

## ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 62—501.2+62—503.1

М. С. КРАСИЦКИЙ, Е. Г. КРУШЕЛЬ

(Фрунзе)

### О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ СИНТЕЗА СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО КОНТРОЛЯ ДЛЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Излагается метод выбора минимального числа точек интегрального контроля для объекта с распределенными параметрами. Предложенная система автоматического контроля производит одновременно измерение выходной переменной и фильтрацию помехи.

Для контроля за характером протекания процессов химической технологии и создания систем автоматизации могут быть использованы различные виды автоматического контроля.

При регулировании объектов с сосредоточенными параметрами для контроля за ходом процесса обычно применяются датчики, установленные на входе или выходе материальных потоков. В качестве регулируемой величины в этом случае обычно используется импульс от датчика, установленного на выходе объекта, т. е. осуществляется схема контроля и регулирования «по выходу».

Для многих объектов с распределенными параметрами можно применять аналогичную систему; однако в некоторых случаях из-за невозможности установки датчика на выходе в качестве контролируемого сигнала может служить информация, снимаемая с датчиков, установленных в одной из точек аппарата. Например, для некоторых процессов ректификации с промежуточным отбором продукта в качестве контролируемой величины может служить температура отборной тарелки ректификационной колонны. Контроль такого типа будем называть точечным или сосредоточенным, частным случаем которого является контроль на выходе аппарата.

Качественно иным видом контроля является распределенный контроль. Он находит применение в тех случаях, когда управляемый объект имеет распределенные параметры [1].

Распределенный характер процесса требует введения контроля, учитывающего состояние процесса по всей длине аппарата, а не только на выходе. В случае регулирования тепловых процессов постоянство температуры на выходе объекта можно поддерживать с помощью контроля среднеинтегральной температуры. Для этого по длине аппарата устанавливается определенное число датчиков, информация с которых попадает на один или несколько вторичных приборов. При этом будет иметь место дискретно распределенный контроль.

Проведенные выше рассуждения распространяются на объекты массообмена (экстракторы, абсорберы, ректификационные колонны и др.); однако в этом случае в качестве контролируемых переменных будут выступать соответствующие значения концентраций.

Дальнейшее рассмотрение поведем на примере построения системы контроля процессов нестационарного массообмена в противоточной экстракционной колонне. Для этого случая объект описывается уравнением [2]:

$$a_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} + a_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial F}{\partial t} + b_2 \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq l; 0 \leq t < \infty)$$

с дополнительными условиями:

$$F(x, 0) = \varphi(x); \quad \frac{\partial F(x, 0)}{\partial t} = \psi(x); \quad F(0, t) = u_0(t), \quad (2)$$

где

$$a_{11} = 1; \quad 2a_{12} = V_X - V_Y; \quad a_{22} = -V_X V_Y;$$

$$b_1 = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}, \quad b_2 = \frac{V_X}{T_2} - \frac{V_Y}{T_1};$$

$V_X$  и  $V_Y$  — линейные скорости соответственно сплошной и дисперсной фаз;

$T_1(T_2)$  — время, в течение которого сплошная (дисперсная) фаза проходит расстояние, равное высоте единицы переноса;

$F$  — отклонение выходной переменной от равновесной;  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $u_0(t)$  — заданные функции.

Управление процессом экстракции производится путем изменения граничных условий (например, путем изменения расхода или концентрации подаваемых веществ). Однако обычно к границе объекта приложено не только управляющее воздействие, но и помеха (например, наличие в экстрагирующей массе определенных примесей и др.).

Поэтому выходной сигнал  $F(x, t)$  можно тоже рассматривать как сумму полезного сигнала  $u(x, t)$ , являющегося преобразованием распределенных объектов управляющего воздействия  $u(0, t)$ , и помехи  $Z(x, t)$  — результата преобразования объектом входного шума  $Z(0, t)$  (рис. 1). Представляет интерес совместить в системе интегрального контроля две задачи: измерение выходной переменной  $u(x, t)$  и фильтрацию помехи  $Z(x, t)$ .

