

УДК 621.372.44

**Р. Д. БАГЛАЙ**  
(Новосибирск)

## **ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ АВТОМАТИЧЕСКОМ ИЗМЕРЕНИИ ИХ ПАРАМЕТРОВ**

Обсуждается задача автоматического определения числовых параметров, характеризующих нелинейную зависимость. Рассматривается возможность построения простых устройств для воспроизведения в виде сигнала коэффициентов разложения вольт-амперных характеристик нелинейных элементов.

Чтобы получить исчерпывающие сведения о вольт-амперной характеристике нелинейного элемента электрической цепи, приходится, как известно, осуществлять ряд измерений при различных значениях напряжений (токов). В ряде случаев полученное множество данных измерений может оказаться малопримгодным для дальнейшего использования. Так, если иметь в виду применение аналитических методов исследования и расчета цепей, необходимо располагать аналитическим выражением, достаточно хорошо приближающим нелинейную зависимость на ее «рабочем» участке. Представление вольт-амперной характеристики нелинейного элемента в аналитическом виде может оказаться полезным и при распознавании вида нелинейности — определении класса, к которому принадлежит данный нелинейный элемент. Для этой цели потребовалось бы «запоминать» всю зависимость. Аналитические выражения, если они составлены из однотипных функций, достаточно сравнить по обычно немногочисленным числовым параметрам, и, следовательно, можно применить простое запоминающее устройство. Доводом в пользу указанного представления нелинейных зависимостей является также возможность «сжатия» информации в случае необходимости передавать такого рода сведения по телеметрическим каналам связи и др. Полагая, что приведенные примеры достаточно убедительно иллюстрируют практическую целесообразность определения числовых параметров, характеризующих искомую нелинейную зависимость, обратимся к измерительной стороне вопроса.

Ясно, что аналитическое выражение, приближенно описывающее вольт-амперную характеристику, можно получить на основании множества данных ее измерений в достаточно большом числе точек. Однако такой подход к решению настоящей задачи технически представляется сложным, в частности, из-за необходимости выполнять большое число измерений. Иным путем той же цели можно достигнуть, если искомую

зависимость предварительно (до измерения) подвергнуть функциональному преобразованию с тем, чтобы определить числовые параметры приближающего ее аналитического выражения.

Важно, что надлежащим преобразованием нелинейной зависимости безотносительно к цели последующего применения результата можно существенно уменьшить число необходимых измерений. Так, нетрудно указать случаи, когда заведомо известен вид приближающей функции и неизвестны ее числовые параметры. Тогда нередко удается преобразовать нелинейную зависимость, представленную сигналом, в определенным образом соответствующую ей линейную зависимость с помощью несложных технических средств. При этом для определения числовых параметров потребуется минимальное (равное двум) число измерений.

В общем случае приближения приходится осуществлять функциональное преобразование искомой зависимости с целью воспроизведения коэффициентов ее разложения (коэффициентов аппроксимации) по некоторым, обычно ортогональным, системам функций. Эта операция сводит необходимое число измерений к числу коэффициентов разложения.

Таким образом, задача состоит в том, как воспользоваться функциональным преобразованием вольт-амперных зависимостей нелинейных элементов данного класса, чтобы уменьшить количество измерений, необходимых для определения числовых параметров, характеризующих искомую зависимость с заданной точностью, и каким образом организовать техническое устройство приемлемой сложности, позволяющее с достаточной точностью воспроизводить в виде сигнала указанные выше числовые параметры.

