АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 1 1966

УДК 681.2.08+621.3.019.3

Л. С. ТИМОНЕН
(Новосибирск)

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММ КОНТРОЛЯ РАБОТОСПОСОБНОСТИ

Предложен метод построения оптимальных программ контроля работоспособности технических систем, основанный на применении идей динамического программирования, и дана оценка его сложности.

Автоматизация контроля работоспособности сложных технических систем имеет в настоящее время исключительно важное значение [1—3]. Применение автоматов, осуществляющих по заранее заданной программе контроль работоспособности, может не только значительно сократить время, необходимое для контроля, но и повысить качество контроля.

Работоспособность ряда технических систем характеризуется совокупностью взаимосвязанных параметров, для значений которых установлены пределы допустимых отклонений (зона допуска). Контроль работоспособности таких систем осуществляется выполнением некоторой последовательности проверок (программы контроля). Каждая проверка предполагает контроль значения одного из параметров системы и имеет два исхода: положительный, если значение контролируемого параметра находится в зоне допуска, и отрицательный, если значение контролируемого параметра находится вне зоны допуска. Система считается работоспособной, если все проверки в данной последовательности имеют положительный исход.

Выбор программы контроля (т. е. определение совокупности контролируемых параметров и установление последовательности их проверки) является одним из основных этапов проектирования контрольного автомата, ибо от программы зависят такие важные показатели, как стоимость автомата, среднее время контроля и достоверность результата контроля. Программа, для которой значения перечисленных выше показателей удовлетворяют заданным требованиям, называется оптимальной.

В настоящей работе предлагается метод построения оптимальных программ контроля работоспособности, основанный на применении идей динамического программирования [4].

Рассмотрим систему, работоспособность которой охарактеризована m взаимосвязанными параметрами. Предположим, что для любого набора ω_k, содержащего k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ различных параметров системы, заданы:

$p(\omega_k)$ — вероятность того, что значения всех параметров из ω_k находятся в соответствующих зонах допуска;

$c(\omega_k)$ — стоимость автомата, осуществляющего контроль всех параметров из ω_k ($c(\omega_k)$ зависит от стоимости оборудования, необходимого для автоматической проверки данного набора параметров);

$v(\omega_k)$ — стоимость потерь от неполного контроля параметров системы (если $k=m$, то $v(\omega_m)=0$);

$\tau(i)$ — время, необходимое для контроля i-го параметра из ω_k;

η — коэффициент пропорциональности между стоимостью простоя системы и временем контроля работоспособности.

В тех случаях, когда работоспособность системы в целом зависит от работоспособности ее элементов, значения $p(\omega_k)$ и $v(\omega_k)$ можно определить, исходя из следующих предположений.

Пусть система содержит N элементов $\{1, 2, \ldots, N\}$, отказы которых вызывают выход из зоны допуска значения, по крайней мере, одного параметра системы. Для каждого параметра i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ определено подмножество S_i $(S_i \subseteq \{1, 2, \ldots, N\})$ элементов, охваченных контролем i-го параметра, т. е. подмножество таких элементов системы, что отказ хотя бы одного из них вызывает отрицательный исход проверки данного параметра.

Пусть, далее, в набор ω_k входят параметры с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$, где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — попарно различные целые числа от 1 до m. Тогда подмножество $S(\omega_k)$, образованное из элементов, охваченных контролем всех параметров из ω_k, равно объединению подмножеств $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots S_{i_k}$, т. е.

$$S(\omega_k) = \bigcup_{j=1}^{k} S_{i_j}.$$

Обозначим $\bar{S}(\omega_k)$ подмножество, образованное из элементов, которые не охвачены контролем параметров из ω_k. Очевидно, что $S(\omega_k) \cup \bar{S}(\omega_k) = \{1, 2, \ldots, N\}$, а если $k=m$, то $S(\omega_m) = \{1, 2, \ldots, N\}$ и $\bar{S}(\omega_m) = 0$.

