

Ф. Я. ГИМЕЛЬШЕИН  
(Новосибирск)

**О СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИИ  
РАСПРЕДЕЛЕННОГО КОНТРОЛЯ  
В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ**

На основе использования методов функционального анализа решается задача определения оптимальной весовой функции распределенного контроля для одномерно распределенного технологического процесса. Рассматриваются вычислительные методы для численного решения задачи и приводятся результаты расчета, выполненного на цифровой вычислительной машине.

1. При разработке систем оптимального управления технологическими процессами возникают две связанные между собой задачи: первая (назовем ее «внутренней задачей») состоит в установлении способа оптимального сбора информации о состоянии управляемого процесса, вторая (назовем ее «внешней задачей») связана с синтезом управляющего устройства, реализующего оптимальный процесс в системе.

Несмотря на очевидную взаимосвязь этих задач и взаимообусловленность их решений, в ряде случаев оказывается целесообразным рассматривать внутреннюю и внешнюю задачи независимо друг от друга. Так, например, при исследовании типовых широко распространенных технологических процессов, для управления которыми обычно используются стандартные промышленные регуляторы, требуется обеспечить наилучшее управление процессом, исходя из ограниченного класса используемых управляющих устройств. Естественно, что это может быть достигнуто лишь благодаря организации наиболее рациональной системы контроля управляемого процесса, т. е. оптимального решения внутренней задачи. Внутренняя задача возникает и при разработке измерительных информационных систем [1], включающих в себя как неотъемлемую часть систему сбора и обработки информации.

Мы будем решать внутреннюю задачу применительно к весьма распространенным в химической технологии объектам, для которых характерно непрерывное взаимодействие двух движущихся контактирующих сред. К таковым, например, относятся разнообразные тепло- и массообменные аппараты, работающие по принципу прямотока или противотока. Процессы, протекающие в такого типа объектах, описываются дифференциальными уравнениями с частными производными [2] или эквивалентными им интегральными соотношениями. Так, противоточные

одномерно распределенные процессы описываются следующими выражениями:

$$\Theta_i(t, x) = \int_0^t G_{i1}(t, \tau, x) \Theta_{1\text{вх}}(\tau) d\tau + \int_0^t G_{i2}(t, \tau, x) \Theta_{2\text{вх}}(\tau) d\tau; \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь  $\Theta_1(t, x)$  и  $\Theta_2(t, x)$  — функции, характеризующие распределение параметра\*, определяющего процесс во времени и пространстве, соответственно в первой и во второй средах;  $\Theta_{1\text{вх}}(t)$  и  $\Theta_{2\text{вх}}(t)$  — функции, определяющие граничные условия на входе обеих сред, т. е.  $\Theta_{1\text{вх}}(t) = \Theta_1(t, 0)$ ,  $\Theta_{2\text{вх}}(t) = \Theta_2(t, 1)$  (длина аппарата принята за единицу измерения);

$G_{ij}(t, \tau, x)$  ( $i, j = 1, 2$ ) — импульсные переходные функции, представляющие собой реакцию объекта на воздействие в виде  $\delta$ -функции по каждому из четырех возможных каналов воздействий.

Импульсные переходные функции могут быть получены из исходных уравнений с частными производными, которыми описывается данный объект, или в приближенном виде экспериментальным путем непосредственно на действующем объекте. Если уравнения объекта линейны и его коэффициенты постоянны, то для нахождения импульсных переходных функций может быть использовано преобразование Лапласа. При этом оригиналами соответствующих передаточных функций и будут являться импульсные переходные функции, зависящие лишь от разности аргументов  $t$  и  $\tau$ , т. е.  $G_{ij}(t, \tau, x) = G_{ij}(t - \tau, x)$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Допустим, что регулируемой является выходная величина первой среды  $\Theta_{1\text{вых}}(t)$ . Тогда регулирующей координатой окажется вторая среда. При этом управляющее воздействие может, вообще говоря, осуществляться двумя способами: либо за счет изменения только граничных условий на входе второй среды  $\Theta_{2\text{вх}}(t)$ , либо с помощью воздействия, сосредоточенного на нескольких точках или распределенного по всей длине объекта. Очевидно, что распределенное воздействие, или воздействие, поступающее в несколько промежуточных точек длины аппарата, создает большие возможности для улучшения процесса управления, чем воздействие только на входе одной среды. Однако существует большое количество технологических процессов, в которых осуществление промежуточного по длине воздействия весьма затруднено, а зачастую и просто невозможно. Поэтому особый интерес представляет случай, когда управление производится лишь за счет изменения граничных условий на входе регулирующей среды. Ниже рассматривается именно этот вариант управления технологическими объектами.

