АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1966

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 681.142.82

В. И. ЮШИН

ние которых не представлялось возможным из-за громоздкости вычислений. Так, например, обстоит дело с практическим использованием прикладных результатов теории случайных функций**. Несмотря на одинаково полную разработанность корреляционных теорий нестационарных и стационарных случайных функций, на практике до недавнего времени применялась исключительно последняя. Такое положение объясняется сравнительной сложностью результатов теории нестационарных случайных функций и также отсутствием корреляторов для нестационарных процессов. Это заставляло исследователей всюду, где была хоть малейшая надежда на получение полезных результатов, принимать гипотезу о стационарности и применять обычные корреляторы с усреднением по времени. Однако в настоящее время широкое распространение универсальных вычислительных машин и создание специализированных устройств — корреляторов для нестационарных процессов — открывает путь к практическому использованию результатов теории нестационарных случайных функций.

В связи с этим становятся актуальными вопросы, связанные с погрешностями измерения корреляционных функций нестационарных процессов при усреднении по множеству. В настоящей работе исследуется одна из наиболее специфических погрешностей множественной корреляции, а именно влияние разброса начал отсчета реализаций и наличия стационарной аддитивной помехи на измерение статистической корреляционной функции в предположении, что коррелятор действует по алгоритму

$$R_{xy}(t,\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[x_i\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-m_x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right]\left[y_i\left(t-\frac{\tau}{2}\right)-m_y\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right], \tag{1}$$

где $R_{xy}(t,\tau)$ — корреляционная функция;
$x_i(t)$, $y_i(t)$ — i-я пара реализаций двух нестационарных процессов $X(t)$ и $Y(t)$;
$m_x(t)$ и $m_y(t)$ — соответствующие математические ожидания;
N — общее число реализаций, по которым производится усреднение;
t — текущее время;
τ — временной сдвиг между реализациями.

Предполагается, что все другие погрешности отсутствуют, а следовательно, в формуле (1) $N\to\infty$. Поэтому (1) можно заменить строгой формулой

$$R_{xy}(t,\tau)=M\left\{\left[X\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-m_x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right]\left[Y\left(t-\frac{\tau}{2}\right)-m_y\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\right\}, \tag{2}$$

где M — символ операции математического ожидания.

* Материал доложен на VII Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1965 г. в Новосибирске.

** В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.

Забегая вперед, отметим, что исследуемая в настоящей работе погрешность, именно вследствие допущения справедливости формулы (2), а не (1), не является случайной. Она имеет характер детерминированного искажения измеряемой корреляционной функции, что справедливо также при достаточно больших N в формуле (1). Установление этой детерминированной зависимости между измеряемой и измеренной корреляционными функциями позволяет производить корректирование результатов после вычислений.

При малых N полагаться на детерминированную связь между отмеченными корреляционными функциями уже нельзя, погрешность от разброса начал отсчета реализаций носит статистический характер, однако этот случай в настоящей работе не рассматривается.

Постановка задачи. Предположим, что необходимо измерить взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t, \tau)$ двух коррелированных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ в соответствии с выражением

$$R_{xy}(t, \tau) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \left[x_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - m_x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right]\left[y_i\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - m_y\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] = M\left\{\left[X\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - m_x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right]\left[Y\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - m_y\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]\right\} \tag{3}$$

где математические ожидания $m_x(t)$ и $m_y(t)$ определяются формулами:

$$m_x(t) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} x_i(t) = M[X(t)]; \tag{4}$$

$$m_y(t) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} y_i(t) = M[Y(t)]. \tag{5}$$

Однако в распоряжении наблюдателя имеются не реализации $x_i(t)$, $y_i(t)$ истинных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, а реализации

$$\xi_i(t) = x_i(t - \delta_i) + n_i(t), \tag{6}$$

$$\eta_i(t) = y_i(t - \delta_i) + p_i(t) \tag{7}$$

случайных процессов:

$$\Xi(t) = X(t - \Delta) + N(t); \tag{8}$$

$$\mathrm{H}(t) = Y(t - \Delta) + P(t), \tag{9}$$

отличающихся от истинных наличием неизвестной случайной задержки (случайным моментом начала отсчета Δ) и аддитивными помехами $N(t)$ и $P(t)$, которые предполагаются центрированными стационарными и стационарно связанными. Случайный разброс начал отсчета Δ характеризуется одномерной плотностью $f(\delta)$, которая предполагается известной. Для обеих реализаций $\xi_i(t)$ и $\eta_i(t)$ каждой пары реализаций случайная величина Δ принимает одно и то же значение δ_i, постоянное на всем интервале изменения аргумента, т. е. каждая пара реализаций претерпевает случайный сдвиг. Взаимная корреляционная функция помех $R_{np}(\tau)$ предполагается известной:

$$R_{np}(t, \tau) = M\left[N\left(t + \frac{\tau}{2}\right) P\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] = R_{np}(\tau), \tag{10}$$

а помехи не коррелированными с измеряемыми процессами X и Y.

