со случайной погрешностью порядка 1%. Эту погрешность можно значительно снизить, если в схему ввести синхронный коммутатор, периодически подключающий обе отклоняющие системы к $RC$-цепи. В этом случае на экране появляется заведомо прямая линия, с которой легко точно сравнивать выравниваемую кривую, определяемую уравнением (6).

Анализ показал, что неравенство начальных амплитуд на $RC$- и $L_xC_x$ -цепях не вносит существенных погрешностей при определении $Q$. Ввиду того, что частота повторения зарядных импульсов и скорость разряда $RC$-цепи при средних и больших добротностях резонансных систем невелики, погрешность за счет остаточной индуктивности $RC$-цепи незначительна. Ее в случае необходимости можно при точных измерениях учесть.

С целью понижения погрешности при определении добротности за счет диэлектрических потерь в выходных цепях усилителей, подключенных к $RC$ и $LC$ контурам, а также в отклоняющих системах электронно-лучевой трубки приходится применять бесцокольные лампы и трубки, имеющие малые потери в стекле. Эти потери, если они недостаточно малы, можно исключить путем двойных измерений. Первое измерение производится при вспомогательном $LC$ контуре, а второе — после подключения к нему исследуемого контура, катушки индуктивности или конденсатора. Обработкой результатов этих двух измерений можно исключить собственные потери в системе.

Дополнительные емкости и утечки в $RC$-цепи учитываются при ее аттестации, которая производится, когда $RC$-цепь включена в измерительную цепь.

## ЛИТЕРАТУРА


1. A. I. Biggs, I. E. Hauldin. The development of Q-meter methods of impendance measurement.— The Proceedings of the Institution of Electrical. Engineers (London), 1949, v. 96, p. III.
2. С. Рыжко. Измеритель добротности, основанный на принципе подсчета электронных импульсов.— Бюллетень Польской Академии наук, 1956, отд. IV, т. IV, № 3.



*Поступила в редакцию 30 июля 1965 г.*


---


УДК 681.2.08



**В. М. ЕФИМОВ**
*(Новосибирск)*


# О ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ОДНОГО ИЗ СПОСОБОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

При измерении изменяющихся во времени величин в присутствии помех широкое применение находит операция статистической обработки результатов измерений. Одним из возможных вариантов такой обработки является способ «скользящего среднего». Сущность этого способа заключается в том, что значение измеряемой величины в момент времени $t$ определяется как среднее от симметрично расположенных относительно этого момента времени отсчетов, т. е.*

$$x^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} [x(t+k\Delta) + y(t+k\Delta)], \qquad (1)$$

где $\Delta$ — интервал времени между измерениями;
$x(t+k\Delta)+y(t+k\Delta)$ — значения отсчетов;
$y(t+k\Delta)$ — погрешность, сопровождающая результат измерения.

* В (1) число отсчетов $n$ для удобства вычислений взято нечетным.

При этом средний квадрат погрешности, возникающей из-за замены истинного значения измеряемой величины $x(t)$ значением $x^*(t)$, определяемым формулой (1), в случае некоррелированности значений измеряемой величины и погрешности равен

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\left[x(t) - \frac{1}{n}\sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} x(t + k\Delta)\right]^2} + \overline{\left[\frac{1}{n}\sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} y(t + k\Delta)\right]^2}. \qquad (2)$$

При увеличении числа осредняемых отсчетов первое слагаемое в (2) возрастает (в пределе оно становится равным дисперсии измеряемой величины). В то же время вторая составляющая среднего квадрата погрешности с увеличением $n$ уменьшается (в пределе она становится равной квадрату математического ожидания погрешности). В связи с различными тенденциями поведения составляющих среднего квадрата погрешности может существовать такое число $n_0$, при котором значение $\overline{\varepsilon^2}$ минимально. В [1—3] найдено значение $n_0$ для случая, когда измеряемая величина является детерминированной функцией времени, а значения погрешностей не коррелированы.

