

УДК 620.179.14.538.54

В. С. СОБОЛЕВ, Ю. М. ШКАРЛЕТ
(Новосибирск — Москва)

К ТЕОРИИ КОНТРОЛЯ
МЕТОДОМ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ*

На основе решения задачи о поле витка, расположенного над проводящей слоистой средой, выведены и частично проанализированы выражения для плотности вихревых токов, наведенных в среде.

Метод вихревых токов, как перспективный метод неразрушающего контроля изделий и материалов, находит все более широкое применение [1], однако ряд аспектов его теории, особенно при использовании накладных или экранных датчиков, разработан недостаточно. В частности, это касается вопросов распределения плотности вихревых токов в контролируемом образце. В настоящей работе задача определения распределения плотности вихревых токов решается для общего случая, когда датчик установлен над проводящей n -слоистой средой.

При теоретическом рассмотрении задачи в целях ее упрощения накладной датчик с некоторым приближением можно заменить эквивалентным витком с током $I\bar{W}$, где I — ток, питающий обмотку датчика, а \bar{W} — число витков последней. В качестве радиуса (R_1) этого витка можно выбрать среднее арифметическое внутреннего и внешнего радиусов обмотки датчика, а в качестве эквивалентного расстояния между датчиком и образцом считать величину

$$h = h_n + \frac{l}{2}.$$

Здесь h_n — истинное расстояние между образцом и обмоткой датчика;
 l — длина последней.

Взаимное расположение витка и контролируемой среды показано на рис. 1.

Вектор-потенциал электромагнитного поля, как известно, определяется уравнением Гельмгольца:

$$\nabla^2 A + k^2 A = -\mu_0 \mu \bar{j}_{ст},$$

где $\bar{j}_{ст}$ — плотность сторонних токов.

* Материал доложен на VII Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1965 г. в Новосибирске.

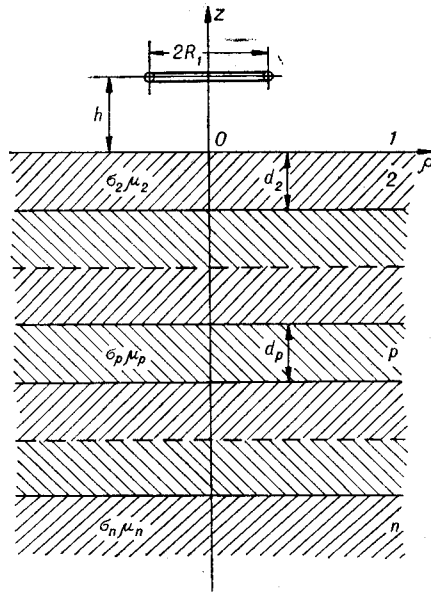


Рис. 1.

Если виток питается переменным током $I e^{-j\omega t}$ и задача решается для квазистационарного случая, то

$$k^2 = -j\omega\sigma\mu_0\mu,$$

где σ — электропроводность проводящей среды;

μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м;

μ — относительная магнитная проницаемость среды.

Решая это уравнение в цилиндрических координатах с началом на поверхности проводящей среды и осью z , совпадающей с осью витка, аналогично изложенному в [2], получим следующие выражения соответственно для поля в верхней области, в любом слое p и в подстилающем полупространстве:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 = & 0,5\mu_0 R_1 I W \int_0^\infty J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda \rho) e^{-\lambda|z-h|} d\lambda + \\ & + 0,5\mu_0 R_1 I W \int_0^\infty J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda \rho) \varphi_1 e^{-\lambda(z+h)} d\lambda; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{A}_p = 0,5\mu_0\mu_p R_1 I W \int_0^\infty J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda \rho) \frac{\lambda}{q_p} e^{-\lambda h} (f_p e^{q_p z} + \varphi_p e^{-q_p z}) d\lambda; \quad (2)$$

$$\dot{A}_n = 0,5\mu_0\mu_n R_1 I W \int_0^\infty J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda \rho) \frac{\lambda}{q_n} f_n e^{q_n z - \lambda h} d\lambda. \quad (3)$$