#### **Некоторые особенности определения числовых параметров**

Для большинства случаев указанных ранее приложений желательно иметь минимальное количество числовых параметров, характеризующих нелинейную зависимость с требуемой точностью. При этом точность измерения самих параметров должна быть возможно более высокой. Ясно, что количество параметров определяется искомой зависимостью, принятой системой аппроксимирующих функций, требуемой точностью приближения и принятым критерием оценки этой точности. Полагая, что исходная зависимость и необходимая точность ее приближения задается из иных соображений, основная задача аппроксимации распадается на две части: выбор системы приближающих функций, которые при минимальном числе членов ряда разложения позволяли бы получить требуемую точность, и выбор критерия оценки точности приближения, на основании которого устанавливается закон определения коэффициентов аппроксимации. Первую часть при сколько-нибудь общих условиях аналитически выразить сложно. Поэтому выбор системы приближающих функций обычно ведется исходя из априорных сведений об искомой (аппроксимируемой) зависимости и главным образом из соображений простоты организации технического устройства для воспроизведения и измерения коэффициентов разложения. Что касается второй части, то, несмотря на большое количество используемых в настоящее время критериев оценки точности приближения, можно принять, опираясь на обобщенный опыт в этой области, минимум интеграла квадрата ошибки:

$$\Delta = \int_0^T \left[ f(t) - \sum_{i=0}^k c_i \varphi_i(t) \right]^2 \psi(t) dt, \quad (1)$$

где  $f(t)$  — искомая зависимость, интегрируемая на интервале приближения;

$c_i$  — коэффициенты аппроксимации, выбранные так, чтобы минимизировать интеграл (1);

$\varphi_i(t)$  — аппроксимирующие функции, обычно ортогональные на том же интервале по весу  $\psi(t)$ ;

$\psi(t)$  — действительная неотрицательная функция, весовая функция (вес).

Этот критерий позволяет получить достаточно хорошую оценку точности приближения для широкого круга электротехнических задач и, когда функции  $\varphi_i(t)$  ортогональны по весу  $\psi(t)$ , удобен в использовании (аналитически легко выражаются коэффициенты  $c_i$ ). В случае применения неортогональных приближающих функций математическая сторона дела значительно усложняется.

Частое применение ортогональных функций в целях аппроксимации обусловлено, конечно, еще и тем, что в случае увеличения числа членов приближающего ряда при улучшении аппроксимации коэффициенты первых  $k+1$  членов (см. (1)) остаются неизменными. Это облегчает оценку точности приближения и определение ошибки, возникающей при измерении коэффициентов. Как видим, функции  $\psi(t)$  и  $\varphi_i(t)$  связаны между собой условием простоты вычисления коэффициентов  $c_i$ . Между тем всегда желательно иметь такую весовую функцию, которая наилучшим образом подчеркивала бы ошибку  $\Delta$  на всем интересующем нас интервале приближения. Однако выполнить это обычно не удастся из-за упомянутых аналитических трудностей. Ясно, что в случае применения системы функций  $\varphi_i(t)$ , ортогональных по весу  $\psi(t)$ , можно перейти к новой системе функций  $\varphi_i(t) \sqrt{\psi(t)}$ , ортогональных по весу, равному единице, причем ошибка  $\Delta$  одинаково подчеркивается на всем интервале приближения.

Что же касается связи  $f(t)$  и  $\varphi_i(t)$ , то она, как известно, обуславливается областью определения указанных функций и относительной качественной характеристикой возможности приближения, вытекающей из особенностей веса  $\psi(t)$ . Естественно, что исходя из столь общих предпосылок трудно выбрать оптимальную по точности приближения систему аппроксимирующих функций, не ограничив резко области приближения и тип искоемых функций. Поэтому оставим пока в стороне вопросы о выборе системы функций  $\varphi_i(t)$  и обратимся к вопросу о технической реализации устройства, позволяющего по заданной нелинейной зависимости воспроизводить коэффициенты разложения. Затем для тех функций  $\varphi_i(t)$ , коэффициенты которых технически легко воспроизводить в виде сигнала, определим необходимое число членов для обеспечения заданной точности приближения какой-либо типовой нелинейной зависимости.