Требуется установить зависимость между истинной корреляционной функцией $R_{xy}(t, \tau)$ и искаженной корреляционной функцией $R_{\xi\eta}(t, \tau)$, полученной непосредственно на выходе коррелятора, действующего по алгоритму (3), если на вход его поступают реализации (6) и (7).

Решение задачи. Рассмотрим подробно только случай автокорреляции, а для взаимной корреляции приведем окончательный результат.

Искаженная автокорреляционная функция $R_{\xi\xi}(t, \tau)$ в соответствии с выражением (3) имеет вид

$$R_{\xi\xi}(t, \tau) = M\left\{\left[\Xi\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - m_\xi\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right]\left[\Xi\left(t-\frac{\tau}{2}\right) - m_\xi\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\right\}, \quad (11)$$

где

$$m_\xi(t) = M[\Xi(t)] = M[X(t-\Delta)]. \quad (12)$$

Формула (12) получена с помощью применения операции математического ожидания к выражению (8) с учетом принятого предположения о центрированности помехи

$$M[N(t)] \equiv 0. \quad (13)$$

Операция математического ожидания в формуле (12) может быть разложена на две последовательных операции математического ожидания, что символически записывается как

$$M = M_\delta M_{x/\delta}, \quad (14)$$

где $M_{x/\delta}$ — операция условного математического ожидания по всем реализациям процесса X при произвольном фиксированном значении задержки $\Delta=\delta$;

M_δ — операция математического ожидания при случайном δ:

$$m_\xi(t) = M_\delta M_{x/\delta}[X(t-\Delta)] = M_\delta[m_x(t-\delta)]. \quad (15)$$

Поскольку $m_x(t-\delta)$ — детерминированная функция случайного аргумента δ, то, применяя правило нахождения моментов функций случайных аргументов *, получаем окончательное выражение для математического ожидания

$$m_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, m_x(t-\delta)\, d\delta. \quad (16)$$

Таким образом, математическое ожидание нестационарного случайного процесса, искаженного случайной задержкой, представляет собой свертку математического ожидания истинного процесса с плотностью вероятности случайной задержки.

Вернемся к формуле (11) и подставим в нее (8) и (9), вводя центрированный процесс

$$X^0(t) = X(t) - m_x(t). \quad (17)$$

Получим

$$\begin{aligned} R_{\xi\xi}(t, \tau) = M\Big\{\Big[&X^0\left(t+\frac{\tau}{2}-\Delta\right) + m_x\left(t+\frac{\tau}{2}-\Delta\right) + \\ &+ N\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - m_\xi\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\Big]\Big[X^0\left(t-\frac{\tau}{2}-\Delta\right) + \\ &+ m_x\left(t-\frac{\tau}{2}-\Delta\right) + N\left(t-\frac{\tau}{2}\right) - m_\xi\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\Big]\Big\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Производя почленное умножение, применяя, как и выше, ко всем членам, содержащим случайный аргумент Δ, операцию условного математического ожидания, учитывая некоррелированность сигналов с помехами и центрированность сигналов и помех, получим окончательно

$$\begin{aligned} R_{\xi\xi}(t, \tau) = &\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta) R_{xx}(t-\delta, \tau)\, d\delta + R_{nn}(\tau) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\left[m_x\left(t-\frac{\tau}{2}-\delta\right) - m_\xi\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] m_x\left(t+\frac{\tau}{2}-\delta\right) d\delta \end{aligned} \quad (19)$$

---

* В. С. Пугачев. Указ. соч.

Для случая взаимной корреляции аналогично находим выражение

$$R_{\xi\eta}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, R_{xy}(t-\delta, \tau)\, d\delta + R_{np}(\tau) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\left[m_y\left(t-\frac{\tau}{2}-\delta\right) - m_\eta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] m_x\left(t+\frac{\tau}{2}-\delta\right) d\delta. \qquad (20)$$

Формулы (16), (19) и (20) являются основным результатом настоящей работы. В принципе они позволяют измерить истинную корреляционную функцию, несмотря на разброс начал отсчета реализаций и наличие аддитивного шума. Для этого сначала измеряем корреляционную функцию помехи $R_{nn}(\tau)$ и математическое ожидание $m_\xi(t)$ искаженного процесса $\Xi(t)$. Затем, решая интегральное уравнение Фредгольма I рода (16), находим математическое ожидание $m_x(t)$. Далее, вводя обозначение в уравнение (19)

$$Q(t, \tau) = R_{\xi\xi}(t, \tau) - \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\left[m_x\left(t-\frac{\tau}{2}-\delta\right) -\right.$$

$$\left. - m_\xi\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] m_x\left(t+\frac{\tau}{2}-\delta\right) d\delta, \qquad (21)$$

получаем еще одно интегральное уравнение

$$Q(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, R_{xx}(t-\delta, \tau)\, d\delta, \qquad (22)$$

решение которого дает истинную корреляционную функцию $R_{xx}(t, \tau)$. При решении уравнения (22) переменная τ рассматривается как параметр.