Здесь $q = \sqrt{\lambda + j\omega\sigma\mu_0\mu}$;

λ — величина, получившаяся при разделении переменных ρ и z в уравнении Гельмгольца;

J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка;

z, ρ — цилиндрические координаты системы датчик — образец;

d_p — толщина p -го слоя проводящей среды;

$\varphi_1, f_p, \varphi_p, f_n$ — функции, вид которых, используя интеграл Фурье — Бесселя, можно определить из граничных условий:

$$\dot{A}_{p-1} = \dot{A}_p; \quad \frac{1}{\mu_{p-1}} \frac{\partial \dot{A}_{p-1}}{\partial z} = \frac{1}{\mu_p} \frac{\partial \dot{A}_p}{\partial z}. \quad (4)$$

Если пренебречь токами смещения, то плотность тока в проводящем

теле j следующим образом связана с напряженностью электрического поля:

$$\vec{j} = \sigma \dot{E}. \quad (5)$$

Поскольку вследствие симметрии задачи вектор-потенциал имеет только φ -ю компоненту и от угла φ не зависит, то напряженность электрического поля определится так:

$$\dot{E} = -j\omega \dot{A}W. \quad (6)$$

Исключая из (5) и (6) напряженность электрического поля, найдем

$$\vec{j} = -j\omega\sigma \dot{A}W. \quad (7)$$

Из этого выражения следует, что плотность вихревых токов в образце, возбуждаемых накладным датчиком, имеет только φ -ю компоненту и так же, как и вектор-потенциал магнитного поля, от координаты φ не зависит.

Подставляя выражения (2) и (3) в (7), получим формулы для расчета плотности тока соответственно в любом слое проводящей среды и подстилающем полупространстве:

$$\vec{j}_p = -j0,5\omega\mu_0\mu_p\sigma_p R_1 iW \int_0^\infty J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda\rho) e^{-\lambda h} \frac{\lambda}{q_p} (f_p e^{q_p z} + \varphi_p e^{-q_p z}) d\lambda; \quad (8)$$

$$j_n = j0,5\omega\mu_0\mu_n\sigma_n R_1 iW \int_0^\infty J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda\rho) \frac{\lambda}{q_n} f_n e^{q_n z - \lambda h} d\lambda. \quad (9)$$

К сожалению, анализировать эти выражения весьма трудно, так как входящие в них интегралы не выражаются через известные функции. В [3] дан метод приближенного определения таких интегралов. Применяя его для (1)–(3), легко вывести следующие приближенные формулы для вектор-потенциала:

$$\dot{A}_1 = \mu_0 W i \frac{34x - 10}{8\pi^2} \sqrt{\frac{R_1}{\rho}} \left(e^{-\frac{3|z-h|}{2R}} + \varphi_1 e^{-\frac{3(z+h)}{2R}} \right) \Big|_{\lambda = \frac{3}{2R}}; \quad (10)$$

$$\dot{A}_p = \mu_0\mu_p i W \frac{34x - 10}{8\pi^2} \sqrt{\frac{R_1}{\rho}} e^{-\frac{3h}{2R}} \frac{\lambda}{q_p} (f_p e^{q_p z} + \varphi_p e^{-q_p z}) \Big|_{\lambda = \frac{3}{2R}}; \quad (11)$$

$$\dot{A}_n = \mu_0\mu_n i W \frac{34x - 10}{8\pi^2} \sqrt{\frac{R_1}{\rho}} e^{-\frac{3h}{2R}} \frac{\lambda}{q_n} f_n e^{q_n z} \Big|_{\lambda = \frac{3}{2R}}. \quad (12)$$

Здесь $x = \frac{R_1}{\rho}$ при $\frac{R_1}{\rho} < 1$ и $x = \frac{\rho}{R_1}$ при $\frac{R_1}{\rho} > 1$; величина R — большая из R_1 и ρ . Функции φ_1 , f_p , φ_p и f_n определяются из граничных

условий (4). Наилучшие приближения эти формулы дают при $0,4 \leq \leq \frac{h}{R_1} \leq 1,6$ и $0,5 \leq x \leq 1$.

