А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 5 1965

УДК 681.2.08

В. М. ЕФИМОВ
(Новосибирск)

О КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТНОСТИ

Получены расчетные соотношения для определения корреляционной функции погрешности дискретности, требующие в качестве априорных данных лишь двух статистических характеристик приращения (производной) стационарного квантуемого процесса. Найдена оценка снизу для корреляционной функции погрешности дискретности.

Одной из специфических погрешностей измерения является погрешность дискретности — шум квантования по уровню. Знание статистических характеристик этой погрешности необходимо для решения ряда задач, в том числе, например, при определении интервала времени между измерениями или в случае обработки результатов измерений. Если при этом в качестве критерия точности используется средний квадрат погрешности, то одной из необходимых для расчетов характеристик является корреляционная функция погрешности дискретности. В [1, 2] приведена формула для корреляционной функции шума квантования, когда изменяющаяся во времени квантуемая величина является стационарным случайным процессом с нормальным распределением

$$R_{\xi}^{*}(\tau)=\frac{\Delta^2}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left[-4\pi^2 n^2(1-\rho(\tau))\frac{\sigma^2}{\Delta^2}\right], \qquad (1)$$

где Δ — интервал дискретности;

$\rho(\tau)$ — нормированная корреляционная функция квантуемого процесса x;

σ^2 — дисперсия квантуемого процесса.

Однако эта формула довольно громоздка и неудобна при расчетах. Кроме того, как отмечалось выше, она справедлива лишь для нормального процесса. Ниже будет выведено соотношение для корреляционной функции погрешности дискретности, свободное от указанных недостатков.

Шум квантования по уровню равен разнице между величинами на выходе и входе квантующего устройства и функционально связан с квантуемым процессом (см. на рисунке, *а*). Поэтому его корреляционная функция может быть определена из соотношения

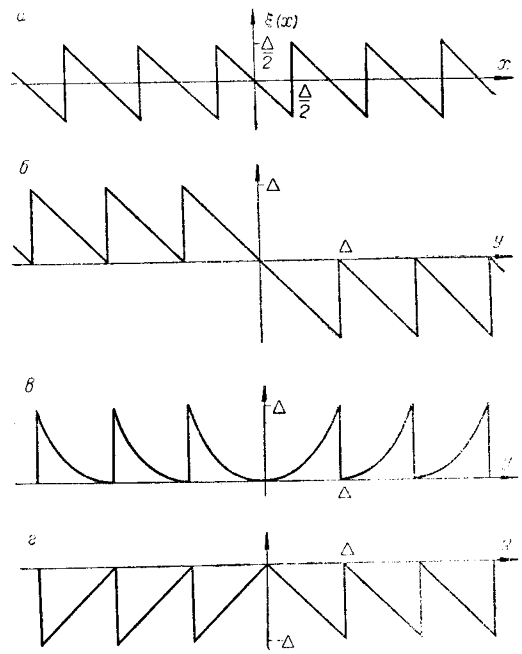
$$R_\xi(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{i\Delta-\frac{\Delta}{2}}^{i\Delta+\frac{\Delta}{2}} dx \int\limits_{j\Delta-\frac{\Delta}{2}}^{j\Delta+\frac{\Delta}{2}} f(x, x_\tau)\,(i\Delta - x)\,(j\Delta - x_\tau)\,dx_\tau, \quad (2)$$

где $f(x, x_\tau)$ — двумерная плотность вероятности значений квантуемого процесса x и x_τ, взятых в моменты времени t и $t+\tau$.

Для упрощения вычислений в (2) произведем замену переменной:

$$x_\tau = x + y,$$

где y — приращение квантуемого процесса на отрезке времени τ.