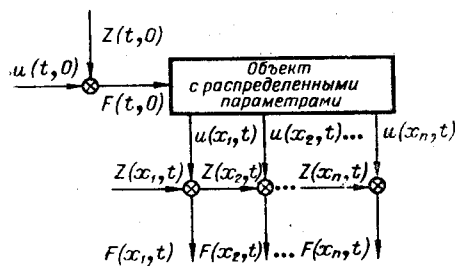


Рис. 1.

Для решения задачи фильтрации необходимо привести помеху, действующую на границе объекта, к его выходу. Задачи такого типа

рассматриваются при изучении линейных преобразований случайных функций [3]. При строгом рассмотрении объекта с распределенными параметрами (1) не удастся получить замкнутое выражение для выходной координаты [4], поэтому будем использовать приближенный метод. Сущность излагаемого метода сводится к следующему:

1. Используя метод прямых в качестве приближенного метода решения (1), приведем помеху к выходу объекта.

2. Произведем дискретизацию пространственной координаты объекта, исходя из некоторого компромисса между точностью аппроксимации и стоимостью системы интегрального контроля.

3. Осуществим синтез системы интегрального контроля, в которой одновременно производится близкая к оптимальной фильтрация помехи.

### Приближенный метод приведения помехи к выходу и оценка его погрешности

Для определения статистических характеристик приведенной к выходу помехи  $Z(x, t)$  (см. рис. 1) воспользуемся методом канонических разложений [3]:

$$Z = (x, t) = m_z(x, t) + \sum_v W_v Z_v(x, t), \quad (3)$$

где  $m_z(x, t)$  — математическое ожидание помехи;

$W_v$  — некоррелированные случайные величины;

$Z_v(x, t)$  — координатные функции.

В [3] показано, что математическое ожидание и координатные функции являются линейным преобразованием динамической системой (1) математического ожидания и координатных функций входной помехи  $Z(t, 0)$ .

Для приближенного определения  $m_z$  и  $Z_v$  построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, приближенно заменяющую (1), и оценим погрешность такой аппроксимации. Так как  $m_z$  и  $Z_v$  являются решениями одного и того же уравнения (1), то будем в дальнейшем обозначать их одной буквой  $Z$ . Итак,  $m_z$  и  $Z_v$  являются решением дифференциального уравнения

$$a_{11} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial x} + a_{22} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial Z}{\partial t} + b_2 \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

с дополнительными условиями:

$$Z(0, t) = Z_0(t); Z(x, 0) = \varphi_1(x); \frac{\partial Z(x, 0)}{\partial t} = \psi_1(x),$$

где  $Z_0$  — математическое ожидание (координатные функции) граничного возмущения. Произведем замену переменных:

$$\xi = t + px; \eta = qx, \quad (5)$$

где

$$p = \frac{V_X - V_Y}{2V_X V_Y}; \quad q = \frac{V_X + V_Y}{2V_X V_Y}.$$

Замена переменных, предложенная в [2], не позволяет построить конечномерную аппроксимацию уравнения (4) при неограниченных временных интервалах.

Уравнение (4) после замены переменных примет вид:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} + c_1 \frac{\partial Z}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial Z}{\partial \eta} = 0, \quad (6)$$

где

$$c_1 = \frac{2\left(\frac{V_X}{T_2} + \frac{V_Y}{T_1}\right)}{V_X + V_Y}; \quad c_2 = \frac{2\left(\frac{V_X}{T_2} - \frac{V_Y}{T_1}\right)}{V_X + V_Y}. \quad (7)$$

Используя вспомогательную функцию [2]

$$v = e^{-(\lambda\xi + \mu\eta)} Z, \quad (8)$$

где

$$\lambda = -\frac{\left(\frac{V_X}{T_2} + \frac{V_Y}{T_1}\right)}{V_X + V_Y}; \quad \mu = -\frac{\frac{V_X}{T_2} - \frac{V_Y}{T_1}}{V_X - V_Y},$$