Если теперь выражения (11) и (12) подставить в (7), получим удобные приближенные формулы для расчета плотности тока в любом слое ρ и подстилающем полупространстве:

$$J_n = -j \omega \sigma_n \mu_0 \mu_n I W \frac{\sqrt{\rho}}{8\pi^2} \sqrt{\frac{3h}{\rho}} e^{-\lambda z} \frac{1}{q_n} f_n e \Big|_{\lambda = \frac{3}{2R}} \quad (14)$$

В случае, если среда представляет собой проводящий слой с параметрами σ_2, μ_2 , лежащий на подстилающем полупространстве с параметрами σ_3, μ_3 , функции f_2, φ_2 и f_3 имеют следующий вид:

$$f_2 = \frac{2q_2 (\mu_2 q_2 + \mu_3 q_3)}{\Lambda} e^{dq_2}, \quad (15)$$

$$\varphi_2 = \frac{2q_2 (\mu_2 q_2 - \mu_3 q_3)}{\Lambda} e^{-dq_2}, \quad (16)$$

$$f_3 = \frac{4q_2 \mu_2 q_3}{\Lambda} e^{dq_3}, \quad (17)$$

где

$$\Lambda = (\lambda \mu_2 + q_2) (\mu_2 q_3 + \mu_3 q_2) e^{dq_2} - (\lambda \mu_2 - q_2) (\mu_2 q_3 - \mu_3 q_2) e^{-dq_2};$$

$$q_2 = \sqrt{\lambda^2 + j \omega \sigma_2 \mu_0 \mu_2};$$

$$q_3 = \sqrt{\lambda^2 + j \omega \sigma_3 \mu_0 \mu_3}.$$

Если образец имеет форму пластины с параметрами σ и μ , то, полагая в (15) и (16) $\sigma_3=0, \mu_3=1$, найдем соответствующие выражения для f_2 и φ_2 . Подставляя их в (8), выведем формулу для расчета плотности тока в этом случае:

$$\bar{j} = -j \omega \sigma \mu_0 \mu I W \frac{\lambda (34x - 10)}{4\pi^2} \sqrt{\frac{R_1}{\rho}} e^{-\frac{3h}{2R}} \times \\ \times \frac{(\mu\lambda + q) e^{q(d+z)} + (\mu\lambda - q) e^{-q(d+z)}}{(\mu\lambda + q)^2 e^{dq} - (\mu\lambda - q)^2 e^{-dq}} \Big|_{\lambda = \frac{3}{2R}} \quad (18)$$

Если в последнем равенстве толщину пластины устремить в бесконечность, то легко получить приближенное выражение для плотности вихревых токов, наведенных полем датчика в проводящем полупространстве:

$$\bar{j} = -j \omega \sigma \mu_0 \mu I W \frac{\lambda (34x - 10)}{4\pi^2} \sqrt{\frac{R_1}{\rho}} e^{-\frac{3h}{2R}} \frac{e^{qz}}{\mu\lambda + q} \Big|_{\lambda = \frac{3}{2R}} \quad (19)$$

Если полупространство не ферромагнитно, то это выражение будет иметь вид

$$\bar{j} = -\frac{IW\lambda(34z-10)}{4\pi^2} \sqrt{\frac{R_1}{\rho}} \left(\sqrt{\lambda^2 + j\omega\sigma\mu_0} - \lambda \right) e^{z\sqrt{\lambda^2 + j\omega\sigma\mu_0} - \frac{3h}{2R}} \Big|_{\lambda = \frac{3h}{2R}} \quad (20)$$

