИЧНО-ДЕСЯТИЧНЫХ КОДОВ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВАМИ ВЗВЕШЕННОСТИ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

В статье рассмотрен вопрос о числе двоично-десятичных кодов с целочисленными весами, удовлетворяющих требованиям взвешенности и дополнительности. Доказано, что существует всего 88 групп взвешенных двоично-десятичных кодов с целочисленными весами, среди которых 33 удовлетворяют требованию дополнительности. Приведены все эти кодовые группы. Показано также, что число всех взвешенных двоично-десятичных кодов равно 14664; из них 1320 удовлетворяют требованию дополнительности до 9 и 720 — требованию дополнительности до 10.

В цифровых измерительных системах (ЦИС), как известно, широко используется двоично-десятичное кодирование, которое осуществляется путем сопоставления десятичных цифр и некоторых наборов двоичных цифр. Так как минимальное количество двоичных цифр, с помощью которых можно получить десять различных двоичных чисел, равно четырем, то для представления каждой десятичной цифры требуется не менее чем четыре двоичных цифры. Из четырех двоичных цифр можно получить 16 четырехразрядных двоичных чисел (тетрад), поэтому, комбинируя различные способы сопоставления десятичных цифр и тетрад, мы получим число двоично-десятичных кодов, равное $\frac{16!}{6!} \approx 2{,}9 \cdot 10^{10}$ [1]. Однако не все эти коды могут использоваться, так как многие из них не удовлетворяют ряду требований, предъявляемых к кодам. В дальнейшем под двоично-десятичным кодом будем понимать систему однозначных соответствий между десятичными цифрами и двоичными тетрадами. В ряде работ сформулированы требования, которым должны удовлетворять двоично-десятичные коды, применяемые в вычислительных машинах [1—4], а также определено число кодов, удовлетворяющих различным требованиям [3, 4].

В настоящей работе определяется количество двоично-десятичных кодов, которые удовлетворяют основным требованиям, предъявляемым к кодированию в ЦИС. Будем предполагать, что в рассматриваемых ЦИС измерительные операции выполняются с помощью цифраторов уравновешивания [5], а результаты измерений могут подвергаться последующей математической обработке.

Для того, чтобы в каждой декаде цифратора уравновешивания можно было получить десять различных уровней известной величины, соответствующих десяти цифрам, необходимо каждому двоичному разряду приписать определенный постоянный «вес» так, чтобы выполнялось равенство

$$x = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 + \gamma_4 a_4, \tag{1}$$

где x может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — двоичные переменные;

a_1, a_2, a_3, a_4 — постоянные целочисленные весовые коэффициенты.

Двоично-десятичные коды, у которых для всех двоичных разрядов тетрады существуют рациональные* числа a_i, удовлетворяющие равенству (1) для всех значений x, называются взвешенными кодами.

Взвешенность двоично-десятичных кодов является, очевидно, необходимым условием применения их в ЦИС, поэтому мы в первую очередь определим количество кодов, удовлетворяющих этому требованию.

Количество взвешенных двоично-десятичных кодов с целочисленными весами определяется на основании теоремы, доказательство которой базируется на следующих леммах.

Лемма 1. Во взвешенном двоично-десятичном коде ни один из весов a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ не равен нулю.

В самом деле, если один из весовых коэффициентов a_i равен нулю, то из (1) видно, что x будет зависеть только от трех двоичных переменных, с помощью которых можно реализовать лишь 8 различных значений x, вместо необходимых десяти, и, следовательно, $a_i \neq 0$.

Лемма 2. Среди весовых коэффициентов по крайней мере два должны быть положительными.

В самом деле, если только один весовой коэффициент положительный, то остальные три отрицательные и при $2^3 - 1$ наборах двоичных переменных γ_i будут получаться отрицательные значения x. При этом положительных значений x будет всего лишь девять $(2^4 - 2^3 + 1)$ вместо необходимых десяти. Отсюда следует, что число положительных коэффициентов не может быть меньше двух.

Лемма 3. Если два весовых коэффициента отрицательные, то положительные коэффициенты не могут быть одинаковыми.

В самом деле, если оба положительных коэффициента одинаковы, то при всех 16 наборах двоичных переменных γ_i можно получить лишь девять различных положительных значений x (в этом легко убедиться путем перебора) вместо необходимых десяти. Следовательно, положительные коэффициенты не могут быть равны между собой.

Лемма 4. Если отрицательные весовые коэффициенты равны между собой, то их абсолютные величины (модули) равны единице.

