АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1966

ЭЛЕКТРОИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

УДК 621.372.061+621.3.011.1

И. Н. КРОТКОВ
(Ленинград)

АНАЛИЗ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПО МЕТОДУ «ФИКТИВНЫХ НАГРУЗОК»*

Рассматриваются формулы, связывающие входное, выходное и проходное сопротивления линейного четырехполюсника с производными параметрами — сопротивлениями, получаемыми при холостом ходе и коротком замыкании нагрузок последовательно с обеих сторон четырехполюсника. Указывается связь между характеризующими измерительную цепь (четырехполюсник) сопротивлениями, удовлетворяющими условию ее равновесия относительно выбранных зажимов. Излагается методика «фиктивных нагрузок», разработанная с целью упрощения процесса нахождения сопротивлений холостого хода и короткого замыкания; применение методики иллюстрируется примером.

Во многих случаях исследование измерительных цепей, являющихся чаще всего многополюсниками, удается упростить, сводя его к анализу нескольких линейных четырехполюсников с двумя сторонами. Однако, несмотря на подобного рода упрощение, задача все же может оставаться трудноразрешимой из-за сложности вида цепей самих четырехполюсников.

Цель настоящей работы состоит в упрощении исследования таких четырехполюсников в общем виде путем введения новых производных параметров, достаточно просто определяемых и необходимых для получения искомого результата.

Входные, выходные и проходные сопротивления четырехполюсника

При заданном источнике питания входные $Z_{гг}$, выходные $Z_{нн}$ и проходные (приведенные**) $Z_{гн}$ сопротивления четырехполюсника (рис. 1) необходимы и достаточны для определения режимов (токи, напряжения) с обеих его сторон.

---

* Материал доложен на VII Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1965 г. в Новосибирске.

** См. например Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических цепей. М., Изд-во АН СССР, 1951.

Если воспользоваться обозначениями рис. 1, то для вычисления указанных сопротивлений можно применить следующие формулы:

$$[Z_{\text{гг}}] = \frac{a_{12} + a_{11} Z_{\text{н}}}{a_{22} + a_{21} Z_{\text{н}}}; \quad [Z_{\text{нн}}] = \frac{a_{12} + a_{22} Z_{\text{г}}}{a_{11} + a_{21} Z_{\text{г}}}; \tag{1}$$

$$[Z_{\text{гн}}] = a_{12} + a_{11} Z_{\text{н}} + a_{21} Z_{\text{г}} Z_{\text{н}} + a_{22} Z_{\text{г}},$$

Рис. **1.**

где a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}— обычные параметры четырехполюсников.

Эти соотношения могут быть положены в основу определения новых, производных параметров, имеющих физический смысл сопротивлений короткого замыкания и холостого хода. Действительно, полагая соответственно $Z_{\text{н}} = 0$, $Z_{\text{н}} = \infty$, а затем $Z_{\text{г}} = 0$, $Z_{\text{г}} = \infty$, легко получить

$$\begin{aligned} [Z_{\text{гг}}]_{\text{к. з}} &= [Z_{\text{гг}}]^{Z_{\text{н}} = 0} \frac{a_{12}}{a_{22}}; \quad [Z_{\text{гг}}]_{\text{х. х}} = [Z_{\text{гг}}]^{Z_{\text{г}} = \infty} = \frac{a_{11}}{a_{21}}; \\ [Z_{\text{нн}}]_{\text{к. з}} &= [Z_{\text{нн}}]^{Z_{\text{г}} = 0} = \frac{a_{12}}{a_{11}}; \quad [Z_{\text{нн}}]_{\text{х. х}} = [Z_{\text{нн}}]^{Z_{\text{г}} = \infty} = \frac{a_{22}}{a_{21}}. \end{aligned} \tag{2}$$

В дальнейшем для сокращения введем упрощенную и условную систему записи, всюду опуская Z. Тогда уравнения (2) следует переписать так:

$$\begin{aligned} [\text{гг}]^{\text{н} = 0} &= \frac{a_{12}}{a_{22}}; \quad [\text{гг}]^{\text{н} = \infty} = \frac{a_{11}}{a_{21}}; \\ [\text{нн}]^{\text{г} = 0} &= \frac{a_{12}}{a_{11}}; \quad [\text{нн}]^{\text{г} = \infty} = \frac{a_{22}}{a_{21}}. \end{aligned} \tag{2a}$$