Тогда (2) можно записать следующим образом:

$$R_\xi(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{i\Delta-\frac{\Delta}{2}}^{i\Delta+\frac{\Delta}{2}} dx \int\limits_{j\Delta-\frac{\Delta}{2}-x}^{j\Delta+\frac{\Delta}{2}-x} f(x, y)\,(i\Delta - x)\,(j\Delta - x - y)\,dy.$$

Вычислим интеграл по полосе

$$i\Delta - \frac{\Delta}{2} \leqslant x \leqslant i\Delta + \frac{\Delta}{2}.$$

Для этого произведем замену $j = i \pm k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и выполним интегрирование по областям

$$k\Delta \leqslant y \leqslant (k+1)\Delta,$$

$$R_{\xi, i}(\tau) = \sum_{k=\infty}^{0} \int\limits_{-(k+1)\Delta}^{-k\Delta} dy \Bigg[\int\limits_{i\Delta - \frac{\Delta}{2}}^{i\Delta - k\Delta - y - \frac{\Delta}{2}} f(x, y)(i\Delta - x)(i\Delta - x -$$

$$-(k+1)\Delta - y)\,dx + \int\limits_{i\Delta - k\Delta - y - \frac{\Delta}{2}}^{i\Delta + \frac{\Delta}{2}} f(x, y)(i\Delta - x)(i\Delta - x -$$

$$-k\Delta - y)\,dx \Bigg] + \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} dy \Bigg[\int\limits_{i\Delta - \frac{\Delta}{2}}^{i\Delta + k\Delta - y + \frac{\Delta}{2}} f(x, y)(i\Delta - x)(i\Delta - x +$$

$$+k\Delta - y)\,dx + \int\limits_{i\Delta + k\Delta - y + \frac{\Delta}{2}}^{i\Delta + \frac{\Delta}{2}} f(x, y)(i\Delta - x)(i\Delta - x +$$

$$+(k+1)\Delta - y)\,dx \Bigg].$$

Выполняя далее очевидные преобразования, получим

$$R_{\xi, i}(\tau) = \int\limits_{i\Delta - \frac{\Delta}{2}}^{i\Delta + \frac{\Delta}{2}} f(x)(i\Delta - x)^2\,dx + \int\limits_{i\Delta - \frac{\Delta}{2}}^{i\Delta + \frac{\Delta}{2}} f(x)(i\Delta - x)\,dx \times$$

$$\times \Bigg[\sum_{k=\infty}^{0} \int\limits_{-(k+1)\Delta}^{-k\Delta} f(y/x)(-k\Delta - y)\,dy + \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} f(y/x)(k\Delta - y)\,dy \Bigg] -$$

$$-\Delta \sum_{k=\infty}^{0} \int\limits_{-(k+1)\Delta}^{-k\Delta} dy \int\limits_{i\Delta - \frac{\Delta}{2}}^{i\Delta - k\Delta - y - \frac{\Delta}{2}} f(x, y)(i\Delta - x)\,dx +$$

$$+\Delta \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} dy \int\limits_{i\Delta + k\Delta - y + \frac{\Delta}{2}}^{i\Delta + \frac{\Delta}{2}} f(x, y)(i\Delta - x)\,dx. \qquad (3)$$

Суммируя первый интеграл в (3) по i, найдем средний квадрат погрешности дискретности

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \int\limits_{i\Delta - \frac{\Delta}{2}}^{i\Delta + \frac{\Delta}{2}} f(x)(i\Delta - x)^2\,dx = \overline{\xi^2}. \qquad (4)$$

Выражение в (3), стоящее в квадратных скобках, представляет собой математическое ожидание функции, показанной на рис. 1, *б*. Здесь и далее будем полагать величину τ такой, чтобы плотность вероятности приращения можно было считать сосредоточенной в двух центральных интервалах дискретности. Это ограничение несущественно, так как корреляционная функция $R_{\xi}(\tau)$, как правило, убывает очень быстро. Тогда суммируя второй интеграл по i, получим

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \int\limits_{i\Delta-\frac{\Delta}{2}}^{i\Delta+\frac{\Delta}{2}} f(x)(i\Delta - x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y/x)(-y)\,dy = -\overline{\xi y}, \tag{5}$$

где $\overline{\xi y}$ — взаимная корреляционная функция погрешности дискретности и приращения.