Кривые изменения модуля плотности вихревых токов, рассчитанные по этой формуле при условии, что виток или короткая катушка наложены непосредственно на образец, приведены на рис. 2. Для получения обобщенных результатов плотность вихревых токов отнесена к величине IW/R_1^2 . Кривые рассчитаны для двух значений обобщенного параметра $\beta = R_1\sqrt{\omega\sigma\mu_0}$. Как видно из рис. 2, в точках на оси датчика плотность вихревых токов равна нулю. С увеличением координаты ρ она растет и достигает максимума непосредственно под витками обмотки датчика. При дальнейшем увеличении координаты ρ плотность тока непрерывно падает.

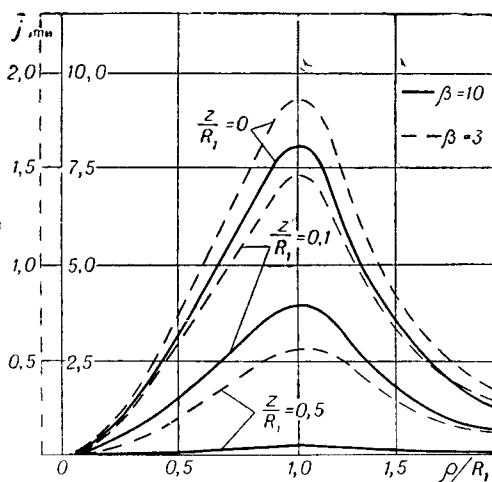


Рис. 2.

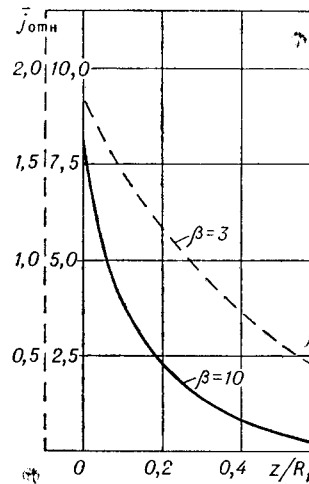


Рис. 3.

При изменении координаты z в направлении образца плотность тока тоже падает. В соответствии с приближенным выражением (20) закон убывания модуля плотности тока определяется экспонентой

$$e^{0,707z} \sqrt{\sqrt{\lambda^4 + (\omega\sigma\mu_0)^2} + \lambda^2} \Big|_{\lambda = \frac{3h}{2R}} \quad (21)$$

Координата z в этом выражении отрицательна.

Зависимость модуля плотности тока от обобщенной координаты z/R_1 при $\rho=R_1$ показана на рис. 3. Естественно, что при больших значениях электропроводности образца или частоты тока, питающего датчик, т. е. при больших значениях обобщенного параметра β , плотность тока так же, как и в случае плоской волны, убывает быстрее.

Как показывает анализ выражения (20), в плоскости $z = \text{const}$ при $\rho < R_1$ фаза плотности тока остается неизменной, а при $\rho > R_1$ — меняется в соответствии с экспонентой

$$e^{j \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{z}{R_1} \sqrt{\sqrt{1+\nu^2}-1} + \text{arctg} \frac{\sqrt{\sqrt{1+\nu^2}-1}}{\sqrt{\sqrt{1+\nu^2}+1-\sqrt{2}}} \right)};$$

$$\nu = \frac{4}{9} \rho^2 \omega \sigma \mu_0.$$

При изменении координаты z фаза плотности тока изменяется линейно.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Коробейникова, Н. М. Родигин. Контроль качества изделий методом вихревых токов. Свердловск.— М., Машгиз, 1958.
2. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М., Изд-во АН СССР, 1948.
3. Ю. М. Шкарлет. Некоторые вопросы теории метода вихревых токов и расчет накладных датчиков.— Сб. «Неразрушающие методы контроля материалов и изделий». Под ред. С. Т. Назарова. М., ОНТИПрибор, 1964.

Поступила в редакцию
7 октября 1965 г.