приведем (4) к простейшему виду:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - c_3 v = 0, \quad (9)$$

где

$$c_3 = \frac{\frac{V_X^2}{T_2^2} + \frac{V_Y^2}{T_1^2}}{(V_X + V_Y)^2}. \quad (10)$$

Из физических соображений померу и ее производные  $\frac{\partial^{m+n} Z}{\partial x^m \partial t^n}$  можно ограничить некоторыми экспонентами:

$$\left| \frac{\partial^{m+n} Z}{\partial x^m \partial t^n} \right| \leq A_{mn} e^{-\alpha_{mn} t}, \quad (11)$$

где

$$m + n = 0, 1, 2, 3; \quad A_{mn} = \text{const} \geq 0; \quad \alpha_{mn} = \text{const} \geq 0.$$

Такое ограничение естественно вытекает из требования, чтобы в конце процесса отклонение концентрации от равновесной стремилось к нулю и не имело тенденции изменяться.

Найдем ограничения, накладываемые на вспомогательную функцию  $v$ , если на  $Z$  наложены ограничения (11). Для этого выразим производные  $v$  по  $t$  и  $x$  через производные по новым переменным  $\xi$  и  $\eta$ ; используя (5) и (11), обнаружим, что производные  $v$  по  $\xi$  и  $\eta$  также ограничены некоторыми экспонентами:

$$\left| \frac{\partial^m Z}{\partial \eta^m} \right| \leq A_m e^{-\alpha_m (\xi - \rho x)} \quad (m = 1, 2, 3),$$

где  $A_m$  и  $\alpha_m$  выражаются через  $A_{mn}$  и  $\alpha_{mn}$  из (11) и через коэффициенты уравнения (4).

Не ограничивая общности, можно принять  $\rho < 0$ . Тогда

$$\left| \frac{\partial^m Z}{\partial \eta^m} \right| \leq A_m e^{-\alpha_m \xi}. \quad (12)$$

Используя (12), найдем ограничения, накладываемые на третью производную вспомогательной функции  $v$ :

$$\frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3} = e^{-(\lambda \xi + \mu \eta)} \left( \frac{\partial^3 Z}{\partial \eta^3} - 3\lambda \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} + 3\lambda^2 \frac{\partial Z}{\partial \eta} - \lambda^3 Z \right) \leq M e^{-x\xi}, \quad (13)$$

где

$$M = \begin{cases} \max \{A_3, 3|\lambda|A_2, 3\lambda^2 A_1, |\lambda|^3 A_0\} & \text{при } \mu \geq 0; \\ \exp\{|\mu|lq\} \max \{A_3, 3|\lambda|A_2, 3\lambda^2 A_1, |\lambda|^3 A_0\} & \text{при } \mu < 0; \end{cases}$$

$$x = \lambda + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 > 0.$$

Используем ограничение (13) для вычисления погрешности аппроксимации уравнения (9) системой уравнений метода прямых

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial \xi^2} = \frac{1}{h^2} [v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}] - c_3 v_k \quad (14)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$h = \frac{ql}{n+1}.$$

Если погрешность определения  $v_k$  обозначить  $\gamma_k = v(\eta_k, \xi) - v_k$ , то получим следующую систему уравнений для  $\gamma_k$ :

$$\frac{\partial^2 \gamma_k}{\partial \xi^2} = \frac{1}{h^2} [\gamma_{k+1} - 2\gamma_k + \gamma_{k-1}] - c_3 \gamma_k + \frac{1}{2} h R_k, \quad (15)$$

где

$$|R_k| \leq \frac{2}{3} \sup \left\{ \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3} \right\} = \frac{2}{3} M e^{-x\xi} = M_1 e^{-x\xi} \quad (16)$$

$$0 \leq \eta \leq ql,$$

причем

$$M_1 = \frac{2}{3} M.$$

Погрешность аппроксимации оценим методом, изложенным в [5]. Составим уравнение:

$$I = \sum_{k=1}^n \left( \frac{d\gamma_k}{d\xi} \right)^2 + \sum_{k=1}^n c_3 \gamma_k^2 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{h^2} [\gamma_{k+1} - \gamma_k]^2. \quad (17)$$