Ниже будут получены соотношения для определения $n_0$, когда $x(t)$ и $y(t)$ — линейно независимые стационарные случайные процессы.

Будем исходить из предположения, что $\overline{y(t)}=0$. Если математическое ожидание погрешности отлично от нуля, то его квадрат следует добавить к полученным выражениям для $\overline{\varepsilon^2}$. Наличие математического ожидания у погрешности не оказывает влияния на выбор величины $n_0$. Используя спектральное представление процессов $x(t)$ и $y(t)$ (см., например, [4]), выражение (2) путем несложных преобразований можно привести к следующему виду:

$$\overline{\varepsilon^2} = \int S_x(\omega)\left(1 - \frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}n}{n\sin\frac{\omega\Delta}{2}}\right)^2 d\omega + \int S_y(\omega)\left(\frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}n}{n\sin\frac{\omega\Delta}{2}}\right)^2 d\omega, \qquad \mathbf{(3)}$$

где $S_x(\omega)$ и $S_y(\omega)$ — спектральные плотности $x(t)$ и $y(t)$.

На временной оси аналогом формулы (3) является выражение, которое может быть получено непосредственно из (2) (см. также [5]):

$$\overline{\varepsilon^2} = \sigma_x^2\left[1 - 2\frac{1}{n}\sum_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \rho_x(k\Delta) + \frac{1}{n}\sum_{-(n-1)}^{n-1}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\rho_x(k\Delta)\right] +$$

$$+ \sigma_y^2\frac{1}{n}\sum_{-(n-1)}^{n-1}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\rho_y(k\Delta), \qquad (4)$$

где $\rho_x(k\Delta)$ и $\rho_y(k\Delta)$ — нормированные корреляционные функции $x(t)$ и $y(t)$.

Из (4) вытекает формула для случая, когда $\rho_y(k\Delta) = 0$ при $k \neq 0$, т. е. для некоррелированных значений погрешности:

$$\overline{\varepsilon^2} = \sigma_x^2\left[1 - 2\frac{1}{n}\sum_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \rho_x(k\Delta) + \frac{1}{n}\sum_{-(n-1)}^{n-1}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\rho_x(k\Delta)\right] + \frac{\sigma_y^2}{n}. \qquad (5)$$

Соотношения (3)—(5) связывают значение погрешности, число осредняемых отсчетов и статистические характеристики измеряемой величины и погрешности. Их непосредственный анализ затруднителен. Поэтому рассмотрим несколько конкретных примеров. При этом будем исходить из часто встречающейся на практике ситуации, когда значения погрешности допустимо считать некоррелированными.

Пусть, например, $\rho_x(\tau) = \exp[-\alpha|\tau|]$. Этот случай соответствует процессу $x(t)$, не имеющему первой производной. Подстановка $\rho_x(\tau)$ в (5) приводит к выражению

$$\overline{\varepsilon^2} = \sigma_x^2\left[1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n}\frac{q}{1-q}\left(1 - 2q^{\frac{n-1}{2}}\right) - \frac{2}{n^2}\frac{q}{(1-q)^2}(1-q^n)\right] + \frac{\sigma_y^2}{n},$$

где $q = \exp[-\alpha\Delta]$.
При $1 - q \ll 1$ имеем

$$\overline{\varepsilon^2} \cong \sigma_x^2 \frac{n^2-1}{n\cdot 3!}\alpha\Delta + \frac{\sigma_y^2}{n}.$$

Отсюда можно определить число осредняемых отсчетов

$$n_0 = \sqrt{3!\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\frac{1}{\alpha\Delta} - 1}. \tag{6}$$

Из (6) видно, что для того, чтобы число осредняемых отсчетов превышало единицу, необходимо выполнение условия

$$3\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\frac{1}{\alpha\Delta} > 1.$$