Выражение для  $i$ -го коэффициента разложения в достаточно общем случае линейного преобразования можно представить соотношением

$$c_i = \int_0^{\infty} f(t) W_i(t) dt. \quad (2)$$

Здесь в случае использования функций  $\varphi_i(t)$ , ортогональных по весу  $\psi(t)$ ,  $W_i(t) = \varphi_i(t) \sqrt{\psi(t)}$  или же  $W_i(t) = \varphi_i(t) \psi(t)$ . Искомое устрой-

ство будет воспроизводить коэффициенты  $c_i$ , если свертка функции  $f(t)$ , подаваемой на вход устройства в виде сигнала, с его импульсной переходной функцией  $y_i(t)$  совпадет с соотношением (2). Это случится, если

$$y_i(t_1 - t) = \varphi_i(t) \psi(t).$$

Следовательно, передаточная функция  $y_i(p)$  искомого устройства определяется соотношением [1]

$$y_i(p) = L[\varphi_i(t_1 - \tau) \psi(t_1 - \tau)] \quad (\tau = t_1 - t), \quad (3)$$

где  $L$  — символ преобразования Лапласа.

Обращаясь к таблицам преобразований, нетрудно убедиться, что вид передаточной функции  $y_i(p)$  получается наиболее простым тогда, когда  $\varphi_i(t)$  являются полиномами Лягерра ( $\psi(t) = e^{-at}$ ). Для оценки точности приближения, которую можно получить, применяя функции вида  $L(at) \sqrt{e^{-at}}$ , воспользуемся данными графоаналитических вычислений соответствующих коэффициентов в случае аппроксимации переходной характеристики апериодического звена второго порядка [2]. Как известно, эта характеристика по виду близка к вольт-амперным характеристикам широкого класса нелинейных элементов. Результаты вычислений показали, что техническую точность приближения (порядка 4%) можно получить с помощью пяти числовых параметров. Такая же точность получена и при аппроксимации функции  $f(t) = l(t)$  с помощью полиномов Лягерра  $L(at)$ .

### Синтез устройства

Теперь более подробно рассмотрим возможность синтеза простого устройства для автоматического воспроизведения коэффициентов разложения нелинейных зависимостей по ортонормированным полиномам. Полагаем, что необходимое для этой цели воспроизведение вольт-амперной характеристики нелинейного элемента в виде вольт-временной зависимости может осуществляться с достаточной точностью методами, описанными в [3].

Коэффициенты  $c_i$  спектра Лягерра функции  $f(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , определяются выражением

$$c_i = \int_0^{\infty} f(t) L_i(at) e^{-at} dt, \quad (4)$$

где  $L_i(at) = \sqrt{a} e^{at} \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}} \left( \frac{t^i}{i!} e^{-at} \right)$  — полином Лягерра  $i$ -го порядка,

нормированный по весу  $e^{-at}$  и  
определенный для  $t > 0$ ;  
 $e^{-at}$  — весовая функция;  
 $a$  — показатель веса.

Следуя условию (3), запишем

$$y_i(p) = L\{L_i[a(t_1 - \tau)] e^{-a(t_1 - \tau)}\}.$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае передаточная функция  $y_i(p)$  будет иметь полюсы в правой полуплоскости комплексной  $p$ -плоскости

и, следовательно, соответствующее ей устройство будет работать неустойчиво [1].

Если принять  $L_i(at)e^{-at} = y(t)$ , т. е. рассматривать  $L_i(at)e^{-at}$  как импульсную переходную функцию некоторого устройства, на вход которого подается сигнал  $f(t)$ ,  $-\infty < t \leq t_1$ , то сигнал на выходе такого устройства в момент  $t_1$  определяется интегралом свертки

$$R_i(t_1) = \int_0^{\infty} f(t_1 - \tau) y_i(\tau) d\tau.$$

Сравнивая выражение для  $R_i(t_1)$  при  $t_1=0$ , т. е.

$$R_i(0) = \int_0^{\infty} f(-t) y_i(t) dt, \quad (5)$$

с выражением (4), видим, что  $R_i(0)$  представляет собой  $i$ -й коэффициент Лягерра функции  $f(-t)$ , которая является зеркальным отображением  $f(t)$ ,  $-\infty < t \leq 0$ , относительно прямой  $t=0$ . Если  $f(t)$  задается на конечном интервале  $(0, T)$ , то сигнал соответствующей функции  $f(-t)$  можно образовать после предварительной записи сигнала  $f(t)$  и воспроизведения его от конца к началу.