Рассмотрим два последних интеграла в (3). Обычно при измерении величина интервала дискретности достаточно мала $\left(\frac{\Delta}{\sigma} \ll 1\right)$, и поэтому плотность вероятности $f(x)$ практически равномерна в его пределах. В силу того же условия допустимо считать, что

$$f\left(y/x = i\Delta - \frac{\Delta}{2}\right) \cong f(y/x = i\Delta) \cong f\left(y/x = i\Delta + \frac{\Delta}{2}\right).$$

На основании сказанного выше упомянутые интегралы могут быть преобразованы следующим образом:

$$-\sum_{k=\infty}^{0} \Delta f(i\Delta) \int\limits_{-(k+1)\Delta}^{-k\Delta} f(y/x = i\Delta)\,dy \int\limits_{i\Delta-\frac{\Delta}{2}}^{i\Delta-k\Delta-y-\frac{\Delta}{2}} (i\Delta - x)\,dx +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(i\Delta) \int\limits_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} f(y/x = i\Delta)\,dy \int\limits_{i\Delta+k\Delta-y+\frac{\Delta}{2}}^{i\Delta+\frac{\Delta}{2}} (i\Delta - x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta f(i\Delta)\left[\sum_{k=\infty}^{0} \int\limits_{-(k+1)\Delta}^{-k\Delta} f(y/x = i\Delta)(k\Delta + y)^2\,dy +\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} f(y/x = i\Delta)(y - k\Delta)^2\,dy + \Delta\sum_{k=\infty}^{0} \int\limits_{-(k+1)\Delta}^{-k\Delta} f(y/x = i\Delta) \times$$

$$\left.\times (k\Delta + y)\,dy + \Delta\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} f(y/x = i\Delta)(k\Delta - y)\,dy\right]. \tag{6}$$

Два первых слагаемых в (6) представляют собой математическое ожидание функции, показанной на рисунке, *в*. Выполняя суммирование по i и учитывая, что по предположению плотность вероятности приращения сосредоточена в двух центральных интервалах дискретности, получим, что эти слагаемые равны

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\Delta f(i\Delta)\int_{-\infty}^{\infty} f(y/x=i\Delta)\, y^2\, dy \cong$$

$$\cong\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, y^2\, dy = \frac{1}{2}\overline{y^2}, \tag{7}$$

где $\overline{y^2}$ — дисперсия приращения.

По аналогии для двух последних сумм интегралов можно записать (см. рисунок, *г*).

$$-\frac{1}{2}\Delta\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Delta f(i\Delta)\int_{-\infty}^{\infty} f(y/x=i\Delta)\,|y|\,dy \cong -$$

$$-\frac{1}{2}\Delta\int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,|y|\,dy = -\frac{1}{2}\Delta\,\overline{|y|}, \tag{8}$$

где $\overline{|y|}$ — первый абсолютный момент приращения.

Теперь, исходя из (4), (5), (7) и (8), получим формулу для корреляционной функции шума квантования по уровню

$$R_\xi(\tau) \cong \overline{\xi^2} - \overline{\xi\, y} - \frac{1}{2}\Delta\,\overline{|y|} + \frac{1}{2}\overline{y^2}. \tag{9}$$

В (9) входят средний квадрат погрешности дискретности, взаимная корреляционная функция погрешности дискретности и приращения, первый абсолютный момент приращения и его дисперсия. Последние три величины являются функциями времени, и, следовательно, для вычисления $R_\xi(\tau)$ этими зависимостями необходимо располагать. Они могут быть получены путем соответствующей обработки записей реализаций квантуемого процесса.

Большинство реальных процессов являются «гладкими» (дифференцируемыми в среднеквадратичном). Для дифференцируемых квантуемых процессов, используя соотношение $y \cong \dot{x}\,\tau$ и учитывая, что $\overline{\xi^2} \cong \frac{\Delta^2}{12}$, формулу (9) можно записать следующим образом:

$$R_\xi(\tau) = \frac{\Delta^2}{12} - \frac{1}{2}\Delta\,\overline{|\dot{x}|}\,|\tau| + \frac{1}{2}\overline{\dot{x}^2}\,\tau^2, \tag{10}$$

где $\overline{|\dot{x}|}$ и $\overline{\dot{x}^2}$ — первый абсолютный момент и дисперсия производной квантуемого процесса.

