АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 5 1965

УДК 681.142.1.01

Б. Г. МАТИЕНКО
*(Новосибирск)*

# К СРАВНИТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ СЛОЖНОСТИ ОДНОТАКТНЫХ СХЕМ ДИСКРЕТНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Получены соотношения, позволяющие упростить реализацию логических схем дискретных измерительных устройств.

При проектировании различных дискретных устройств измерительных информационных систем [1] представляет интерес (в дополнение к развитым методам минимизации [2]) использовать количественно обоснованную возможность выбора некоторого функционального полного набора логических элементов (ЛЭ), позволяющего упростить реализацию логических схем по сравнению с использованием для такого же преобразования информации других функционально полных наборов из числа рассматриваемых.

Ниже сравнивается сложность однотактных схем над пятью различными полными базисами $\Omega_i$, где $i=1, 2, ..., 5$. Рассматриваются следующие базисы: $\Omega_1$={И, ИЛИ, НЕ}, $\Omega_2$={ИЛИ — НЕ, НЕ}, $\Omega_3$={И — НЕ, НЕ}, $\Omega_4$={ИЛИ — НЕ, И — НЕ, НЕ}, $\Omega_5$={И, ИЛИ, И — НЕ, ИЛИ — НЕ, НЕ}.

Предполагается, что ЛЭ И, ИЛИ, И — НЕ, ИЛИ — НЕ разрешается использовать на любое число входов. Это означает, что рассматриваемые базисы являются бесконечными.

При этом ЛЭ ИЛИ — НЕ реализуют функцию *стрелка Пирс*

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow \ldots \downarrow x_\mu = \overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_\mu}, \tag{1}$$

а ЛЭ И — НЕ — функцию Шеффера

$$x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_\mu = \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_\mu}. \tag{2}$$

Последние две функции коммутативны относительно своих переменных, но не ассоциативны, и ни одна из них не дистрибутивна как по отношению друг к другу, так и по отношению к конъюнкции и дизъюнкции [3].

Под сложностью однотактной схемы над $\Omega_i$ понимается суммарное число ЛЭ из $\Omega_i$. Обозначим $n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi)$ сложность $(k, 1)$-полюсной сети $(\mu \geqslant k \geqslant 2)$, реализующей функцию алгебры логики $\varphi^{\Psi}(x_1, \ldots, x_k)$, за данную в дизъюнктивной $(\Psi=\vee)$ или конъюнктивной $(\psi=\wedge)$ нормальной форме. Обозначим $w$ число дизъюнктивных (конъюнктивных) членов в формуле $\varphi^{\Psi}(x_1, \ldots, x_k)$, $k_l$ — длину 1-й конъюнкции (дизъюнкции) $(l = 1, 2, \ldots, w)$, а $\theta_l$ — число переменных с отрицанием $(\theta \leqslant \theta_l \leqslant k_l)$.

Согласно [4], сложность реализации функции алгебры логики $\varphi^{\Psi}(x_1, \ldots, x_k)$ в базисах $\Omega_1$—$\Omega_3$ равна:

$$n_{\Omega_1}^{\wedge}(\varphi) \equiv n_{\Omega_1}^{\vee}(\varphi) \equiv n_{\Omega_2}^{\wedge}(\varphi) \equiv n_{\Omega_3}^{\vee} = w + 1 + \sum_{l=1}^{w} \theta_l; \tag{3}$$

$$n_{\Omega_2}(\varphi) \equiv n_{\Omega_3}^{\vee}(\varphi) = w + 2 + \sum_{l=1}^{w} k_l - \theta_l. \tag{4}$$

При реализации конъюнкции $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_{k_l}$ в базисе $\Omega_5$ при $\Theta_l = 1$ будет использован один ЛЭ И и один элемент отрицания НЕ. Начиная с $\Theta_l \geqslant 2$, можно осуществить склеивание всех переменных, входящих в конъюнкцию с отрицанием с помощью функции *стрелка Пирс,* реализуемой вторым ЛЭ, включенным каскадно с И. Например,

$$\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4 \wedge \overline{x}_5 \sim x_2 \wedge x_3 \wedge (x_1 \downarrow x_4 \downarrow x_5). \tag{5}$$

Наконец, если $\Theta_l = k_l$, то, по определению, конъюнкция равна функции *стрелка Пирс,* и поэтому для ее реализации необходим только один ЛЭ ИЛИ — НЕ.