Дифференцируя (17) и используя тот факт, что  $\gamma_0 = \gamma_{n+1} = 0$ , запишем

$$\frac{dI}{d\xi} \leq \sum_{k=1}^n \frac{d\gamma_k}{d\xi} h R_k.$$

Неравенство Коши-Буняковского дает

$$\frac{dI}{d\xi} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{d\gamma_k}{d\xi} \right)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n R_k^2 h^2} \leq \sqrt{I} M_1 e^{-x\xi} \sqrt{nlq}.$$

Интегрируя, найдем

$$I \leq \frac{M_1^2}{4x} nh^2 (1 - e^{-x\xi})^2.$$

Следуя [5], получаем оценку погрешности

$$|\gamma_k| \leq h \frac{M_1}{2x} \sqrt{\eta_k(lq - \eta_k)} |1 - e^{-xk}|. \quad (18)$$

Последнее выражение позволяет найти оценку погрешности определения исходной функции Z:

$$|\gamma_\alpha| \leq hq \frac{M_1 e^{l\lambda p}}{2x} \sqrt{x_k(l - x_k)} |1 - e^{-(x-p)t}|. \quad (19)$$

Из (19) следует, что математическое ожидание и координатные функции приведенной к выходу помехи определяются с погрешностью, прямо пропорциональной шагу разбиения  $h$ .

В момент времени, достаточно удаленный от начального, приведенную помеху можно считать стационарной. Математическое ожидание и координатные функции такой помехи определяются с погрешностью

$$|\gamma_\alpha^*| \leq h \frac{qM_1 e^{l\lambda p}}{2x} \sqrt{x_k(l - x_k)}. \quad (20)$$

Полученная оценка погрешности показывает, что при ограничениях вида (11) метод прямых можно использовать при неограниченных временных интервалах. При других условиях (см., например, [5]) погрешность с увеличением временного интервала возрастает неограниченно. Выражение (20) будет использовано ниже при выборе величины  $h$ .

#### Выбор оптимального числа точек распределенного контроля

В качестве контролируемой переменной принимаем среднеинтегральное значение распределенного выхода  $u(x, t)$ :

$$\sigma^*(t) = \int_0^l s(x) u(x, t) dx,$$

где  $s(x)$  — весовая функция.

При конечном числе точек измерения значение  $\sigma^*(t)$  может быть получено лишь приближенно. Предположим, что по длине объекта установлено  $n$  равномерно распределенных датчиков, информация с которых поступает в усредняющее устройство.

В этом случае вместо  $\sigma^*(t)$  получим его приближенное значение

$$\sigma^*(t) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u\left(x_{2i-1}, t\right). \quad (21)$$

Предельная погрешность  $\gamma_\beta$ , обусловленная использованием формулы (21), составляет [6]:

$$\gamma_\beta = \frac{l^3}{n^2} M_2, \quad (22)$$

где

$$M_2 = \frac{1}{24} A_{20}.$$

Число точек распределенного контроля должно представлять собой компромисс между точностью и стоимостью средств контроля. Поэтому его целесообразно находить путем максимизации по  $h$  следующей функции:

$$L = c_1 \gamma^* + c_2 n, \quad (23)$$

где 
$$\gamma^* = \begin{cases} \gamma_a^* & \text{при использовании (20);} \\ \gamma_\beta & \text{при использовании (22);} \end{cases}$$

$c_1$  и  $c_2$  — постоянные коэффициенты, характеризующие «цены» соответственно погрешности и средств контроля;

$n = \frac{l}{h} - 1$  — число точек контроля.

Максимизируя  $L$  по  $h$ , найдем:

$$h = \begin{cases} + \sqrt{\frac{2c_1 l x}{c_2 q M_1 e^{\lambda l p} \sqrt{x_k (l - x_k)}}} & \text{при использовании (20);} \\ + \sqrt[3]{\frac{c_2}{c_1 M_2}} & \text{при использовании (22).} \end{cases} \quad (24)$$

Выбрав в качестве интервала разбиение, меньшее из  $h$  в (24), осуществим приближенно систему интегрального контроля.