Рассмотрим другой пример. Пусть процесс $x(t)$ дважды дифференцируем в среднеквадратичном. Тогда, полагая интервал $\Delta$ много меньшим интервала корреляции $x(t)$, получим из (3) приближенное соотношение

$$\overline{\varepsilon^2} \cong \left(\frac{n^2-1}{4!}\right)^2 \Delta^4 \int S_x(\omega)\,\omega^4 d\omega + \frac{\sigma_y^2}{n} = \sigma_x^2\left(\frac{n^2-1}{4!}\right)^2 \rho^{IV}(0)\,\Delta^4 + \frac{\sigma_y^2}{n}, \tag{7}$$

где

$$\rho^{IV}(0) = \left[\frac{\partial^4\rho(\tau)}{\partial\tau^4}\right]_{\tau=0}.$$

$\sigma_x^2\rho^{IV}(0) = \sigma_{\ddot{x}}^2$, поэтому в первом приближении величина первого слагаемого в (7) определяется дисперсией второй производной процесса $x(t)$, так как при линейном изменении процесса $x(t)$ первое слагаемое равно нулю (см. также [2, 3]).

Из (7) вытекает формула для определения $n_0$:

$$n_0^3(n_0^2 - 1) = \frac{(4!)^2}{4}\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\frac{1}{\rho^{IV}(0)\,\Delta^4}. \tag{8}$$

В заключение отметим, что способ «скользящего среднего» не обеспечивает предельной точности при статистической обработке результатов измерений, так как из физических соображений ясно, что при разумно построенной процедуре обработки добавочная информация (дополнительные отсчеты), по крайней мере, не должна ухудшать результатов предыдущей обработки. Более того, для рассмотренного в [1] случая при надлежащем построении процедуры обработки погрешность может быть отфильтрована с желаемой степенью точности. Действительно, пусть $x(t)$ — синусоида ($\rho_x(\tau) = \cos\omega\tau$). Тогда, взвешивая в (2) суммы симметричных относительно значения $x(t)$ отсчетов коэффициентами $a_k$, получим следующее выражение для среднего квадрата погрешности:

$$\overline{\varepsilon^2} = \sigma_x^2\left(1 - a_0 - 2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} a_k\cos\omega\Delta k\right)^2 + \sigma_y^2\left(a_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} a_k^2\right). \tag{9}$$

Выбирая коэффициенты $a_k$ из условия минимума (9), получим систему уравнений

$$-\sigma_x^2\left[1-a_0-2\sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} a_l\cos\omega\Delta\, l\right]\cos\omega\Delta\, k+\sigma_y^2\, a_k=0,$$

решением которой, в чем нетрудно убедиться, является

$$a_k=\frac{\cos\omega\Delta\, k}{1+\dfrac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}+2\sum\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos^2\omega\Delta\, k}.$$

Подстановка $a_k$ в (9) дает выражение для минимума среднего квадрата погрешности

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{\sigma_y^2}{1+\dfrac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}+2\sum\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos^2\omega\Delta\, k}, \qquad (10)$$

из которого видно, что, увеличивая $n$, средний квадрат погрешности можно сделать меньше любого наперед заданного числа. Таким образом, применение в качестве процедуры обработки результатов измерений метода наименьших квадратов позволяет в рассматриваемом примере отфильтровать погрешность (с нулевым математическим ожиданием) с желаемой степенью точности.

## ЛИТЕРАТУРА


1. П. В. Новицкий. О пределе достижимой точности при автоматической обработке результатов многократных измерений.— Измерительная техника, 1963, № 5.
2. С. М. Персин. Анализ и методы уменьшения погрешностей цифровых измерительных систем.— В сб. «Геофизическое приборостроение», вып. 17. Л., Гостоптехиздат, 1963.
3. С. М. Персин. Методы уменьшения случайных погрешностей измерительных систем посредством осреднения результатов измерений.— В сб. «Геофизическое приборостроение», вып. 17. Л., Гостоптехиздат, 1963.
4. Ю. А. Розанов. Стационарные случайные процессы. М., Физматгиз, 1963.
5. Н. А. Лифшиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. I. М., Изд-во «Советское радио», 1963.



*Поступила в редакцию*
*12 августа 1965 г.*