Таким образом, сложность реализации конъюнкции $k$ длины $l$ над $\Omega_5$ (обозначим $n_{\Omega_5}(k)$) равна

$$n_{\Omega_5}(k) = 1 + t_l(\Theta), \tag{6}$$

где

$$t_l(\Theta) = \begin{cases} 0, \text{ если } \Theta_l = 0 \text{ или } \Theta_l = k_l; \\ 1, \text{ если } 1 \leqslant \Theta_l \leqslant k_l - 1. \end{cases} \tag{7}$$

Аналогично сложность реализации дизъюнкции $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_{k_l}$ над базисом $\Omega_5$ (обозначим $n_{\Omega_5}(D)$) равна

$$n_{\Omega_5}(D) \equiv n_{\Omega_5}(k). \tag{8}$$

Это достигается за счет склеивания переменных с отрицаниями при $\Theta_l \geqslant 2$ с помощью операции Шеффера.

Поэтому сложность реализации произвольной функции алгебры логики $\varphi^{\Psi}(x_1, \ldots, x_k)$ с учетом (6) и тождества (8) равна

$$n_{\Omega_5}^{\vee}(\varphi) \equiv n_{\Omega_5}^{\wedge}(\varphi) = 1 + \sum_{l=1}^{w} [1 + t_l(\Theta)],$$

т. е.

$$n_{\Omega_5}^{\Psi}(\varphi) = w + 1 + \sum_{l=1}^{w} t_l(\Theta), \quad \Psi \in \{\vee, \wedge\}. \tag{9}$$

Для $n_{\Omega_4}(k)$ и $n_{\Omega_4}(D)$ в отличие от предыдущего случая требуется учесть дополнительно еще один инвертор, так как при реализации конъюнкций и дизъюнкций используются только ЛЭ И—НЕ и ИЛИ—НЕ. Тогда

$$n_{\Omega_1}(k) \equiv n_{\Omega_4}(D) = 2 + t_l(\Theta). \qquad (10)$$

При реализации внешних $w$-местных дизъюнкций ($\Psi = \vee$) или конъюнкций ($\Psi = \wedge$) $\Theta_l = 0$ и $n_{\Omega_4}(k) \equiv n_{\Omega_4}(D) = 2$.

Поэтому

$$n_{\Omega_1}^{\Psi}(\varphi) = 2(w+1) + \sum_{l=1}^{w} t_l(\Theta), \quad \Psi \in \{\vee, \wedge\}. \qquad (11)$$

Для целей сравнения достаточно на множестве значений $k_l$, $\Theta_l$, W для любых пар $n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi)$, $n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi)$ $(i \neq j$ и $i, j \in \{1, 2, \ldots, 5\})$ определить соответствующие усеченные разности:

$$\delta_{\Omega_i\Omega_j}^{\Psi} = n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi) \dot{-} n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi) = \\ = \begin{cases} n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi) - n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi), & \text{если } n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi) \geqslant n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi); \\ 0, & \text{если } n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi) < n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi); \end{cases} \qquad (12)$$

$$\delta_{\Omega_j\Omega_i}^{\Psi} = n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi) \dot{-} n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi) = \\ = \begin{cases} n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi) - n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi), & \text{если } n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi) \geqslant n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi); \\ 0, & \text{если } n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi) < n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi), \end{cases} \qquad (13)$$

где для всех нетождественных $n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi) \not\equiv n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi)$ существуют $\delta_{\Omega_i\Omega_j}^{\Psi} > 0$, $\delta_{\Omega_j\Omega_i}^{\Psi} > 0$ для обеих разностей или только для одной при тождественно равной нулю другой в силу того, что, по определению,

$$|n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi) - n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi)| = \delta_{\Omega_i\Omega_j}^{\Psi} + \delta_{\Omega_i\Omega_j}^{\Psi}. \qquad (14)$$

После подстановки (3), (4), (9) и (11) в (12) и (13), учитывая, что всегда $k_l \geqslant \Theta_l$, $\Theta_l \geqslant t_l(\Theta)$, получим:

$$\delta_{\Omega_5\Omega_1}^{\Psi} \equiv 0; \quad \delta_{\Omega_5\Omega_4}^{\Psi} \equiv 0; \quad \delta_{\Omega_5\Omega_2}^{\Psi} \equiv 0;$$

и всегда

$$\delta_{\Omega_1\Omega_5}^{\Psi} \geqslant 0; \quad \delta_{\Omega_4\Omega_5}^{\Psi} \geqslant 0; \quad \delta_{\Omega_2\Omega_5}^{\Psi} \geqslant 0.$$