Доказательство. Используя (1), выпишем значения x для всех наборов двоичных переменных γ_i в виде следующих равенств:

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 0; & x_9 = a_2 + a_3; \\
x_2 = a_1; & x_{10} = a_2 + a_4; \\
x_3 = a_2; & x_{11} = a_3 + a_4; \\
x_4 = a_3; & x_{12} = a_1 + a_2 + a_3; \\
x_5 = a_4; & x_{13} = a_1 + a_2 + a_4; \\
x_6 = a_1 + a_2; & x_{14} = a_1 + a_3 + a_4; \\
x_7 = a_1 + a_3; & x_{15} = a_2 + a_3 + a_4; \\
x_8 = a_1 + a_4; & x_{16} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.
\end{array} \tag{2}$$

---

* В настоящей работе рассматриваются только целые положительные и отрицательные значения a_i.

Пусть $a_1>0$, $a_2>0$ и $a_3=a_4=-a$. Подставляя эти значения a_3 и a_4 в систему равенств (2) и полагая, что $a_1>a_2(a_1\neq a_2$ в силу леммы 3), можно записать очевидные равенства:

$$x_6=a_1+a_2=9; \tag{3}$$

$$x_{15}=a_2-2a=1, \tag{4}$$

а также неравенство

$$x_{14}=a_1-2a\geqslant 2, \tag{5}$$

откуда получаем: $a\leqslant\frac{a_1+a_2-3}{4}$, или $a\leqslant 1{,}5$. Так как мы рассматриваем коды только с целочисленными весами, то $a=1$, т. е. $|a_3|=|a_4|=1$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Существует только один набор весов с двумя равными отрицательными весами, а именно: 6, 3, —1, —1.

В самом деле, из (4) получаем $a_2=3$, а из (3) — $a_1=6$.

Лемма 5. Если два весовых коэффициента отрицательные, то по модулю ни один из них не равен ни одному из положительных коэффициентов.

В самом деле, полагая, например, что $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3<0$, $a_4<0$, $|a_3|=a_2$, и подставляя эти значения в систему (2), убеждаемся, что можно получить только девять различных значений x вместо необходимых десяти. Следовательно, такое предположение неверно и лемма доказана.

Лемма 6*. Во взвешенных двоично-десятичных кодах минимальное количество различных по модулю весовых коэффициентов равно трем.

Лемма 7. Если два весовых коэффициента по модулю равны между собой, то их модули не превосходят 4.

Лемма 8. Не существует взвешенных двоично-десятичных кодов, в которых модуль хотя бы одного из весовых коэффициентов был равен 9.

Лемма 9. В кодах с одним отрицательным весом модуль отрицательного веса не превосходит 7.

Лемма 10. Сумма модулей отрицательных весовых коэффициентов в кодах с двумя отрицательными весами не меньше 2 и не больше 6.

Лемма 11. Во взвешенных двоично-десятичных кодах сумма положительных весовых коэффициентов не меньше 9.

Лемма 12. Максимальное значение суммы положительных весовых коэффициентов в кодах со всеми положительными и в кодах с двумя положительными и двумя отрицательными весами не превосходит 15.

Следствие 2. В кодах с одним отрицательным весом сумма положительных весовых коэффициентов не превышает 16.

Теорема 1. Во взвешенных двоично-десятичных кодах существует только 17 различных наборов со всеми положительными весовыми коэффициентами, 54 набора с одним отрицательным и 17 наборов с двумя отрицательными весовыми коэффициентами.

Доказательство проводится путем перебора возможных наборов весовых коэффициентов, удовлетворяющих равенству (1), причем количество возможных наборов существенно ограничивается приведенными выше леммами и следствиями.

Доказывать существование 17 различных наборов со всеми положительными весами мы не будем, так как все эти наборы были найде-

* Доказательства лемм 6—12 аналогичны доказательствам лемм 4 и 5, т. е. проводятся методом от противного с использованием системы равенств (2), а также доказанных ранее утверждений. Так как эти доказательства не вызывают никаких принципиальных затруднений и достаточно очевидны, мы их в настоящей статье не приводим.

ны ранее в работе [3] (табл. 1). Докажем, что существует только 54 различных набора с одним отрицательным весовым коэффициентом.