Теперь на основании (1) и (2) после простейших алгебраических преобразований можно получить основные формулы, связывающие входные, выходные и проходные параметры с производными параметрами х.х и к.з (см. (2)):

$$[\text{гг}] = [\text{гг}]^{\text{н} = 0} \left\{ \frac{1 + \dfrac{\text{н}}{[\text{нн}]^{\text{г} = 0}}}{1 + \dfrac{\text{н}}{[\text{нн}]^{\text{г} = \infty}}} \right\};$$

$$[\text{нн}] = [\text{нн}]^{\text{г} = 0} \left\{ \frac{1 + \dfrac{\text{г}}{[\text{гг}]^{\text{н} = 0}}}{1 + \dfrac{\text{г}}{[\text{гг}]^{\text{н} = \infty}}} \right\}; \tag{3}$$

$$[\text{гн}] = \frac{\text{н}\left\{[\text{гг}]^{\text{н} = \infty} + \text{г}\right\} + [\text{нн}]^{\text{г} = \infty}\left\{[\text{гг}]^{\text{н} = 0} + \text{г}\right\}}{\sqrt{[\text{нн}]^{\text{г} = \infty}\left\{[\text{гг}]^{\text{н} = \infty} - [\text{гг}]^{\text{н} = 0}\right\}}};$$

$$[\text{гн}] = \frac{\text{г}\left\{[\text{нн}]^{\text{г} = \infty} + \text{н}\right\} + [\text{гг}]^{\text{н} = \infty}\left\{[\text{нн}]^{\text{г} = 0} + \text{н}\right\}}{\sqrt{[\text{гг}]^{\text{н} = \infty}\left\{[\text{нн}]^{\text{г} = \infty} - [\text{нн}]^{\text{г} = 0}\right\}}}.$$

Отсюда можно видеть, что основные параметры четырехполюсника сравнительно просто связаны с производными параметрами холостого хода и короткого замыкания (см. (2а)), поэтому задача сводится к определению последних.

Метод «фиктивных нагрузок»

Известные экспериментальные методы определения производных параметров, т. е. сопротивлений холостого хода и короткого замыкания, необходимых для вычисления параметров измерительной цепи, в данном случае не подходят, поэтому предлагается способ последовательных решений, названный нами методом «фиктивных нагрузок». Этот метод надо применять в тех случаях, когда параметры холостого хода и короткого замыкания нельзя непосредственно выразить в общей (буквенной) форме, руководствуясь внешним видом схемы или применяя простейшие преобразования ее в канонический вид. В противном случае решением задачи являются уже уравнения (3).

Уравнения (3) пригодны и при использовании метода «фиктивных нагрузок». С этой целью выбирается некоторая ветвь исходной схемы, замыкание и размыкание которой приводит к появлению новой схемы, более простой по графу.

Если условно рассматривать сопротивление этой ветви как новую нагрузку, обозначаемую $н_1$, то на основании (3) искомые производные параметры можно записать в такой форме:

$$
\begin{gathered}
[гг]^{н=0} = [гг]^{н=0}_{н_1=0}\left\{\frac{1+\dfrac{н_1}{[н_1н_1]^{н=0}_{г=0}}}{1+\dfrac{н_1}{[н_1н_1]^{н=0}_{г=\infty}}}\right\};\\
[гг]^{н=\infty} = [гг]^{н=\infty}_{н_1=0}\left\{\frac{1+\dfrac{н_1}{[н_1н_1]^{н=\infty}_{г=0}}}{1+\dfrac{н_1}{[н_1н_1]^{н=\infty}_{г=\infty}}}\right\};\\
[нн]^{г=0} = [нн]^{г=0}_{н_1=0}\left\{\frac{1+\dfrac{н_1}{[н_1н_1]^{г=0}_{н=0}}}{1+\dfrac{н_1}{[н_1н_1]^{г=0}_{н=\infty}}}\right\}.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Четвертый производный параметр $[нн]^{г=\infty}$ (см. (2а)) можно не вычислять, так как он определяется из следующего соотношения:

$$[гг]^{н=\infty}[нн]^{г=0} = [гг]^{н=0}[нн]^{г=\infty}.$$

Таким образом, для расчетов необходимо уже искать другие производные параметры:

$$[гг]^{н=0}_{н_1=0},\ [гг]^{н=\infty}_{н_1=0},\ \ldots,\ [нн]^{г=0}_{н_1=0}.$$

Последние имеют более простой вид, так как соответствуют более простой по графу схеме.

Если использование первой «фиктивной нагрузки» не дает желаемого упрощения, то все вычисления повторяются для второй «фиктивной нагрузки» $н_2$ и т. д. Расчеты показывают, что обычно после введения первой же «фиктивной нагрузки» схемы сводятся к таким, графы которых уже встречаются в повседневной практике.

Связь между сопротивлениями элементов цепей уравновешивания

Предположим, что исследуемая схема искусственным путем может быть приведена в состояние равновесия по отношению к сторонам нн четырехполюсника. В этом случае весьма важно найти связь между сопротивлениями схемы, являющуюся условием равновесия цепи и используемую при составлении уравнения измерения. Общепринятым способом отыскания условия равновесия до сих пор является вычисление токов и напряжений холостого хода на сторонах нн с последующим решением уравнения относительно нуля. Такого рода вычисления для простых схем, имеющих число контуров, равное трем или меньше, обычно не вызывают затруднений. Однако для более сложных схем вычисления существенно изменяются в связи с необходимостью решения системы уравнений высших степеней. В этом случае при расчетах весьма эффективно применение параметров холостого хода и короткого замыкания.