Отметим некоторые полезные частные случаи формулы (19). Легко видеть, что, когда процесс Ξ стационарен, никаких искажений корреляционной функции от сдвига реализаций не появляется, а измеренная корреляционная функция равна сумме корреляционных функций сигнала и помех:

$$R_{\xi\xi}(t, \tau) = R_{xx}(\tau) + R_{nn}(\tau). \qquad (23)$$

Этот результат получается, если учесть, что для стационарных процессов

$$R_{xx}(t, \tau) = R_{xx}(\tau); \qquad (24)$$

$$m_x(t) = m_x = \text{const}, \qquad (25)$$

и если принять во внимание тот факт, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, d\delta = 1. \qquad (26)$$

В случае, когда разброс начал отсчета отсутствует, т. е. плотность вероятности $f(\delta)$ представляет собой дельта-функцию, выражение (19) принимает известный вид*:

$$R_{\xi\xi}(t, \tau) = R_{xx}(t, \tau) + R_{nn}(t). \qquad (27)$$

Для того, чтобы лучше оттенить физический смысл искажений корреляционной функции от разброса начал отсчета реализаций, примем, что процесс X центрирован, а помехи отсутствуют:

$$m_x(t) \equiv 0; \qquad (28)$$

$$R_{nn}(\tau) \equiv 0. \qquad (29)$$

---

* В. С. Пугачев. Указ. соч.

Формула (30) является сверткой истинной корреляционной функции и плотности вероятности случайной задержки Δ, где переменная сдвига τ фигурирует как параметр. Из нее видно, что разброс начал отсчета действует на измеряемую корреляционную функцию подобно сглаживающему фильтру. Это сглаживание тем сильнее, чем, с одной стороны, $f(\delta)$ больше отличается от дельта-функции, т. е. чем больше разброс, а с другой — чем сильнее нестационарность процессов, так как сглаживание происходит именно вдоль текущего времени корреляционной функции.

Отсюда следует один полезный вывод. Обычно, когда имеют дело с корреляционными функциями нестационарных процессов, из-за громоздкости чисто табличного или графического их представления стараются хотя бы частично отобразить их в аналитическом виде. Одно из таких полуаналитических представлений имеет вид

$$R(t, \tau) \cong D(t)\,\rho(\tau), \tag{31}$$

где $D(t)$ — текущая дисперсия, задаваемая графически;

$\rho(\tau)$ — нормированная текущая корреляционная функция, задаваемая аналитически. Иными словами, нестационарность как бы «выносят» в дисперсию, а коэффициент корреляции между равноотстоящими значениями процесса полагают постоянным, не зависящим от текущего времени. В этом случае достаточно скорректировать текущую дисперсию в соответствии с интегральным уравнением

$$D_{\xi\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\, D_{xx}(t-\delta)\, d\delta. \tag{32}$$

В остальных случаях необходимо корректировать несколько сечений корреляционной функции в соответствии с уравнением (19).

Поступило в редакцию
25 сентября 1965 г.,
***окончательный вариант* —**
13 октября 1965 г.

УДК 621.317.326+531.768

М. И. СУББОТИН
(Москва)

ОБ ИЗМЕРЕНИИ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСА УСКОРЕНИЯ

При измерении импульсных ускорений часто можно определять не всю форму действующего импульса, а лишь несколько параметров, характеризующих ее и достаточных для многих практических приложений. Измерения подобного рода особенно целесообразны, если результаты необходимо передавать по каналу связи, так как объем передаваемой информации гораздо меньше, чем при прямом измерении формы с обработкой сигнала в месте приема.

Практика показывает, что в случае более или менее гладких импульсов можно ограничиться измерением максимального значения и длительности (или времени нарастания). Обычно асимметрия импульсов не настолько велика, чтобы вводить дополнительный параметр асимметрии, усложняющий измерения. Однако импульс ускорения редко бывает гладким; обычно на него наложены собственные колебания элементов конструкции, вызванные этим импульсом (рис. 1). Немонотонный характер импульса обусловливает некоторую неопределенность и недостаточность упомянутых параметров. Например, неясно, что считать длительностью фронта — t_1 или время нарастания до a_m. Сравнительно узкий выброс, достигающий a_m, тоже мало характеризует измеряемый импульс, особенно если для экспериментатора важно выделить медленную часть про-