Таблица 1

№ п.п.	Наборы весовых коэффициентов	m	n	N
1	3321	12	36	432
2	4421	12	16	192
3	4321	24	32	768
4	4311	12	36	432
5	4221	12	64	768
6	5421	24	8	192
7	5321	24	16	384
8	5311	12	32	384
9	5221	12	32	384
10	5211	12	64	768
11	6421	24	4	96
12	6321	24	8	192
13	6311	12	8	96
14	6221	12	16	192
15	7421	24	2	48
16	7321	24	2	48
17	8421	24	1	24

Всего 5400 кодов

Отрицательный весовой коэффициент может принимать значения от —1 до —7 (лемма 9), а сумма положительных весовых коэффициентов может принимать значения от 9 до 16 (лемма 11 и следствие 2). Если теперь выписать все наборы из трех положительных коэффициентов, которые не противоречат леммам 6—8 и в сумме дают 9, 10 и т. д. до 16, а затем взять сочетания всех этих наборов со всеми отрицательными весами (при этом сочетания, которые противоречат хотя бы одной лемме или следствию, необходимо исключить) и исключить из полученных таким образом тетрад те, весовые коэффициенты которых не удовлетворят равенству (1) (т. е. не позволяют получить числа 0, 1, . . . , 9), то мы получим все возможные наборы с одним отрицательным коэффициентом. Эти наборы приведены

Таблица 2

№ п.п.	Наборы весовых коэффициентов	m	n	N	№ п.п.	Наборы весовых коэффициентов	m	n	N
1	443—2	12	16	192	28	631—2	24	8	192
2	442—1	12	16	192	29	631—1	24	16	384
3	441—2	12	16	192	30	622—1	12	16	192
4	432—1	24	32	768	31	621—4	24	4	96
5	543—6*	24	2	48	32	621—3	24	8	192
6	543—3*	24	16	384	33	621—2	24	16	384
7	543—2	24	8	192	34	763—5*	24	1	24
8	542—3	24	8	192	35	753—6	24	1	24
9	542—1	24	8	192	36	751—4	24	4	96
10	541—2	24	8	192	37	751—3	24	2	48
11	532—1	24	16	384	38	742—1	24	2	48
12	531—2	24	16	384	39	741—2*	24	2	48
13	531—1	24	32	768	40	732—1	24	4	96
14	522—1	12	32	384	41	731—2	24	4	96
15	654—3*	24	2	48	42	721—4	24	2	48
16	653—7*	24	1	24	43	721—3	24	4	96
17	653—4	24	2	48	44	861—4	24	1	24
18	652—4	24	4	96	45	852—4*	24	1	24
19	651—3*	24	4	96	46	843—6*	24	1	24
20	643—5	24	2	48	47	843—2	24	1	24
21	643—2	24	4	96	48	842—5*	24	1	24
22	642—3	24	4	96	49	842—3	24	1	24
23	642—1	24	4	96	50	842—1	24	1	24
24	641—2	24	4	96	51	841—6*	24	1	24
25	632—4	24	4	96	52	841—2	24	1	24
26	632—2	24	16	384	53	832—4	24	1	24
27	632—1	24	8	192	54	821—4	24	1	24

Всего 8208 кодов

Примечание. В табл. 2 и 3 значком* отмечены те наборы весовых коэффициентов, которые найдены в ходе доказательства теоремы 1 и, насколько известно авторам, приводятся впервые.

в табл. 2, из которой видно, что число таких наборов равно 54.

Подобным методом ограниченного перебора доказывается также существование 17 различных наборов с двумя отрицательными весами. Эти наборы приведены в табл. 3.

Так как двоично-десятичная система кодирования является позиционной, то, меняя расположение весовых коэффициентов, из каждого набора этих коэффициентов можно получить упорядоченные наборы (т. е. отличающиеся порядком следования коэффициентов), число которых определяется по формуле

$$m = \frac{4!}{k!}, \qquad (6)$$

где k — количество одинаковых весовых коэффициентов в наборе.

Таблица 3

№ п.п.	Наборы весовых коэффициентов	m	n	N
1	54—2—1	24	8	192
2	64—2—1	24	4	96
3	63—2—1	24	8	192
4	63—1—1	12	8	96
5	75—3—1*	24	2	48
6	74—2—1	24	2	48
7	73—2—1*	24	4	96
8	72—4—1	24	2	48
9	72—3—1	24	2	48
10	87—4—2	24	1	24
11	86—4—1*	24	1	24
12	85—4—2*	24	1	24
13	84—3—2	24	1	24
14	84—2—1	24	1	24
15	83—4—2*	24	1	24
16	82—4—1*	24	1	24
17	81—4—2*	24	1	24

Всего 1056 кодов

Кроме того, каждый набор весовых коэффициентов позволяет построить некоторое число n двоично-десятичных кодов, в каждом из которых используются разные системы соответствий между десятичными цифрами и двоичными тетрадами. Это число зависит от того, сколькими способами с помощью данного набора весов могут быть получены все десятичные числа 0, 1, 2, ..., 9, и определяется по формуле*

$$n = \prod_{i=0}^{9} r_i, \qquad (7)$$

где r_i — число возможных способов формирования десятичного числа i ($i=0, 1, 2, \ldots, 9$).