Допустим, что в системе возможен отказ любого одного (и только одного) элемента. Вероятность неработоспособности системы из-за отказа n-го $(1 \leqslant n \leqslant N)$ элемента равна p_n, и

$$\sum_{n=1}^{N} p_n + p_0 = 1,$$

где p_0 — вероятность того, что все элементы системы исправны, т. е. система работоспособна.

Известна стоимость v_n потерь, вызванных тем, что n-й элемент системы отказал и не охвачен контролем.

Тогда

$$p(\omega_k) = 1 - \sum_{n \in S(\omega_k)} p_n,$$

где сумма берется по всем элементам, принадлежащим $S(\omega_k)$, и

$$v(\omega_k) = \sum_{n \in \bar{S}(\omega_k)} v_n \frac{p_n}{p(\omega_k)}.$$

Если в системе возможны независимые отказы произвольного числа элементов, то

$$p(\omega_k) = \prod_{n \in S(\omega_k)} (1 - q_n)$$

и

$$v(\omega_k) = \sum_{n \in \bar{S}(\omega_k)} v_n q_n,$$

где q_n — вероятность отказа n-го элемента системы $(0 < q_n < 1)$.

Рассмотрим программу контроля работоспособности, которая предусматривает выполнение проверок всех параметров из набора $\omega_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Последовательность контроля параметров определяется нижними индексами при i.

Среднее время контроля работоспособности по программе $(i_1, \ldots, i_k)$ равно

$$t(i_1, \ldots, i_k) = \tau(i_1) + \sum_{j=2}^{k} \tau(i_j)\, p(i_1, \ldots, i_{j-1}),$$

где $p(i_1, \ldots, i_{j-1})$ — вероятность того, что значения всех параметров из набора $\omega_{j-1} = \{i_1, \ldots, i_{j-1}\}$ находятся в соответствующих зонах допуска.

Стоимость контроля работоспособности по данной программе определяется из следующего соотношения:

$$C(i_1, \ldots, i_k) = c(\omega_k) + \eta\, t(i_1, \ldots, i_k) + v(\omega_k).$$

Заметим, что в этом соотношении только величина $t(i_1, \ldots, i_k)$ зависит от того, в какой последовательности осуществляется контроль параметров из ω_k.

Найдем такую последовательность контроля параметров из ω_k, для которой величина $t(i_1, \ldots, i_k)$ достигает своего минимального значения. Это минимальное значение среднего времени контроля обозначим $t^0(\omega_k)$. Тогда минимальная стоимость контроля работоспособности по программе, предусматривающей выполнение проверок всех параметров из ω_k, равна

$$C(\omega_k) = c(\omega_k) + \eta t^0(\omega_k) + v(\omega_k). \tag{1}$$

Пусть в результате выполнения программы $(i_1, \ldots, i_k)$ установлено, что значения всех параметров из ω_k находятся в соответствующих зонах допуска. Вероятность этого события равна $p(\omega_k)$ и не зависит от последовательности контроля параметров. Будем считать, что система работоспособна только в том случае, когда все ее параметры находятся в соответствующих зонах допуска. Так как вероятность данного события равна $p(\omega_m)$, то апостериорная вероятность работоспособности системы при условии, что проверки всех параметров из ω_k не имеют отрицательных исходов, определяется из соотношения

$$q(\omega_k) = \frac{p(\omega_m)}{p(\omega_k)}.$$

Эту вероятность можно рассматривать как достоверность результата контроля работоспособности по данной программе.

Если за критерий оптимальности программы принять минимальную стоимость контроля работоспособности, то задачу построения оптимальной программы можно сформулировать так: среди всех возможных наборов параметров системы найти такой набор ω_k^* и такую последовательность контроля параметров из $\overset{*}{\omega}_k$, которые минимизируют значение $C(\overset{*}{\omega}_k)$.