В выражении (10) член $-\tau\overline{\xi\dot{x}}$ опущен по следующим соображениям. Замена y на $\dot{x}\tau$ в (5) приводит к выражению

$$-\tau\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int_{i\Delta-\frac{\Delta}{2}}^{i\Delta+\frac{\Delta}{2}} f(x)\,(i\Delta - x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty} f(\dot{x}/x)\,\dot{x}\,dx = -\tau\overline{\xi\dot{x}}.$$

Далее, известны следующие формулы для среднего числа пересечений в единицу времени случайным процессом некоторого уровня b: снизу вверх

$$N_{1b} = \int_0^{\infty} f(x = b, \dot{x})\, \dot{x}\, d\dot{x}$$

и сверху вниз

$$N_{2b} = \int_{-\infty}^{0} f(x = b, \dot{x})\, |\dot{x}|\, d\dot{x}.$$

В силу стационарности процесса $N_{1b} = N_{2b}$. Из этого равенства после простых преобразований вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\dot{x}/x = b)\, \dot{x}\, d\dot{x} = 0,$$

т. е. условное математическое ожидание производной равно нулю. Следовательно, $\overline{\xi\dot{x}}=0$. Так как при малых τ равенство $y \cong \dot{x}\tau$ выполняется достаточно точно, то для дифференцируемых процессов в формуле (9) член $\overline{\xi y}$ тоже можно не учитывать.

Отметим, что одним из возможных путей экспериментального определения первого абсолютного момента производной является определение среднего числа $\bar{n}$ пересечений в единицу времени достаточно большого числа фиксированных уровней. В [3] показано, что величина $\bar{n}$ и первый абсолютный момент производной связаны соотношением

$$\overline{|\dot{x}|} = \bar{n}\varepsilon,$$

где ε — расстояние между уровнями.

Дисперсия первой производной определяется формулой

$$\overline{\dot{x}^2} = -\sigma^2 \left[\frac{d^2\rho(\tau)}{d\tau^2}\right]_{\tau=0} = \sigma^2\rho''(0).$$

Рассмотрим свойства корреляционной функции шума квантования. Из (10) следует, что $R_\xi(\tau)$ имеет минимум при $\tau = \dfrac{\Delta\,\overline{|\dot{x}|}}{2\,\overline{\dot{x}^2}}$. Значение ее в точке минимума равно

$$R_{\xi\,\min} = \frac{\Delta^2}{12}\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{\overline{|\dot{x}|}^2}{\overline{\dot{x}^2}}\right).$$

Если $\beta = \dfrac{\overline{|\dot{x}|}^2}{\overline{\dot{x}^2}} < \dfrac{2}{3}$, то $R_\xi(\tau)$ не имеет отрицательного выброса. При этом формулу (10) естественно использовать только на участке $0 \leqslant \tau \leqslant$ $\leqslant \dfrac{\overline{|\dot{x}|}\,\Delta}{2\,\overline{\dot{x}^2}}$. Если $\beta > \dfrac{2}{3}$, то $R_\xi(\tau)$ имеет отрицательный выброс, значение которого растет по мере увеличения β. Максимальная величина этого выброса может быть определена на основании неравенства Буняковского — Шварца. Действительно,

$$\int f(z)\,|z|\,dz = \int \left[\sqrt{f(z)}\,|z|\right]\left[\sqrt{f(z)}\right] dz \leqslant \left[\int f(z)\, z^2\, dz\right]^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left[\int f(z)\, dz\right]^{\frac{1}{2}},$$

т. е. квадрат первого абсолютного момента случайной величины не превышает её среднего квадрата. Следовательно, $\overline{|\dot{x}|} \leqslant \sqrt{\overline{\dot{x}^2}}$ и максимальное значение β равно единице. При этом $\rho_{\xi\,\min} = -0{,}5$. Из сказанного вытекает, что для любого дифференцируемого квантуемого процесса корреляционная функция $R_\xi(\tau)$ лежит выше кривой

$$R_{\xi\,\min}(\tau) = \frac{\Delta^2}{12} - \frac{1}{2}\Delta\sqrt{\overline{\dot{x}^2}}\,|\tau| + \frac{1}{2}\overline{\dot{x}^2}\,\tau^2 =$$
$$= \frac{\Delta^2}{12} - \frac{1}{2}\Delta\sigma\sqrt{\rho''(0)}\,|\tau| + \frac{1}{2}\sigma^2\rho''(0)\,\tau^2.$$

Корреляционная функция $R_\xi(\tau)$ не может убывать быстрее, чем $R_{\xi\,\min}(\tau)$.
Отсюда следует, что время корреляции шума квантования $\tau_{\xi\,\text{кор}} \geqslant$
$\geqslant \dfrac{\Delta}{\sigma\sqrt{\rho''(0)}}\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$ (точка первого пересечения $R_{\xi\,\min}(\tau)$ с осью абсцисс).