Существование же

$$\delta_{\Omega_1\Omega_2}^{\vee} > 0, \quad \delta_{\Omega_2\Omega_1}^{\vee} > 0; \quad \delta_{\Omega_1\Omega_4}^{\Psi} > 0,$$

$$\delta_{\Omega_4\Omega_1}^{\Psi} > 0; \quad \delta_{\Omega_2\Omega_4}^{\vee} > 0, \quad \delta_{\Omega_4\Omega_2}^{\vee} > 0$$

показывает, что для последних можно указать такие вхождения $k_l$, $\Theta_l$ в $\varphi^{\Psi}(x_1, \ldots, x_k)$, при которых $\delta_{\Omega_i\Omega_j}^{\Psi} > 0$, а $\delta_{\Omega_j\Omega_i}^{\Psi} = 0$ (и наоборот — $\delta_{\Omega_j\Omega_i}^{\Psi} > 0$, $\delta_{\Omega_i\Omega_j}^{\Psi} = 0$).

В работах [5, 6] утверждается, что любая логическая сеть над базисами $\Omega_2$, $\Omega_3$ всегда будет содержать не больше ЛЭ, чем при использовании для такого же преобразования информации элементов из $\Omega_1$. Здесь же имеют место

$$n_{\Omega_1}^{\vee}(\varphi) \equiv n_{\Omega_3}^{\vee}(\varphi), \quad n_{\Omega_1}^{\wedge}(\varphi) \equiv n_{\Omega_2}^{\wedge}(\varphi)$$

и существуют

$$\delta_{\Omega_1 \Omega_2}^{\vee} > 0 \quad (\delta_{\Omega_3 \Omega_4}^{\wedge} > 0).$$

В каждом конкретном случае формулы алгебры логики $\varphi^{\Psi}(x_1, \ldots, x_k)$ $(\varphi \in \{\vee, \wedge\})$, содержащей в точности $w^*$ конъюнкций (дизъюнкций), после подстановки $k_l$, $\Theta_l$ $(l=1, 2, \ldots, w^*)$ в функции $n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi) = f(k_l, \Theta_l, w)$ (вида (3), (4), (9) или (11)) получим последовательно для $i=1, 2, \ldots, 5$ ряд чисел, таких, что в общем случае

$$n_{\Omega_1}^{\Psi}(\varphi) \neq n_{\Omega_2}^{\Psi}(\varphi) \neq \ldots \neq n_{\Omega_5}^{\Psi}(\varphi). \tag{15}$$

Наименьшее из чисел в (15) укажет базис, позволяющий построить схему, менее сложную, по сравнению с остальными.

В частном случае может оказаться, что для некоторой пары базисов $\Omega_i$, $\Omega_j$ сложность сетей одинакова, т. е.

$$n_{\Omega_i}^{\Psi}(\varphi) = n_{\Omega_j}^{\Psi}(\varphi).$$

Тогда безразлично, какой из двух базисов использовать при реализации $\Omega_i$ или $\Omega_j$, и в силу могут вступать другие требования. (Например, может требоваться, чтобы ЛЭ были однотипными; в последнем случае преимущество всегда на стороне ЛЭ И—НЕ и ИЛИ—НЕ).

Сказанное выше можно проиллюстрировать следующими примерами. Для четырехразрядного кода с весами 5, 1, 2, 1 (обозначим разряды переменными $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$) в случае следящего уравновешивания наборы 0100, 0101, 0110 и 1001, 1010, 1011 при преобразовании двоичного счета в двоично-десятичный являются запрещенными. Соответствующие переключательные схемы будут описываться следующими истинностными операторами:

$$\varphi_1^{\vee}(x_1, \ldots, x_4) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4; \tag{16}$$

$$\varphi_2^{\vee}(x_1, \ldots, x_4) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4. \tag{17}$$

Переходя в (16) и (17) к сокращенным дизъюнктивным нормальным формам [2], получим:

$$\varphi_1^{\vee}(x_1, \ldots, x_4) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4; \tag{18}$$

$$\varphi_2^{\vee}(x_1, \ldots, x_4) = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4. \tag{19}$$

Используя для (18) и (19) формулы (3) и (4), легко обосновать в первом случае выбор базиса $\Omega_2$ (ЛЭ ИЛИ—НЕ, НЕ):

$$\varphi_1^{\vee}(x_1, \ldots, x_4) \sim \overline{(x_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow x_3) \downarrow (x_1 \downarrow \bar{x}_2 \downarrow x_4)}, \tag{20}$$

так как

$$n_{\Omega_1}^{\vee}(\varphi) \equiv n_{\Omega_3}^{\vee}(\varphi) = 7, \quad n_{\Omega_2}^{\vee}(\varphi) = 6,$$