Необходимость предварительной записи и считывания исследуемого сигнала, прежде чем можно будет подать его на вход устройства с импульсной переходной функцией  $L_i(at)e^{-at}$ , значительно снижает эффективность практического применения таких устройств.

Отмеченную трудность можно преодолеть, если учесть, что вольт-амперную характеристику нелинейного элемента можно воспроизводить в виде вольт-временной зависимости в том же интервале  $(0, T)$  от конца к началу. Для этого достаточно, например, ток  $i=at$  (см. [3]), возбуждаемый в нелинейном элементе, заменить током  $i=\alpha(T-t)$ . Тогда в интервале  $(0, T)$  вместо вольт-амперной зависимости  $f(t)$  получим зависимость  $f(T-t)$ , которая соответствует функции  $f(t)$ , смещенной вправо на  $T$  и зеркально отображенной относительно прямой  $t=T$ . При этом интеграл свертки можно записать в виде

$$R_i(t_1) = \int_0^{t_1} f[t_1 - (T - t)] L_i(at) e^{-at} dt. \quad (6)$$

Вычисляя  $R_i(t_1)$  в момент  $t_1=T$ , получим

$$R_i(t) = \int_0^T f(t) L_i(at) e^{-at} dt, \quad (7)$$

что совпадает с выражением (4) для вычисления коэффициентов Лягерра функции  $f(t)$ .

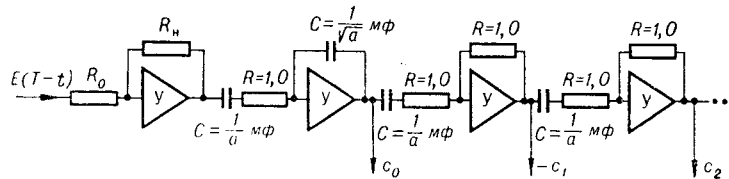
Передаточная функция искомого устройства выражается соотношением

$$y_i(p) = \sqrt{a} \int_0^{\infty} \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}} \left( \frac{t^i}{i!} e^{-at} \right) e^{-pt} dt = \sqrt{a} \frac{p^i}{(p+a)^{i+1}}. \quad (8)$$

Когда в качестве приближающих используются функции  $L_i(at)\sqrt{e^{-at}}$  или, что то же,  $L_i(2at)e^{-at}$ , то

$$y_i(p) = \sqrt{2a} \int_0^{\infty} \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}} \left( \frac{t^i}{i!} e^{-2at} \right) e^{-(p-a)t} dt = \sqrt{2a} \frac{(p-a)^i}{(p+a)^{i+1}}. \quad (8a)$$

Как видим, устройство для воспроизведения коэффициентов разложения нелинейной вольт-амперной зависимости по ортонормированным полиномам Лягерра можно создать путем последовательного соединения простых в технической реализации звеньев с передаточными функциями типа  $\frac{1}{p+a}$ ,  $\frac{p}{p+a}$ ,  $\frac{p-a}{p+a}$ . На рисунке представлен один из возможных вариантов реализации такого преобразователя. Здесь  $U$  — усилители;  $R_0$  и  $R_n$  — соответственно образцовое и исследуемое сопротивление блока воспроизведения вольт-амперной зависимости нелинейного элемента;  $E(T-t)$  — источник э. д. с.;  $C$  и  $R$  — элементы цепи преобразователя, обеспечивающего воспроизведение коэффициентов разложения в виде сигнала.



Ясно, что преобразователь может быть выполнен так же, только с помощью пассивных цепей (без применения операционных усилителей). При этом потребуются обеспечить развязку пассивных звеньев с указанными выше передаточными функциями.

Отметим, что показатель веса  $a$ , от которого зависит точность аппроксимации при заданном числе членов приближающего ряда, к сожалению, не может быть выбран безотносительно к типу вольт-амперной характеристики искомого нелинейного элемента. Величину этого параметра целесообразно определить соответственно для каждого класса нелинейных характеристик, с которым приходится иметь дело.