Предположим, что на вход второй среды поступает только управляющее воздействие  $v(t)$ . Тогда выражение для  $\Theta_1(t, x)$  в соответствии с (1) запишется так:

$$\Theta_1(t, x) = \int_0^t G_{11}(t, \tau, x) \Theta_{1\text{вх}}(\tau) d\tau + \int_0^t G_{12}(t, \tau, x) v(\tau) d\tau, \quad (2)$$

а для  $\Theta_{1\text{вых}}(t)$  — в виде

\* Таким параметром, в частности, может быть температура или концентрация взаимодействующих сред.

$$\Theta_{1 \text{ вых}}(t) = \int_0^t G_{11}(t, \tau) \Theta_{1 \text{ вх}}(\tau) d\tau + \int_0^t G_{12}(t, \tau) v(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где

$$G_{11}(t, \tau) = G_{11}(t, \tau, x)|_{x=1}; \quad G_{12}(t, \tau) = G_{12}(t, \tau, x)|_{x=1}.$$

В качестве оператора управления  $U$  (в частном случае такой оператор определяет передаточная функция регулятора) примем линейный вполне-непрерывный оператор [3] вида

$$U\varphi = \int_0^t u(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = v(t), \quad (4)$$

ядро которого  $u(t, \tau)$  считаем заданным и определенным в треугольнике  $0 \leq \tau \leq t \leq T$ . Будем, кроме того, полагать, что выполняется неравенство

$$\int_0^T \int_0^t |u(t, \tau)|^2 d\tau dt < \infty,$$

которое является признаком ограниченности оператора  $U$ .

Операторы вида (4) охватывают весьма широкий класс устройств, используемых в качестве регуляторов технологических процессов. Однако можно рассмотреть и более общий случай, когда  $U$  является произвольным линейным ограниченным оператором. Как будет видно из дальнейшего, это не внесет принципиальных затруднений в решение задачи.

Состояние объекта управления в каждый момент времени  $t$  будем оценивать величиной линейного функционала  $\Phi$ , определенного на множестве функций распределения  $\{\Theta_1(t, x)\}$ . Очевидно, что это множество принадлежит пространству квадратично суммируемых функций  $L^2(0,1)$ . Поэтому, расширяя область задания функционала  $\Phi$  до всего пространства  $L^2(0,1)$ , на основании теоремы об общем виде линейного функционала в этом пространстве [3] будем иметь

$$\Phi = \Phi(\Theta_1(t, x)) = \int_0^1 \Theta_1(t, x) g(x) dx, \quad (5)$$

где  $g(x) \in L^2(0,1)$  и с физической точки зрения представляет собой весовую функцию распределенного контроля.

В соответствии с этим множество функций  $\{\varphi(t)\}$ , на котором действует оператор  $U$  (другими словами, функций, поступающих на вход управляющего устройства), образуется элементами вида

$$\varphi(t) = \Phi(\Theta_1(t, x)). \quad (6)$$

Поскольку  $\{\varphi(t)\} \in L^2(0, T)$  ( $T < \infty$ ), что с учетом выражения (2) непосредственно следует из квадратичной суммируемости функции  $\Theta_1(t, x)$ , то имеем  $U : L^2 \rightarrow L^2$  и, стало быть,  $v(t) \in L^2(0, T)$ .

Допустим, что ограничения, обусловленные возможностью реализации управляемого процесса, накладываются на норму управляющей функции  $v(t)$ :

$$\|v(t)\|^2 \leq V, \quad (7)$$

где  $V$  — константа.

Множество функций  $v(t)$ , удовлетворяющих условию (7), обозначим  $\Omega$ .

Качество процесса управления будем оценивать величиной квадратичного функционала  $F$ , взятого от функции отклонения выходной координаты  $\Theta_{1 \text{ вых}}(t)$  от заданного значения  $\Theta^*$ :

$$F = F(\Theta_{1 \text{ вых}}(t)) = \int_0^T [\Theta^* - \Theta_{1 \text{ вых}}(t)]^2 dt, \quad (8)$$

где  $T$  — заданное время процесса управления.

Внутренняя задача в данном случае сводится к отысканию такой весовой функции распределенного контроля  $g(x)$  (см. (5)), которая при заданном операторе  $U$  (4) и выполнении условия (7) обеспечивает минимум функционалу качества (8).

Здесь уместно подробнее остановиться на прикладной, физической стороне поставленной задачи.

При регулировании технологических процессов чаще всего необходимо поддерживать требуемый закон изменения выходной координаты объекта. В соответствии с этим регулирование таких объектов обычно производится по отклонению выходной величины от ее заданного значения, а контроль процесса осуществляется только на выходе аппарата. Системы автоматического регулирования, построенные на этом принципе, весьма просты, но они, как правило, не обеспечивают требуемого качества процесса регулирования. Значительным усложнением регулирующего устройства можно добиться дальнейшего повышения качества процесса регулирования, однако более простые и эффективные возможности для достижения той же цели появляются при разработке наиболее рациональной системы контроля управляемого процесса.