а во втором случае — выбор базиса $\Omega_3$ (или $\Omega_1$):

$$\varphi_2^{\vee}(x_1, \ldots, x_4) \sim (x_1 \mid \bar{x}_2 \mid x_3) \mid (x_1 \mid \bar{x}_2 \mid x_4), \tag{21}$$

так как

$$n_{\Omega_1}^{\vee}(\varphi) \equiv n_{\Omega_3}^{\vee}(\varphi) = 5, \; n_{\Omega_2}^{\vee}(\varphi) = 8.$$

Для сравнения с (20) и (21) реализация (18) и (19) в базисе $\Omega_5$ оценивается в обоих случаях пятью ЛЭ (19). Например,

$$\varphi_1^{\vee}(x_1, \ldots, x_4) \sim x_2(x_1 \downarrow x_3) \vee x_2(x_1 \downarrow x_4). \tag{22}$$

Применение же набора ЛЭ И — НЕ в сочетании с ЛЭ ИЛИ — НЕ оказывается нецелесообразным в обоих случаях, так как $n_{\Omega_4}^{\vee}(\varphi) = 8$.

В частном случае формул (18), (19) за скобки выносятся $\bar{x}_1 x_2$ и $x_1 \bar{x}_2$ и для схем требуется всего по три ЛЭ:

$$\varphi_1^{\vee}(x_1, \ldots, x_4) \sim \bar{x}_1 x_2 (x_3 \mid x_4); \tag{23}$$

$$\varphi_2(x_1, \ldots, x_4) \sim x_1 \bar{x}_2 (x_3 \vee x_4). \tag{24}$$

При этом в (23) склеивание отрицаний выполняется с помощью функции Шеффера, реализуемой одним ЛЭ И — НЕ.

## ВЫВОДЫ

Приведены соотношения, позволяющие при одних и тех же требованиях к преобразованию информации сравнивать сложность реализации однотактных $(k, 1)$-полюсных переключательных схем над следующими пятью полными базисами: И, ИЛИ, НЕ; ИЛИ — НЕ, НЕ; И — НЕ, НЕ; ИЛИ — НЕ, И — НЕ; И, ИЛИ, И — НЕ, ИЛИ — НЕ, НЕ. Требования к преобразованию информации считались заданными в виде формул алгебры логики в дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной форме, причем рассматриваемые выше оценки сложности пригодны как для минимизированных, так и для неминимизированных формул алгебры логики.

Эффективным оказалось сочетание ЛЭ И с ИЛИ — НЕ, а также ИЛИ с И — НЕ, выражающееся в том, что при реализации конъюнкций (дизъюнкций) все требуемые инверторы склеиваются с помощью одной логической операции, выполняемой вторым, каскадно включенным с И (с ИЛИ) логическим элементом ИЛИ — НЕ (И — НЕ). Такую схему целесообразно использовать, если необходимо проинвертировать только две переменные из трех. При увеличении числа переменных каждая конъюнкция (дизъюнкция) по-прежнему может быть реализована двумя ЛЭ.

В ряде случаев (при $k>3$) эффективным может оказаться и сочетание ЛЭ И — НЕ с ИЛИ — НЕ. При этом число типов элементов уменьшается до двух, но в сравнении с предыдущим случаем сложность возрастает на константу $w+1$.

Все приведенные рассуждения при необходимости могут быть применены к произвольному списку полных базисов.

Сказанное выше имеет большое значение для упрощения переключательных схем дискретных измерительных и управляющих устройств с жесткой и переменной структурой, так как позволяет на этапе проектирования количественно обосновать тот или иной вариант реализации.

## ЛИТЕРАТУРА


1. К. Б. Карандеев. Измерительные информационные системы и автоматика.— Вестник АН СССР, 1961, № 10.
2. Е. Н. Вавилов, Г. П. Портной. Синтез схем электронных цифровых машин. М., изд-во «Советское радио», 1963.
3. Н. Р. Скотт. Техника аналоговых и цифровых вычислительных машин. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. Б. Г. Матиенко. К возможности уменьшения числа логических элементов за счет комбинирования полных систем функций алгебры логики.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, серия техн. наук, 1964, вып. 3, № 10.
5. P. Kellet. The Elliot Sheffer Stroke Static Switching Systems.— Electronic Engineering, 1960, v. 32, № 391.
6. W. D. Rowe. The Transistor NDR Circuit.— IRE WESCON Convention Record, 1957, Part 4. Automatic Control and Electronic Computers.



*Поступила в редакцию*
*12 апреля 1965 г.,*
*после переработки —*
*28 июня 1965 г.*