Предлагаемый метод решения данной задачи состоит в следующем. Рассмотрим все возможные наборы параметров системы. Число таких наборов равно 2^m-1. Пусть ω_k — произвольный набор, содержащий $k (2 \leqslant k \leqslant m)$ параметров. Обозначим $\omega_k \setminus i$ набор, полученный из ω_k при выбрасывании из него любого параметра i $(i \in \omega_k)$. Минимальное среднее время контроля всех параметров из $\omega_k \setminus i$ обозначим $t^0(\omega_k \setminus i)$. Нетрудно показать, что минимальное среднее время контроля $t^0(\omega_k)$ для любого набора ω_k удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям динамического программирования:

$$k = 1:\ t^0(i) = \tau(i) \text{ для любого } i\ (1 \leqslant i \leqslant m);$$

$$k \geqslant 2:\ t^0(\omega_k) = \min_{i \in \omega_k} [t^0(\omega_k \setminus i) + \tau(i)\, p(\omega_k \setminus i)], \tag{2}$$

в которых $t^0(\omega_k)$ при $k \geqslant 2$ выражается через предварительно определенные значения $t^0(\omega_k \setminus i)$. Заметим, что для определения $t^0(\omega_k)$ необходимо вычислить значения $[t^0(\omega_k \setminus i) + \tau(i)\, p(\omega_k \setminus i)]$ для всех параметров i, которые входят в ω_k, а затем из полученных чисел выбрать минимальное.

Процесс построения оптимальной программы контроля работоспособности разделяется на три этапа.

1. Для всех возможных наборов параметров вычисляются значения $t^0(\omega_k)$ и фиксируется номер i_k^* $(i_k^* \in \omega_k)$ параметра, для которого достигается минимум в соотношении (2).

2. Для всех возможных наборов параметров по формуле (1) вычисляются значения $C(\omega_k)$ и определяется набор $\overset{*}{\omega}_k$, для которого $C(\overset{*}{\omega}_k)$ достигает минимума. Все параметры из $\overset{*}{\omega}_k$ подлежат проверке при выполнении оптимальной программы контроля работоспособности.

3. Устанавливается последовательность контроля параметров из ω_k. Для этого находится номер i_k^* параметра, зафиксированный при вычислении $t^0(\overset{*}{\omega}_k)$, а затем последовательно находятся номера i_{k-1}^*, i_{k-2}^*, $\ldots, i_1$ параметров, которые зафиксированы при вычислении $t^0(\overset{*}{\omega}_k \setminus i_k^*)$, $t^0[(\overset{*}{\omega}_k \setminus i_k^*) \setminus i_{k-1}^*], \ldots, t^0(i_1^*)$. Оптимальной программе соответствует последовательность контроля $(i_1^*, \ldots, i_{k-2}^*, i_{k-1}^*, i_k^*)$, определяемая нижними индексами при i^*.

Сложность предложенного метода построения оптимальной программы контроля работоспособности можно оценить по числу $\lambda(m)$ применений формул (1) и (2):

$$\lambda(m) = \sum_{k=1}^{m} k \frac{m!}{k!\,(m-k)!} + 2^{m-1} - (1+m) = (1+m)(2^{m-1} - 1).$$

Очевидно, что данный метод намного эффективнее поиска оптимальной программы путем перебора всех возможных программ контроля работоспособности, число которых равно [5]

$$\mu(m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{(m-k)!} = \xi - 1,$$

где ξ — целое число, ближайшее к $m!e$;

e — основание натуральных логарифмов.

В случае, когда $v(\omega_k)=0$ при $q(\omega_k)=1$, число $\lambda(m)$ можно несколько уменьшить, если при построении оптимальной программы не рассматривать наборы ω_k, для которых соотношение $p(\omega_k \setminus i)=p(\omega_m)$ выполняется для всех i, принадлежащих ω_k.

Для иллюстрации метода построения оптимальной программы контроля работоспособности рассмотрим следующий пример. Пусть система содержит четыре элемента $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и неработоспособность системы вызывается отказом любого одного элемента с вероятностью $p_1=0{,}04$, $p_2=0{,}01$, $p_3=0{,}02$, $p_4=0{,}03$. Вероятность того, что система работоспособна, $p_0=0{,}9$.

Система охарактеризована четырьмя параметрами $\{1, 2, 3, 4\}$. Заданы подмножества элементов, охваченных контролем данного параметра: $S_1=\{a_1, a_4\}$, $S_2=\{a_1, a_2\}$, $S_3=\{a_2, a_3\}$, $S_4=\{a_3, a_4\}$. Стоимости потерь, вызванных тем, что данный элемент системы не охвачен контролем, соответственно равны: $v_1=2000$, $v_2=1000$, $v_3=5000$, $v_4=8000$.