Таким образом, каждый набор весовых коэффициентов порождает всего

$$N = mn \qquad (8)$$

различных двоично-десятичных кодов. Например, из набора 6311 можно образовать $m = \frac{4!}{2!} = 12$ упорядоченных наборов: 6311, 6131, 6113, 3611, 3161, 3116, 1631, 1613, 1361, 1316, 1163, 1136. В то же время, используя любой из перечисленных наборов, мы можем формировать десятичные числа 1, 4, 7 двояким образом: для упорядоченного набора 6131 1 запишется как 0100 или 0001, 4 — 0110 или 0011, 7 — 1100 или 1001. Другими словами, в этом случае $r_1=r_4=r_7=2$, а $r_2=r_3=r_5=r_6=r_8=r_9=1$, т. е. $n=8$, а $N=96$.

Числа m, n и N для всех наборов весовых коэффициентов приведены в табл. 1, 2, 3. Таким образом, число всех взвешенных двоично-десятичных кодов с целочисленными весовыми коэффициентами равно 5400+8208+1056=14664.

В ряде работ [1, 2 и др.] показано, что вычислительные операции с числами, выполняемые на вычислительных машинах, значительно упро-

* В [4] неточно дается ссылка на работу [3]. В [3] подсчитывается не число двоично-десятичных кодов с положительными весами, а число «базисных систем» кодирования.

щаются, если эти числа представлены в так называемых дополнительных кодах. Кроме того, при использовании дополнительных кодов также значительно упрощаются устройства преобразования одного кода в другой. Так как мы предполагаем, что в ЦИС производятся вычислительные операции (во многих ЦИС это действительно так и есть), а также часто появляется необходимость преобразования одного кода в другой, то, естественно, возникают следующие вопросы: существуют ли среди взвешенных двоично-десятичных кодов такие, которые обладают свойством дополнительности, и если да, то какие это коды и сколько их?

Прежде чем ответить на эти вопросы, рассмотрим несколько определений.

Некоторое число q называется дополнением числа p до S, если $p+q=S$, причем для всех значений p $S=\text{const}$. На практике наиболее часто используется понятие десятичного дополнения до 9 или 10, т. е. $S=9$ или $S=10$, а $p=0,1,\ldots,9$ [1].

Двоично-десятичный код является дополнительным, если по тетрадам $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_p$, изображающим числа p в данном коде, используя определенное правило, можно однозначно определить тетрады $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_q$, изображающие в этом же коде числа q, являющиеся дополнениями соответствующих чисел p до 9 или 10.

Нетрудно убедиться, что свойство дополнительности двоично-десятичных кодов можно записать, например, в виде следующего условия:

$$p+q=S; \tag{9}$$
$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_p \oplus (\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_q = c = \text{const}$$
$$\text{для } S=9 \text{ или } S=10 \text{ и } p=0,1,\ldots,9,$$

где $\oplus$ — знак суммирования по модулю два;
c — любое четырехразрядное двоичное число, кроме нуля.

Следует отметить, что до настоящего времени были найдены взвешенные двоично-десятичные коды с положительными весовыми коэффициентами, удовлетворяющие условию (9) при $S=9$ и $c=1111$ [4].

Число взвешенных двоично-десятичных кодов с целочисленными весовыми коэффициентами, удовлетворяющих условию (9), можно определить на основании следующей теоремы.

Теорема 2. Существует только 24 набора весовых коэффициентов, которые позволяют образовывать дополнительные коды при $S=9$, и 9 наборов весовых коэффициентов, позволяющих образовывать дополнительные коды при $S=10$.

Доказательство. Рассматривая наборы весовых коэффициентов, приведенные в табл. 1, 2

Таблица 4

c	$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_q = S$	Выражение q через весовые коэффициенты
1100	1100	a_1+a_2
0110	0110	a_2+a_3
1001	1001	a_1+a_4
1010	1010	a_1+a_3
1011	1011 1110 1100	$a_1+a_3\pm a_4$ $a_1+a_2\pm a_3$ a_1+a_2
1101	1101 1110	$a_1+a_2\pm a_4$ $a_1+a_2+a_3$
1110	1110	$a_1+a_2\pm a_3$
1111	1111 1100	$a_1+a_2\pm a_3\pm a_4$ a_1+a_2