Дело в том, что в объекте с распределенными параметрами процесс происходит на всей длине объекта, по всему пути движения взаимодействующих сред. И поэтому значение величины на выходе объекта отнюдь не однозначно определяет его состояние в целом. В связи с этим на практике для улучшения процесса управления иногда используют дополнительный сигнал от некоторой промежуточной точки по длине объекта. Однако как выбор координаты промежуточной точки контроля, так и соответствующий характер воздействия обычно основывается не на строгом анализе процесса, а лишь на интуиции проектировщика, не располагающего достаточно обоснованными рекомендациями по этому поводу.

Задача еще более усложняется, когда выясняется, что необходимо установить несколько промежуточных датчиков. В этом случае требуется решить вопрос о способе расстановки датчиков, а также определить коэффициенты усиления (весовые коэффициенты) в каждой точке контроля. Если же в самом общем случае учитывается состояние процесса во всех точках по длине аппарата, то задача сводится к определению весовой функции распределенного контроля  $g(x)$ , обеспечивающей оптимальное протекание управляемого процесса. Выше и приведена точная постановка этой задачи. Рассмотрим теперь один из возможных методов ее решения.

2. Для определения оптимальной весовой функции распределенного контроля найдем вначале функцию  $\tilde{v}(t) \in \Omega$ , минимизирующую функционал качества  $F$ . Затем из выражения (4), которое после подстановки найденного выражения  $v(t)$  станет интегральным уравнением относи-

тельно  $\varphi(t)$ , можно будет с учетом (6) и (5) найти искомую функцию  $g(x)$ .

Поставленная здесь изопериметрическая вариационная задача [4] на экстремум функционала (8) по  $v(t)$  сводится, очевидно, к минимизации функционала

$$Q(v) = F(v) + \lambda(v, v), \quad (9)$$

где  $F(v)$  — функционал качества (8);

$\lambda$  — множитель Лагранжа;

$(x, y)$  — скалярное произведение элемента  $x$  на элемент  $y$ .

Поскольку здесь  $x=y=v$ , то  $(v, v) = \|v\|^2 = \int_0^T |v(t)|^2 dt$ .

Из физических соображений ясно, что  $\lambda \geq 0$ , так как отрицательное значение  $\lambda$  приводило бы к уменьшению функционала  $Q(v)$ . Тем самым ограничение (7) расширяло бы возможности качественного улучшения управления объектом, что, безусловно, исключено в реальной физической системе. На самом деле всегда будет иметь место обратное явление, вследствие чего  $\lambda \geq 0$ .

Приведем функционал  $F(v)$  к несколько иному виду. Для этого введем обозначения:

$$z(t) = \int_0^t G_{11}(t, \tau) \Theta_{1 \text{ вх}}(\tau) d\tau,$$

$$A_{12}v = \int_0^t G_{12}(t, \tau) v(\tau) d\tau \quad (10)$$

и подставим (3) в формулу (8).

Получим

$$F(v) = (q - A_{12}v, q - A_{12}v), \quad (11)$$

где  $q = \Theta^* - z(t)$ .

Подставляя (11) в выражение (9), видим, что задача сводится к нахождению  $\min_{v \in \mathcal{Q}} Q(v)$ , где

$$Q(v) = (q - A_{12}v, q - A_{12}v) + \lambda(v, v). \quad (12)$$

Функционал  $Q(v)$  можно записать в виде  $Q(v) = \bar{Q}(v) + (q, q)$ , где

$$\bar{Q}(v) = ((A_{12}^* A_{12} + \lambda I)v, v) - 2(A_{12}^* q, v). \quad (13)$$

Здесь  $A_{12}^*$  — оператор, сопряженный оператору  $A_{12}$ ;

$I$  — единичный оператор.

Поскольку  $\min Q(v)$  и  $\min \bar{Q}(v)$  достигается на одной и той же экстремали, то будем рассматривать минимизацию функционала  $\bar{Q}(v)$  (13).

Можно показать [5], что функция  $\tilde{v}$ , минимизирующая этот функционал, является решением уравнения

$$(A_{12}^* A_{12} + \lambda I) \tilde{v} = A_{12}^* q. \quad (14)$$

Для этого обозначим

$$A_{12}^* A_{12} + \lambda I = A_\lambda \quad (15)$$

$$(Ly, y) = (Lx \|y\|, \hat{x} \|y\|) = (Lx, \hat{x}^* \|y\|) = (Lx, x) (y, y), \quad (17)$$

где  $x = \frac{y}{\|y\|}$ ;  $\|x\| = 1$ .