Для автоматизации проверки 1-го параметра системы необходимо, чтобы контрольный автомат содержал оборудование $B_1=\{b_1, b_2\}$, для 2-го параметра — $B_2=\{b_2, b_3, b_5\}$, для 3-го параметра — $B_3=\{b_3, b_4, b_6\}$, для 4-го параметра — $B_4=\{b_1, b_4\}$. Задана стоимость оборудования: $c(b_1)=80$, $c(b_2)=20$, $c(b_3)=15$, $c(b_4)=20$, $c(b_5)=30$, $c(b_6)=10$. Время контроля параметров соответственно равно: $\tau(1)=1{,}4$; $\tau(2)=1{,}2$; $\tau(3)=1{,}5$; $\tau(4)=1{,}6$. Коэффициент пропорциональности между стоимостью простоя системы и временем контроля работоспособности равен 10.

Результаты вычисления сведены в таблицу. Оптимальная программа включает проверку параметров $\{1; 4\}$ и начинается с проверки 1-го параметра. Стоимость контрольного автомата для программы $(1; 4)$:

$$c(1;\ 4)=c(b_1)+c(b_2)+c(b_4)=120;$$

потери от неполного контроля параметров:

$$v\,(1;4)=v_2\frac{p_2}{p\,(1;\ 4)}=10{,}99;$$

минимальное среднее время контроля:

$$t^0=(1;\ 4)=\tau(1)+(p_0+p_2+p_3)\tau(4)=2{,}888;$$

достоверность результата контроля:

$$q\,(1;4)=\frac{p_0}{p\,(1;\ 4)}=0{,}989.$$

Предложенный метод можно использовать и для построения оптимальных программ контроля работоспособности при следующих ограничениях:

а) Стоимость автомата и стоимость потерь от неполного контроля параметров не учитываются. Критерием оптимальности программы является минимальное среднее время контроля. В этом случае для построения оптимальной программы необходимо в формуле (1) принять $c(\omega_k)=0$ и $v(\omega_k)=0$.

б) Стоимость потерь от неполного контроля параметров неизвестна и предполагается, что она уменьшается при увеличении достоверности результата контроля. В этом случае возможны два критерия оптимальности программы: максимальная достоверность результата контроля при

ω_k	$\eta t^0(\omega_k)$	$p(\omega_k)$	i_k^*	$c(\omega_k)$	$v(\omega_k)$	$C(\omega_k)$	$q(\omega_k)$
1	14	0,93	1	100	118,3	232,3	0,97
2	12	0,95	2	65	357,9	434,9	0,95
3	15	0,97	3	45	329,9	389,9	0,93
4	16	0,95	4	100	94,7	210,7	0,95
1; 2	25,2	0,92	2	145	108,7	278,9	0,98
1; 3	28	0,9	3	145	0	173,0	1
1; 4	28,9	0,91	4	120	11	159,9	0,99
2; 3	26,3	0,93	3	95	258,1	379,4	0,97
2; 4	27,2	0,9	4	165	0	192,2	1
3; 4	30,3	0,94	3	125	85,1	240,4	0,96
1; 2; 3	38,8	0,9	2	175	0	213,8	1
1; 2; 4	39,8	0,9	1	165	0	204,8	1
1; 3; 4	42,4	0,9	4	145	0	187,4	1
2; 3; 4	40,7	0,9	3	175	0	215,7	1

заданных ограничениях на стоимость контроля $(C(\omega_k) \leqslant C_0)$ или минимальная стоимость контроля при заданных ограничениях на достоверность результата контроля $(q(\omega_k) \geqslant q_0;\ q_0 \leqslant 1)$. При применении этих критериев необходимо на втором этапе процесса построения оптимальной программы вычислять значение достоверности результата контроля для всех возможных наборов параметров системы, а при вычислении стоимости контроля принять $v(\omega_k)=0$. Выбор оптимального набора параметров ω_k осуществляется в зависимости от принятого критерия оптимальности.