Далее оценим степень усложнения технического устройства при использовании иных систем ортогональных полиномов.

Поскольку вольт-амперная характеристика  $f(t)$  нелинейного элемента воспроизводится за конечное время  $T$ , в качестве приближающих можно использовать функции, ортогональные на конечном интервале. Для сравнения рассмотрим такую возможность на примере применения ортонормированных полиномов Лежандра

$$Le_i(x) = \sqrt{\frac{2i+1}{2}} \frac{1}{2^i i!} \frac{d^{(i)}}{dx^{(i)}} [(x^2-1)^i], \quad -1 < x < 1, (\psi(x) = 1).$$

Очевидно, что вначале необходимо путем соответствующей замены переменных привести функции  $Le_i(x)$  и  $f(t)$  к одному интервалу. В случае использования технических средств для воспроизведения коэффициентов разложения такого рода замену целесообразно производить в прибли-

жающих полиномах. Так, если  $x = \frac{2}{T}t - 1, 0 < t < T$ , то полиномы ортогональны на интересующем нас интервале  $(0, T)$ . При этом выражение для коэффициентов разложения

$$c_i = \int_{-1}^{+1} f(x) Le_i(x) dx$$

примет вид

$$c_i = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) Le_i\left(\frac{2}{T}t - 1\right) dt.$$

Далее, известно (см. [4]), что в случае применения полиномов  $P_i(t)$ , ортогональных по весу  $\psi(t)$  на конечном интервале  $(a, b)$ , выражение для вычисления коэффициентов разложения функции  $f(t)$ ,  $a < t < b$ , можно представить в виде

$$c_i = \lambda^{(-1)}(t)_{t=b} P_i(t)_{t=b} - \lambda^{(-2)}(t)_{t=b} P_i^{(1)}(t)_{t=b} + \dots + \\ + (-1)^i \lambda^{(-i-1)}(t)_{t=b} P_i^{(i)}(t)_{t=b},$$

где

$$\lambda(t) = f(t) \psi(t); \quad \lambda^{(-1)}(t) = \int_a^t \lambda(\tau) d\tau; \quad \lambda^{(-k)}(t) = \int_a^t \lambda^{(-k+1)}(\tau) d\tau.$$

Для рассматриваемых полиномов

$$c_i = \frac{2}{T} \left[ f(t)_{t=T}^{(-1)} Le_i\left(\frac{2}{T}t - 1\right)_{t=T} - f(t)_{t=T}^{(-2)} Le_i^{(1)}\left(\frac{2}{T}t - 1\right)_{t=T} + \dots + \right. \\ \left. + (-1)^i f(t)_{t=T}^{(-i-1)} Le_i^{(i)}\left(\frac{2}{T}t - 1\right)_{t=T} \right].$$

Здесь

$$Le_i^{(k)}\left(\frac{2}{T}t - 1\right)_{t=T} = \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} \left[ Le_i\left(\frac{2}{T}t - 1\right) \right]_{t=T} = \left(\frac{2}{T}\right)^k Le_i^{(k)}(1);$$

$Le_i^{(k)}(1)$  — производная  $k$ -го порядка от  $i$ -го полинома Лежандра, определенного на интервале  $(-1, 1)$ , вычисленная в точке  $x=1$ .

Таким образом,

$$c_i = f(t)_{t=T}^{(-1)} \left(\frac{2}{T}\right) Le_i(1) - f(t)_{t=T}^{(-2)} \left(\frac{2}{T}\right)^2 Le_i^{(1)}(1) + \dots + \\ + (-1)^i f(t)_{t=T}^{(-i-1)} \left(\frac{2}{T}\right)^{i+1} Le_i^{(i)}(1),$$

и, следовательно, для вычисления любого коэффициента разложения  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_n$  достаточно соответствующую строку треугольной матрицы, составленной из чисел  $\left(\frac{2}{T}\right)^{k+1} Le_i^{(k)}(1)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ —

номера строк, и для каждого  $ik$  пробегает ряд индексов от 0 до  $i$ ), умножить справа на матрицу-столбец, состоящую из элементов  $(-1)^i f(t) \Big|_{t=\frac{i}{T}}$ , т. е.