Применяя (17) к выражению (16), находим

$$\begin{aligned} \bar{Q}(v) = (A_\lambda x, x) (v - \tilde{v}, v - \tilde{v}) - (A_\lambda \tilde{v}, \tilde{v}) &\geq m (v - \tilde{v}, v - \tilde{v}) - \\ - (A_\lambda \tilde{v}, \tilde{v}) &\geq - (A_\lambda \tilde{v}, \tilde{v}) = \bar{Q}(\tilde{v}), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $m = \inf (A_\lambda x, x)$  — нижняя граница оператора  $A_\lambda$ , причем  $m > 0$ , поскольку оператор  $A_\lambda$ , как видно из (15), положительный.

Выражение (18) показывает, что функционал  $\bar{Q}(v)$  принимает свое наименьшее значение при  $v = \tilde{v}$ . Значит, если существует решение уравнения (14), то оно является минимизирующей функцией функционала (13). Существование и единственность решения уравнения (14) определяется существованием оператора  $A_\lambda^{-1}$ , обратного оператору  $A_\lambda$ .

Оператор  $A_\lambda^{-1}$  в общей теории линейных операторов называется резольвентой и обозначается  $R_\lambda$ . Известно [3], что для того, чтобы при данном операторе  $L$  и числе  $\lambda$  существовала резольвента  $R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$ , достаточно выполнения условия  $\lambda \in [m, M]$ , где  $m$  и  $M$  — соответственно нижняя и верхняя границы оператора  $L$ , т. е.

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Lx, x); \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Lx, x).$$

В нашем случае  $L = A_{12}^* A_{12}$  является положительным оператором и поэтому  $0 \leq m \leq M$ . Оператор  $A_\lambda^{-1}$  можно записать как  $A_\lambda^{-1} = (A_{12}^* A_{12} - (-\lambda)I)^{-1}$ , и поскольку  $(-\lambda) \in [m, M]$ , то на основании отмеченного выше заключаем, что резольвента для оператора  $A_\lambda$  существует. Поэтому при  $\lambda > 0$  существует единственная, соответствующая данному  $\lambda$  функция  $\tilde{v}$ , которая минимизирует функционал  $\bar{Q}(v)$ .

Таким образом, для нахождения минимизирующей функции  $\tilde{v}$  нужно, вообще говоря, решить уравнение (14), которое в явном виде можно представить так:

$$\int_{\tau}^T G_{12}(t, \tau) \int_0^t G_{12}(t, \nu) \tilde{v}(\nu) d\nu dt + \lambda \tilde{v}(\tau) = \int_{\tau}^T G_{12}(t, \tau) q(t) dt. \quad (19)$$

После изменения порядка интегрирования формула (19) приводится к следующему интегральному уравнению Фельдгольма второго рода с симметричным ядром:

$$\tilde{v}(\tau) + \mu \int_0^T K(\tau, \nu) \tilde{v}(\nu) d\nu = f(\tau), \quad (20)$$

где

$$K(\tau, \nu) = K_1(\tau, \nu) + K_2(\tau, \nu);$$

$$K_1(\tau, \nu) = \begin{cases} \int_0^{\tau} G_{12}(t, \tau) G_{12}(t, \nu) dt; & \nu \in [0, \tau]; \\ 0; & \nu \in [\tau, T]; \end{cases}$$

$$K_2(\tau, \nu) = \begin{cases} \int_{\nu}^{\tau} G_{12}(t, \tau) G_{12}(t, \nu) dt; & \nu \in [\tau, T]; \\ 0; & \nu \in [0, \tau]; \end{cases}$$

$$f(\tau) = \mu \int_{\tau}^T G_{12}(t, \tau) q(t) dt; \quad \mu = \frac{1}{\lambda}.$$

В уравнение (20) входит неизвестное число  $\lambda$  — множитель Лагранжа. Для получения дополнительного уравнения относительно  $\lambda$  рассмотрим вопрос о влиянии ограничения (7). Из уравнения (14) имеем

$$\tilde{v} = (A_{12}^* A_{12} + \lambda I)^{-1} A_{12}^* q = A_{\lambda}^{-1} A_{12}^* q,$$

откуда

$$\frac{d \|\tilde{v}\|^2}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} (\tilde{v}, \tilde{v}) = 2 \left( \frac{d\tilde{v}}{d\lambda}, \tilde{v} \right) = -2 (A_{\lambda}^{-1} \tilde{v}, \tilde{v}).$$

Поскольку  $A_{\lambda}$  — положительный оператор, т. е. для любого  $y \in L^2$   $(A_{\lambda} y, y) > 0$ , то и обратный ему оператор  $A_{\lambda}^{-1}$  тоже положителен. Действительно, пусть  $A_{\lambda} y = z$ . Тогда

$$(A_{\lambda}^{-1} z, z) = (A_{\lambda}^{-1} z, A_{\lambda} y) = (y, A_{\lambda} y) > 0.$$

Следовательно, производная  $\frac{d \|\tilde{v}\|^2}{d\lambda}$  всегда отрицательна. Далее, при  $\lambda \rightarrow \infty$  получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\tilde{v}\|^2 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda^{-1} (\lambda^{-1} A_{12}^* A_{12} + I)^{-1} A_{12}^* q\|^2 = 0,$$

а при  $\lambda=0$

$$\|\tilde{v}\|^2 = \|(A_{12}^* A_{12})^{-1} A_{12}^* q\|^2 = C. \quad (21)$$

Значит,  $\|\tilde{v}\|^2$  является монотонно убывающей функцией от  $\lambda$ , которая при  $\lambda=0$  принимает значение, равное  $C$  (см. (21)), а затем асимптотически стремится к нулю.