в) Иногда при выборе оптимального набора параметров $\overset{*}{\omega}_k$ не учитывается среднее время контроля, а построение оптимальной программы контроля работоспособности осуществляется в два приема. Сначала среди всех возможных наборов параметров системы находится такой набор $\overset{*}{\omega}_k$, для которого величина $C(\overset{*}{\omega}_k) = c(\overset{*}{\omega}_k) + v(\overset{*}{\omega}_k)$ достигает минимального значения, а затем на основании рекуррентных соотношений (2) находится оптимальная последовательность контроля параметров из $\overset{*}{\omega}_k$. В этом случае для сокращения перебора при определении $\overset{*}{\omega}_k$ следует применить метод последовательного анализа вариантов [6]. Этот метод также применим для определения $\overset{*}{\omega}_k$ в тех случаях, когда критерии оптимальности включают ограничения, рассмотренные в пункте «б».

Основной недостаток предложенного метода построения оптимальных программ контроля работоспособности заключается в том, что при большом числе параметров, характеризующих работоспособность системы, этот метод приводит к необходимости выполнения чрезвычайно большого объема вычислений. Поэтому в настоящее время уделяется большое внимание поиску более простых и эффективных методов построения программ, близких к оптимальным [7]. Эти методы основаны на использовании так называемых функций предпочтения и правил предпочтения [8].

Функция предпочтения F ставит в соответствие i-му $(1 \leqslant i \leqslant m)$ параметру системы некоторое число $F(i/\omega)$, которое в общем случае зависит от того, какой набор параметров ω уже включен в программу контроля работоспособности. Правило предпочтения определяет тот параметр системы, который необходимо ввести в программу и проверка которого осуществляется после выполнения проверок всех параметров из ω. В ряде случаев функцию предпочтения можно представить в виде

$$F(i / \omega) = \frac{f_1 (i / \omega)}{f_2 (i / \omega)},$$

где $f_1(i/\omega)$ — функция, характеризующая выигрыш от введения в программу контроля параметра i;
$f_2(i/\omega)$ — функция, характеризующая потери от введения в программу данного параметра.

Предпочтение отдается тому параметру системы, для которого $F(i/\omega)$ имеет наибольшее значение. Так, например, для построения программы по критерию минимального среднего времени контроля при заданных ограничениях на достоверность контроля можно использовать функцию предпочтения вида

$$F(i / \omega) = \frac{p (i / \omega)}{\tau (i)},$$

где $p(i/\omega) = p(\omega) - p(\omega, i)$ — вероятность выхода за зону допуска значения i-го параметра при условии, что все параметры из ω находятся в соответствующих зонах допуска.

Следует отметить, что программа контроля работоспособности, для построения которой применялась та или иная функция предпочтения, может по своим показателям в значительной степени отличаться от оптимальной.

Полученные в настоящей работе результаты могут быть использованы при проектировании автоматов для контроля работоспособности сложных технических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Б. Карандеев. Измерительные информационные системы и автоматика.— Вестник АН СССР, 1961, № 10.
2. В. И. Рабинович, М. А. Розов, Л. С. Тимонен. Предмет и задачи технической диагностики.— Автометрия, 1965, № 1.
3. Автоматическая проверка оборудования самолетов и ракет.— Сб. статей под ред. В. А. Боднера. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. М. Хелд, Р. М. Карп. Применение динамического программирования к задачам упорядочения.— Кибернетический сборник, вып. 9. М., изд-во «Мир», 1964.
5. Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

6. В. С. Михалевич, Н. З. Шор. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов. М., Изд-во ЛЭММ АН СССР, 1962.
7. Ю. К. Беляев, И. А. Ушаков. Математические модели для задач обнаружения и локализации неисправностей.— Кибернетику на службу коммунизму. Сб. статей, вып. II. М.—Л., изд-во «Энергия», 1964.
8. В. В. Шкурба. Теория расписаний, II. Общие подходы и методы моделирования.— Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. Семинар «Экономическая кибернетика и исследование операций». Киев, Изд-во КДНТП, 1964.

Поступила в редакцию
8 октября 1965 г.