Таблица 5

№ п.п.	Наборы весовых коэффициентов	m	n	N
1	443—2	12	4	48
2	442—1	12	4	48
3	543—3	24	4	96
4	532—1	24	4	96
5	652—4	24	2	48
6	651—3	24	2	48
7	642—3	24	2	48
8	641—2	24	2	48
9	632—2	24	4	96
10	631—1	24	4	96
11	622—1	12	4	48
12	753—6	24	1	24
13	751—4	24	2	48
14	731—2	24	2	48
15	843—6	24	1	24
16	842—5	24	1	24
17	832—4	24	1	24
18	87—4—2	24	1	24
19	86—4—1	24	1	24
20	84—2—1	24	1	24
21	3321	12	6	72
22	4311	12	6	72
23	4221	12	8	96
24	5211	12	8	96

Всего 1320 кодов

Таблица 6

№ п.п.	Наборы весовых коэффициентов	m	n	N
1	543—2	24	4	96
2	542—1	24	4	96
3	653—4	24	2	48
4	632—1	24	4	96
5	751—3	24	2	48
6	741—2	24	2	48
7	4321	24	8	192
8	5311	12	4	48
9	5221	12	4	48

Всего 720 кодов

и 3, легко убедиться, что число $p=0$ может быть представлено только следующими двоичными числами*: 0000, 0101, 0011, 0111, которые выражаются через весовые коэффициенты следующим образом: первое — 0, второе — $a_2—a_4$, третье — $a_3—a_4$, четвертое — $a_2 \pm a_3—a_4$. По известным двоичным числам, представляющим p, можно однозначно определить возможные двоичные числа для представления q, дополняющего p до S ($S=9$, 10), при всех значениях c, а также найти соответствующие этим числам выражения в весовых коэффициентах. Однако не все подобные выражения не противоречат приведенным выше леммам и следствиям, т. е. не все они являются допустимыми. Например, для $p=0$, $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_p=0000$, $c=0100$ и $S=9$ получим: $q=S=9$, $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_q=0100$, т. е. $q=a_2=9$, что противоречит лемме 8. Все допустимые выражения q и соответствующие им двоичные числа и значения c приведены в табл. 4. Если теперь для каждого допустимого выражения $q=S$ ($S=9,10$), используя табл. 1—3, выписать возможные наборы весовых коэффициентов и проверить, какие из этих наборов удовлетворяют условию (9) для всех значений $p=0,1,\ldots,9$, то легко убедиться, что этому условию удовлетворяют только те наборы, которые соответствуют выражениям q, взятым из последнего столбца табл. 4, т. е. при $c=1111$. Все эти наборы для $S=9$ приведены в табл. 5, а для $S=10$ — в табл. 6. Табл. 5 содержит 24 различных набора, а табл. 6 — 9 различных наборов, что и требовалось доказать.

Так как свойством дополнительности обладают только те наборы весовых коэффициентов, которые соответствуют выражениям q при $c=1111$, то можно сформулировать следующее очевидное

Следствие 3. Не существует взвешенных двоично-десятичных кодов, которые обладают свойством дополнительности при $c \neq 1111$.

Общее число взвешенных дополнительных двоично-десятичных кодов, как видно из табл. 5 и 6, равно 2040, причем 1320 из них являются дополнительными до девяти и 720 — дополнительными до десяти.

---

* При этом предполагается, что наборы весовых коэффициентов в табл. 1—3 являются упорядоченными, т. е. весовые коэффициенты в каждом наборе записаны в порядке убывания их модулей, причем сначала записаны положительные коэффициенты, а затем — отрицательные.

ВЫВОДЫ

На основании доказанных лемм и теорем установлено, что существует всего 88 наборов весовых коэффициентов, среди которых 33 удовлетворяют требованию дополнительности. В ходе доказательства теорем найдено 18 наборов весов, ранее не встречавшихся в литературе.

Приведены все возможные наборы весовых целочисленных коэффициентов, которые обладают свойствами взвешенности и дополнительности и могут быть использованы в цифровых измерительных системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. К. Ричардс. Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
2. Рутисхаузер, Шпайзер, Штифель. Электронные цифровые вычислительные машины с программным управлением.— Вопросы ракетной техники, 1952, № 2.
3. G. White. Coded Decimal Number Sistem for Digital Computers.— Proceedings of the IRE, 1953, v. 41, № 10.
4. Д. А. Поспелов. О числе удобных для вычислительных машин двоично-десятичных кодов с положительными весами.— ИВУЗ, Приборостроение, 1962, № 1.
5. М. П. Цапенко. О классификации цифровых измерительных приборов.— Измерительная техника, 1961, № 5.

Поступила в редакцию
13 декабря 1965 г.