Если величина  $V$  в (7) выбрана таким образом, что  $C \leq \|\tilde{v}\|^2 \leq V$ , то, как видно из (21),  $\lambda=0$ . Это соответствует тому, что никаких ограничений на управляющую функцию не накладывается (см. (12)). Поэтому в реальном случае всегда  $V < C$ .

Покажем, что наилучшее качество процесса управления достигается при наибольшем из допустимых значений нормы управляющей функции, т. е. при

$$\|\tilde{v}\|^2 = V. \quad (22)$$

Допустим обратное. Пусть существует такая функция  $\bar{v}$ , что

$$\|\bar{v}\|^2 < \|\tilde{v}\|^2 \quad (23)$$

и при которой достигается более высокое качество управления, чем при  $v$ , т. е.

$$F(\bar{v}) < F(\tilde{v}). \quad (24)$$

Умножив неравенство (23) на  $\lambda$  и сложив его затем с неравенством (24), получим

$$Q(\bar{v}) = F(\bar{v}) + \lambda(\bar{v}, \bar{v}) < F(\tilde{v}) + \lambda(\tilde{v}, \tilde{v}) = Q(\tilde{v}).$$

Это противоречит (18), где показано, что функционал  $\bar{Q}(v)$  (а значит, и функционал  $Q(v)$ ) принимает наименьшее значение при  $v = \tilde{v}$ .

Таким образом, неизвестное число  $\lambda$  и искомая функция  $v(t)$  должны удовлетворять, помимо (20), еще и уравнению (22). Поэтому для нахождения оптимальной управляющей функции  $v(t)$  интегральное уравнение (20) надо решать совместно с конечным уравнением (22).

После того как тем или иным приближенным способом получено решение уравнения (20), нетрудно найти оптимальную функцию распределенного контроля  $g(x)$ . Здесь только надо отметить, что поскольку функционал качества (8) берется не от самой функции  $\Theta_{1 \text{ вых}}(t)$ , а от ее отклонения от заданного значения  $\Theta^*$ , то и функционал состояния  $\Phi$  нужно определять на классе функций  $[\Theta^*(x) - \Theta_1(t, x)]$ . Последние представляют собой отклонения функции распределения  $\Theta_1(t, x)$  от ее значения в конце процесса управления, когда  $t = T$ . Поэтому функционал (5) должен иметь вид

$$\Phi(\Theta_1(t, x)) = \int_0^1 [\Theta^*(x) - \Theta_1(t, x)] g(x) dx. \quad (25)$$

Подставив (25) в (6), а затем полученное выражение в формулу (4), найдем

$$v(t) = \int_0^t u(t, \tau) \int_0^1 [\Theta^*(x) - \Theta_1(t, x)] g(x) dx d\tau. \quad (26)$$

Далее, в выражении (26) заменив  $\Theta_1(t, x)$  его значением из (2), получим следующее интегральное уравнение относительно  $g(x)$ :

$$\int_0^1 H(t, x) g(x) dx = v(t), \quad (*)$$

где

$$H(t, x) = \int_0^t u(t, \tau) \left\{ \Theta^*(x) - \int_0^{\bar{v}} G_{11}(\tau, v, x) \Theta_{1 \text{ вых}}(v) dv - \int_0^{\bar{v}} G_{12}(\tau, v, x) v(v) dv \right\} d\tau.$$



В уравнении (\*) функция  $v(t)$  — решение уравнения (20), а остальные функции, входящие в ядро  $H(t, x)$ , заданы и определяют динамические свойства объекта и управляющего устройства.

3. Решение уравнения (20) может быть получено при использовании методов теории Гильберта — Шмидта [6]. При этом оно представится в виде ряда по собственным функциям оператора  $A_\lambda$ . Однако в связи с довольно сложным видом ядра уравнения (20) определение собственных функций оператора  $A_\lambda$  — весьма затруднительная процедура. С вычислительной точки зрения более удобным оказывается применение прямых методов непосредственно к минимизируемому функционалу  $\bar{Q}(v)$  (см. (13)).