Как известно, условию равновесия цепи по отношению к зажимам нн будет удовлетворять соотношение $[гн]=\infty$. Легко видеть, что на основании (3) этому должна соответствовать такая зависимость:

$$[гг]^{н=\infty} - [гг]^{н=0} = 0$$

или (5)

$$[нн]^{г=\infty} - [нн]^{г=0} = 0.$$

В развернутой форме, применяя метод «фиктивных нагрузок», получим

$$[гг]^{н=0}_{н_1=0}\left\{1 + \frac{н_1}{[н_1н_1]^{н=0}_{г=0}}\right\}\left\{1 + \frac{н_1}{[н_1н_1]^{н=\infty}_{г=\infty}}\right\} =$$

$$= [гг]^{н=\infty}_{н_1=0}\left\{1 + \frac{н_1}{[н_1н_1]^{н=\infty}_{г=0}}\right\}\left\{1 + \frac{н_1}{[н_1н_1]^{н=0}_{г=\infty}}\right\}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что для вычисления условия равновесия цепи не требуется решать систему уравнений высших степеней, а достаточно найти ряд сопротивлений холостого хода и короткого замыкания, которые можно определить сразу же по виду графов цепей.

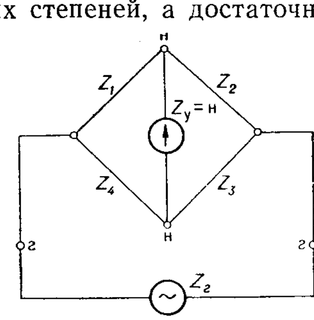

Рис. 2.

Пример. Для иллюстрации было бы целесообразно рассмотреть одну из сложных измерительных цепей, например четырехплечий мост со вспомогательной ветвью и утечками на землю со всех вершин. Исследования подобных цепей с помощью классических методов анализа весьма трудоемки и малоэффективны по сравнению с предложенным способом «фиктивных нагрузок».

Однако в силу ограничения объема доклада рассмотрим тривиальный пример расчета простейшего четырехплечего моста (рис. 2), очень хорошо изученного классическими методами.

Непосредственно по внешнему виду цепи (см. рис. 2) можно записать:

$$[\text{гг}]^{\text{н}=0}=\frac{Z_1Z_4}{Z_1+Z_4}+\frac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3};\quad [\text{гг}]^{\text{н}=\infty}=\frac{(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4)}{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4};$$

$$[\text{нн}]^{\text{г}=0}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}+\frac{Z_3Z_4}{Z_3+Z_4}.$$

Отсюда просто получить условие равновесия моста

$$[\text{гг}]^{\text{н}=\infty}-[\text{гг}]^{\text{н}=0}=Z_2Z_4-Z_1Z_3=0.$$

Если условие равновесия не получалось бы сразу, то, согласно методу «фиктивных нагрузок», полагая, например, в частном случае $\text{н}_1=Z_3$, так же непосредственно по внешнему виду цепи необходимо было бы определить:

$$[\text{гг}]^{\text{н}=0}_{\text{н}_1=0}=\frac{Z_1Z_4}{Z_1+Z_4};\quad [\text{гг}]^{\text{н}=\infty}_{\text{н}_1=0}=\frac{(Z_1+Z_2)\,Z_4}{Z_1+Z_2+Z_4};$$

$$[\text{н}_1\text{н}_1]^{\text{н}=0}_{\text{г}=0}=\frac{Z_1Z_2Z_4}{Z_1(Z_2+Z_4)+Z_2Z_4};\quad [\text{н}_1\text{н}_1]^{\text{н}=0}_{\text{г}=\infty}=Z_2;$$

$$[\text{н}_1\text{н}_1]^{\text{н}=\infty}_{\text{г}=0}=Z_4;\quad [\text{н}_1\text{н}_1]^{\text{н}=\infty}_{\text{г}=\infty}=Z_1+Z_2+Z_4;$$

$$[\text{нн}]^{\text{г}=0}_{\text{н}_1=0}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}.$$

Подставляя полученные выражения в формулы (4) и (6), можно было бы получить то же условие равновесия моста. Заметим, что рассмотренный пример приведен только лишь с целью иллюстрации того, как пользоваться разработанной методикой.

Выводы

Получены соотношения, позволяющие проще, чем с помощью классических методов, определять основные характеристики (токи, напряжения, сопротивления) любого обратимого четырехполюсника. Преимущества предлагаемого способа расчета становятся особенно заметными, если заданный четырехполюсник имеет сложную схему.

Рассмотренный метод может существенно облегчить составление условий равновесия измерительных цепей.

Поступила в редакцию
7 октября 1965 г.