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{cccc} \frac{2}{T} Le_0(1) & 0 & 0 & \dots 0 \dots 0 \\ \frac{2}{T} Le_1(1) \left(\frac{2}{T}\right)^2 Le_1^{(1)}(1) & 0 & \dots 0 \dots 0 \\ \frac{2}{T} Le_2(1) \left(\frac{2}{T}\right)^2 Le_2^{(1)}(1) \left(\frac{2}{T}\right)^3 Le_2^{(2)}(1) & \dots 0 \dots 0 \\ \dots \\ \frac{2}{T} Le_i(1) \left(\frac{2}{T}\right)^2 Le_i^{(1)}(1) \left(\frac{2}{T}\right)^3 Le_i^{(2)}(1) \dots \\ \dots \left(\frac{2}{T}\right)^{i+1} Le_i^{(i)}(1) \dots 0 \\ \dots \\ \frac{2}{T} Le_n(1) \left(\frac{2}{T}\right)^2 Le_n^{(1)}(1) \left(\frac{2}{T}\right)^3 Le_n^{(2)}(1) \dots \\ \dots \left(\frac{2}{T}\right)^{i+} Le_n^{(i)}(1) \dots \left(\frac{2}{T}\right)^{n+1} Le_n^{(n)}(1) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} f(t) \Big|_{t=\frac{i}{T}} \\ -f(t) \Big|_{t=\frac{i}{T}} \\ f(t) \Big|_{t=\frac{i}{T}} \\ \dots \\ (-1)^i f(t) \Big|_{t=\frac{i}{T}} \\ \dots \\ (-1)^n f(t) \Big|_{t=\frac{i}{T}} \end{array} \right) \end{array}$$

Как видим, для реализации технического устройства, воспроизводящего коэффициенты разложения, теперь необходимо располагать интегрирующими звеньями, устройствами, в которых осуществлялось бы умножение выходного сигнала каждого интегратора на соответствующие ему числа, и наконец, цепями суммирования сигналов.

Сравнение двух рассмотренных способов воспроизведения коэффициентов разложения — дело довольно сложное. Если же иметь в виду только техническую сторону, то можно указать на следующие особенности. При использовании полиномов Лежандра в устройстве воспроизведения необходимо применять интегрирующие звенья, поэтому по простоте реализации для нескольких первых членов разложения оно будет приближаться к аналогичным устройствам, воспроизводящим спектр коэффициентов Ляггера в том случае, когда  $T$  мало, т. е. когда по соображениям точности допускается реализация оператора  $\frac{1}{p^k}$  с помощью последовательно соединенных пассивных звеньев. При этом, конечно, сохраняется необходимость в умножающих устройствах на выходе каждого интегратора и применении суммирующих цепей.

Следует особо отметить, что величины элементов треугольной матрицы, на которые умножаются выходные сигналы интеграторов, резко возрастают при увеличении номера строки, т. е. при увеличении номера вычисляемого коэффициента разложения. Так, если  $T \approx 2$ , то  $\left(\frac{2}{T}\right)^6 Le_6^{(5)}(1) > 3 \cdot 10^4$ , в то время как  $\frac{2}{T} Le_6(1) < 3$ . Практически это будет приводить к ухудшению точности определения значений этих коэффициентов.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Приспосабливающиеся автоматические системы, гл. 8. Под ред. Э. Мишкина, Л. Брауна. Перев. с англ. Под ред. Я. З. Цыпкина. М.—Л., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления. Разд. III. Под ред. В. В. Солодовникова. М., изд-во «Машиностроение», 1965.
3. Г. А. А к с е н о в, Р. Д. Б а г л а й. Воспроизведение вольт-амперной характеристики при автоматическом измерении параметров нелинейного элемента.— Автометрия, 1965, № 6.
4. Справочная математическая библиотека. Математический анализ. М., Физматгиз, 1961.

*Поступила в редакцию  
30 июля 1965 г.,  
окончательный вариант —  
7 октября 1965 г.*