Мы воспользуемся методом наискорейшего спуска [5], поскольку этот метод приводит к сравнительно несложной вычислительной процедуре, обеспечивая при этом довольно быструю сходимость процесса.

Идея метода в приложении к данной задаче состоит в следующем. Пусть задано некоторое начальное приближение  $v_0$ . Тогда можно найти такое направление, исходящее из начальной точки  $v_0$ , что производная функционала  $\bar{Q}(v)$  по этому направлению принимает наибольшее значение (направление градиента). Иными словами, можно найти такой элемент  $z = z_0$ , при котором производная  $\frac{d\bar{Q}(v_0 + \varepsilon z)}{d\varepsilon}$  при  $\varepsilon = 0$  принимает наибольшее по модулю значение. Тем самым определится направление наибольшего убывания функционала  $\bar{Q}(v)$ . Теперь можно будет найти то значение  $\varepsilon_0$ , при котором функция  $\bar{Q}(v_0 + \varepsilon z_0)$  имеет наименьшее значение. Ясно, что функционал  $\bar{Q}(v)$  убывает по направлению  $z_0$ , по крайней мере, до точки  $v_1 = v_0 + \varepsilon_0 z_0$ . Принимая затем элемент  $v_1$  за исходный, тем же путем найдем  $v_2$  и т. д., а в конечном итоге получим минимизирующую последовательность  $\{v_n\}$ . Построим эту последовательность:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(v_0 + \varepsilon z) &= (A_\lambda(v_0 + \varepsilon z), v_0 + \varepsilon z) - 2(A_{12}^* q, v_0 + \varepsilon z) = \\ &= Q(v_0) + 2\varepsilon(A_\lambda v_0 - A_{12}^* q, z) + \varepsilon^2(A_\lambda z, z); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} Q(v_0 + \varepsilon z) \Big|_{\varepsilon=0} = 2(A_\lambda v_0 - A_{12}^* q, z). \quad (28)$$

Из неравенства Буняковского — Шварца для функционала (28)

$$|(A_\lambda v_0 - A_{12}^* q, z)| \leq \|A_\lambda v_0 - A_{12}^* q\| \|z\|$$

следует, что выражение в правой части равенства (28) принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда

$$z = z_0 = A_\lambda v_0 - A_{12}^* q. \quad (29)$$

При таком выборе  $z_0$  функция  $\bar{Q}(v_0 + \varepsilon z_0)$  (см. (27)) будет достигать своего наименьшего значения, когда

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = - \frac{(z_0, z_0)}{(A_\lambda z_0, z_0)} = - \frac{\|z_0\|^2}{(A_\lambda z_0, z_0)}.$$

Следовательно,

$$v_1 = v_0 + \varepsilon_0 z_0. \quad (30)$$

На втором шаге, действуя аналогично, получим

$$v_2 = v_1 + \varepsilon_1 z_1,$$

где

$$\varepsilon_1 = - \frac{\|z_1\|^2}{(A_\lambda z_1, z_1)};$$

$$z_1 = A_\lambda v_1 - A_{12}^* q. \quad (31)$$

Подставляя в (31) вместо  $v_1$  его значение из (30), с учетом (29) найдем

$$z_1 = z_0 + \varepsilon_0 A_\lambda z_0.$$

В общем случае имеем следующее рекуррентное выражение:

$$v_n = v_{n-1} + \varepsilon_{n-1} z_{n-1}, \quad (32)$$

где

$$\varepsilon_{n-1} = \frac{\|z_{n-1}\|^2}{(A_\lambda z_{n-1}, z_{n-1})}; \quad (33)$$

$$z_{n-1} = z_{n-2} + \varepsilon_{n-2} A_\lambda z_{n-2}. \quad (34)$$

Последовательность  $\{v_n\}$ , как показано в [5], сходится в среднем к функции  $\tilde{v}$ , минимизирующей функционал  $Q(\tilde{v})$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - \tilde{v}\| = 0$ .

При этом быстрота сходимости определяется оценкой

$$\|v_n - \tilde{v}\| \leq \frac{\|z_0\|}{m} \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^n,$$

где  $M$  и  $m$  — соответственно верхняя и нижняя границы оператора  $A_\lambda$ .

Если выразить  $n$ -й элемент последовательности  $v$  через начальные  $v_0$  и  $z_0$ , то получим выражение вида

$$v_n = v_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i^{(n)} A_\lambda^{i-1} z_0, \quad (35)$$

где

$$\xi_1^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i;$$

$$\xi_2^{(n)} = \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j;$$

.....

$$\xi_\nu^{(n)} = \frac{1}{\nu!} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \dots \sum_{k=0}^{n-1}}_{\nu} \gamma_{ij\dots k} \varepsilon_i \varepsilon_j \dots \varepsilon_k;$$

.....

$$\xi_n^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i.$$

Здесь  $\gamma_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  — символ, принимающий значения:

$$\gamma_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \begin{cases} 0 & \text{при } n_i = n_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, k; \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Выражение (35) однозначно определяет ядро и правую часть уравнения (\*). Это интегральное уравнение может быть теперь решено тем или иным численным методом, наиболее удобный из которых состоит в представлении исходного уравнения в виде системы линейных алгебраических уравнений. Тем самым отыскиваются значения весовой функции распределенного контроля в отдельных точках по длине аппарата.