При наличии отрицательного выброса у $R_\xi(\tau)$ формулу (10) допустимо использовать только на участке от нуля до второго пересечения $R_\xi(\tau)$ с осью абсцисс, т. е. при

$$0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\Delta\overline{|\dot{x}|}}{2\overline{\dot{x}^2}}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3}\,\frac{\overline{\dot{x}^2}}{\overline{|\dot{x}|}^2}}\,\right].$$

При выводе формулы (9) был сделан ряд допущений, поэтому естественно оценить ее точность. Произведем сопоставление (9) и (1), т. е. рассмотрим случай, когда квантуемый процесс распределен нормально. В данном случае первый абсолютный момент и дисперсию приращения, входящие в (9), можно определить, исходя из выражения для безусловной плотности вероятности приращения

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2}\,\sigma\sqrt{1-\rho(\tau)}} \exp - \frac{y^2}{2\cdot 2\sigma^2(1-\rho(\tau))}. \qquad (11)$$

Из (11) вытекает, что

$$\overline{|y|} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sigma\sqrt{1-\rho(\tau)}; \quad \overline{y^2} = 2\sigma^2(1-\rho(\tau)).$$

Величину $\overline{\xi y}$ определим, исходя из выражения условной плотности вероятности приращения

$$f(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \exp - \frac{(y + (1-\rho(\tau))\,x)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2(\tau))}. \qquad (12)$$

Так как внутренний интеграл в (5) представляет собой условное математическое ожидание приращения, то на основании (12) и (5) получим, что

$$-\overline{\xi y} = (1 - \rho(\tau))\ \overline{\xi x}.$$

Из [1, 2] известно, что для нормального процесса при $\frac{\Delta}{\sigma} < 1$ величина $\overline{\xi x}$ практически равна нулю. Поэтому членом $\overline{\xi x}$ в (9) можно пренебречь. Тогда окончательно найдем выражение для корреляционной функции погрешности дискретности для случая, когда квантуется стационарный нормальный случайный процесс:

$$R_\xi^0(\tau) \cong \frac{\Delta^2}{12} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\sigma\Delta\sqrt{1-\rho(\tau)} + \sigma^2(1-\rho(\tau)). \qquad (13)$$

В таблице приведены расчетные данные, на основании которых можно судить о высокой точности формулы (13) в случае нормального процесса на входе квантующего устройства. Формулой (13) допустимо пользоваться для моментов времени, меньших τ_0, которое определяется выражением

$$\sqrt{1-\rho(\tau_0)} \leqslant \frac{\Delta}{\sigma}\,\frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

т. е. до точки минимума.

$\frac{\sigma}{\Delta}\sqrt{(1-\rho(\tau))}$	0	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24
ρ_ξ^*	1	0,7467	0,5351	0,3603	0,2239	0,1256	0,0625
$\rho_\xi^0 - \rho_\xi^*$	0	0,0017	0,0001	0,0001	0,0001	0,0004	0,0038

Для дифференцируемого в среднеквадратичном процесса, разлагая в (13) $\rho(\tau)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь двумя членами разложения, получим

$$R_\xi^0(\tau) \cong \frac{\Delta^2}{12} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma\Delta\sqrt{\rho''(0)}\,|\tau| + \frac{1}{2}\,\sigma^2\rho''(0)\,\tau^2. \qquad (14)$$

Формула (14) эквивалентна формуле (10) для случая нормального процесса.

В заключение подчеркнем, что для определения значений корреляционной функции погрешности дискретности по полученным соотношениям необходимо располагать в качестве априорных данных лишь двумя статистическими характеристиками приращения (производной) квантуемого процесса — первым абсолютным моментом и дисперсией.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Косякин. Статистическая теория квантования по уровню.— Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 6.
2. А. В. Балтрушевич, А. А. Косякин, Г. К. Круг. Динамика цифровых автоматических систем.— Труды МЭИ, вып. XIV, Автоматика и телемеханика. М., 1962.
3. В. М. Ефимов. Сравнительная оценка двух способов квантования измеряемой величины во времени.— Изв. Сиб. отд. СО АН СССР, серия техн. наук, 1965, вып. 2, № 6

Поступила в редакцию
12 июля 1965 г.