#### Фильтрация и помехи в системе интегрального контроля

Из приведенных выше рассуждений вытекает следующая постановка задачи фильтрации: на вход суммирующего устройства поступает сигнал  $F(x_i, t)$ , являющийся суммой дискретно распределенного полезного сигнала  $u(x_i, t)$  и помехи  $Z(x_i, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) (рис. 2).

На выходе получаем усредненный сигнал

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n r(t, x_i) F(t, x_i), \quad (25)$$

где  $r(t, x_i)$  — подлежащие определению весовые коэффициенты усреднения  $F(t, x_i)$ .

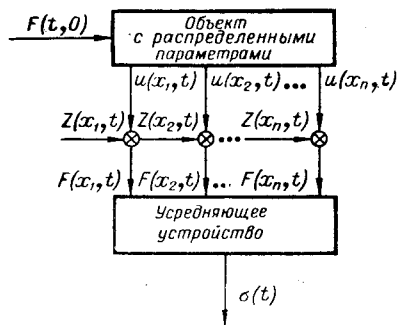


Рис. 2.

Примем  $r(t, x_i)$  такими, чтобы

$$\varepsilon(t) = M \{ |\sigma^*(t) - \sigma(t)|^2 \} = \min. \quad (26)$$

Здесь  $M$  — операция нахождения математического ожидания;

$$\sigma^*(t) = \sum_{i=1}^n s(x_i, t) u(x_i, t); \quad s(x_i, t)$$

выбираются, исходя из различной «технологической» ценности сигналов, поступающих из различных точек объекта [1, 7].

Для определения минимума (26) используем известный вариационный метод [3]: придавая вариацию весовому коэффициенту  $r(t, x_1)$ , найдем условие, при котором значение  $\varepsilon(t)$  минимально при произвольных вариациях. Это условие имеет вид.

$$\sum_{j=1}^n r(t, x_j) K_F(x_j, x_i, 0) - \frac{1}{2} s(x_j, t) \{K_{Fu}(x_j, x_i, 0) + \overline{K_{Fu}(x_j, x_i, 0)}\} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (27)$$

где

$$K_F(x_j, x_i, 0) = M\{F(x_i, t) \overline{F(x_j, t)}\},$$

$K_{Fu}(x_j, x_i, 0) = M\{F(x_i, t) \overline{u(x_j, t)}\}$  — корреляционные функции; выражения с чертой сверху обозначают комплексно-сопряженные функции.

Система из  $n$  уравнений (27) определяет  $n$  близких к оптимальным весовых коэффициентов  $r(x_1, t)$ ,  $r(x_2, t)$ , ...,  $r(x_n, t)$ . Обычно число точек дискретно распределенного контроля сравнительно невелико, поэтому для нахождения весовых коэффициентов необходимо не слишком много вычислений.

### Выводы

На примере объекта химической промышленности изложена методика выбора минимального числа точек распределенного контроля.

Предложена система контроля, совмещающая свойства измерения и фильтрации помех.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Девятков. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. Новосибирск, РИО СО АН СССР, 1964.
2. В. Н. Чернышев. О динамике массообмена в противоточных экстракционных аппаратах.— В сб. «Автоматизация производственных процессов», вып. IV. М., Изд-во «Наука», 1964.
3. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение в задачах автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.
4. Р. Курант. Уравнения с частными производными. М., Изд-во «Мир», 1964.
5. Б. М. Будак. О методе прямых для некоторых краевых задач.— Вестн. МГУ, 1956, № 1.
6. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений, тт. I, II. М., Физматгиз, 1962.
7. P. K. C. Wang, F. Tung. Optimum control of distributed-parameter systems.— Trans. ASME, 1964, D, v. 86, N 1.

Поступила в редакцию  
23 июля 1965 г.