4. Пример. На цифровой вычислительной машине М-20 был произведен расчет оптимальной весовой функции распределенного контроля для объекта, импульсные переходные функции которого имеют вид:

$$G_{11}(t, \tau, x) = G_{11}(t - \tau, x) = \begin{cases} r_{11}(x) n_{11}(x) e^{-r_{11}(x)(t - \tau - \tau_1 x)}; & t \geq \tau_1 x; \\ 0; & t < \tau_1 x; \end{cases} \quad (36)$$

$$G_{12}(t, \tau, x) = G_{12}(t - \tau, x) = \begin{cases} r_{12}(x) m_{12}(x) e^{-r_{12}(x)[t - \tau - \tau_2(1-x)]}; & t \geq \tau_2(1-x); \\ 0; & t < \tau_2(1-x), \end{cases} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} r_{11}(x) &= \alpha_1 \alpha_2 \frac{x e^{-\alpha_1 x}}{n_{11}(x)}; \\ n_{11}(x) &= m_{11}(x) - e^{-\alpha_1 x}; \\ m_{11}(x) &= \frac{\alpha_1 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} - \alpha_2 e^{\alpha_2 - \alpha_1}}{\alpha_1 - \alpha_2 e^{\alpha_2 - \alpha_1}}; \\ r_{12}(x) &= \alpha_1 \frac{e^{\alpha_2(1-x)}}{m_{12}(x)}; \\ m_{12}(x) &= \alpha_1 \frac{1 - e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x}}{\alpha_1 - \alpha_2 e^{\alpha_2 - \alpha_1}}; \end{aligned} \quad (38)$$

$\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — комплексы параметров, характеризующие физические свойства каждой из взаимодействующих сред;

$\tau_1$  и  $\tau_2$  — время движения соответственно первой и второй сред по аппарату, причем принято  $\tau_1 + \tau_2 = 1$ .

Импульсные переходные функции (36) и (37) соответствуют приближенному экспоненциальному решению следующей системы уравнений, которой описываются рассматриваемые объекты:

$$\tau_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} + \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} = \alpha_1 (\Theta_2 - \Theta_1);$$

$$\tau_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} - \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} = \alpha_2 (\Theta_1 - \Theta_2).$$

При этом приближение строилось таким образом, чтобы у точной и приближенной переходных функций совпадали скачок, производная в начале процесса и установившееся значение [2].

Расчет производился по формулам (32)—(34), (22) и (\*). Выражения, входящие в эти формулы, в рассматриваемом случае имеют вид:

$$A_{12} \varphi = \int_0^t G_{12}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = r_{12} m_{12} e^{-r_{12}t} \int_0^t e^{r_{12}\tau} \varphi(\tau) d\tau;$$

$$A_{12}^* \varphi = \int_{\tau}^T G_{12}(t-\tau) \varphi(t) dt = r_{12} m_{12} e^{r_{12}\tau} \int_{\tau}^T e^{-r_{12}t} \varphi(t) dt;$$

$$A_{\lambda} \varphi = (A_{12}^* A_{12} + \lambda I) \varphi = \int_{\tau}^T G_{12}(t-\tau) \int_0^t G_{12}(t-\nu) \varphi(\nu) d\nu dt + \lambda \varphi(\tau) =$$

$$= (r_{12} m_{12})^2 e^{r_{12}\tau} \int_{\tau}^T e^{-2r_{12}t} \int_0^t e^{r_{12}\nu} \varphi(\nu) d\nu dt + \lambda \varphi(\tau);$$

$$q(t) = \Theta^* - \int_0^t G_{11}(t-\tau) \Theta_{1\text{вх}}(\tau) d\tau =$$

$$= \Theta^* - r_{11} n_{11} e^{-r_{11}(t-\tau_1)} \int_{\tau_1}^t e^{r_{11}\tau} \Theta_{1\text{вх}}(\tau) d\tau,$$

где  $r_{11}$ ,  $n_{11}$ ,  $m_{11}$ ,  $r_{12}$ ,  $m_{12}$  — значения соответствующих выражений в формулах (38) при  $x=1$ .

В качестве управляющего устройства  $U$  был выбран интегрирующий регулятор, ядро которого (см. (4)) записывается так:

$$u(t, \tau) = \begin{cases} 0; & t < \tau; \\ 1; & t \geq \tau. \end{cases}$$

Этот регулятор является простейшим и в то же время наиболее распространенным в системах регулирования технологических процессов.

Параметры объекта и системы регулирования были выбраны такими:  $\alpha_1=2,0$ ;  $\alpha_2=1,0$ ;  $\tau_1=\tau_2=0,5$ ;  $\Theta^*=0$ ;  $T=2,0$ . Входное возмущение  $\Theta_{1\text{вх}}$  предполагалось единичным ступенчатым. В качестве начального приближения для управляющей функции было принято  $v_0=-0,3$ , которое в установившемся режиме соответствует такому значению  $\Theta_{2\text{вх}}$ , при котором  $\Theta_{1\text{вых}}=0$ .

Составленная программа обеспечивала итерирование по формулам (32)—(34) до тех пор, пока значения функции  $v_i(t)$  на  $i$ -й итерации в любой точке заданного отрезка времени  $[0, T]$  отличалось от соответствующего значения  $v_{i+1}(t)$  на  $(i+1)$ -й итерации не более чем на 1%. Расчеты показали, что для достижения такой точности требуется сделать от 8 до 12 итераций в зависимости от значения  $V$  в выражении (7).

Параметр  $\lambda$  находился таким образом, чтобы его значение обеспечивало выполнимость условия (7) с точностью  $\pm 5\%$ . Весовая функция распределенного контроля  $g(x)$  вычислялась в 20 точках аппарата, равномерно расположенных по его длине.

Опуская подробности, связанные с методикой составления вычислительного алгоритма и программирования данной задачи, приведем окончательные результаты одного из вариантов произведенного расчета, когда  $\|\sigma\|^2 \leq 0,1$ .

Вычисленные для этого случая значения весовой функции распределенного контроля приведены в таблице.

|        |          |          |           |           |           |          |          |
|--------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| $x$    | 0,05     | 0,10     | 0,15      | 0,20      | 0,25      | 0,30     | 0,35     |
| $g(x)$ | +1,9333  | +1,2466  | -1,1106   | -0,84239  | -0,76069  | +0,54067 | +0,49405 |
| $x$    | 0,40     | 0,45     | 0,50      | 0,55      | 0,60      | 0,65     | 0,70     |
| $g(x)$ | +0,28597 | -0,23781 | -0,013282 | +0,046847 | +0,062337 | -1,4302  | +3,5318  |
| $x$    | 0,75     | 0,80     | 0,85      | 0,90      | 0,95      | 1,00     |          |
| $g(x)$ | -4,7069  | +2,1145  | +1,9296   | +5,6463   | +5,6177   | +3,7047  |          |

Вид переходного процесса на выходе объекта при распределенном контроле в соответствии с вычисленной весовой функцией представлен на рис. 1 (кривая 1). Здесь же для сравнения приводится кривая переходного процесса при регулировании по выходу (кривая 2).

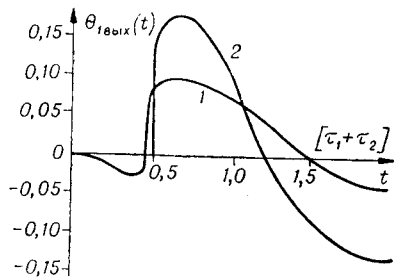


Рис. 1.

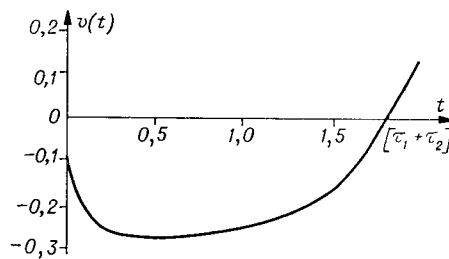


Рис. 2.

На рис. 2 показан график изменения управляющей функции  $v(t)$ .

Сопоставление обоих способов регулирования показывает, что только лишь за счет применения рациональной системы контроля управляемого процесса можно значительно повысить качество регулирования.

Результаты проведенного расчета могут быть использованы непосредственно при практическом конструировании систем контроля и управления технологическими процессами, а представленная в работе методика позволит решать эту задачу для широкого класса технологических аппаратов.

В заключение выражаю искреннюю признательность д-ру техн. наук Б. Н. Девятову за полезные советы и обсуждение данной работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Б. Карандеев. Измерительные информационные системы и автоматика.— Вестник АН СССР, 1961, № 10.
2. Б. Н. Девятов. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. Новосибирск, РИО СО АН СССР, 1964.
3. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. М., Гостехиздат, 1951.
4. М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник. Курс вариационного исчисления. Изд. 2. М., Гостехиздат, 1950.
5. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах М., Физматгиз, 1959.
6. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. М., Изд-во иностр. лит., 1954.

Поступила в редакцию  
15 сентября 1965 г.,  
окончательный вариант —  
8 октября 1965 г.