АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1965

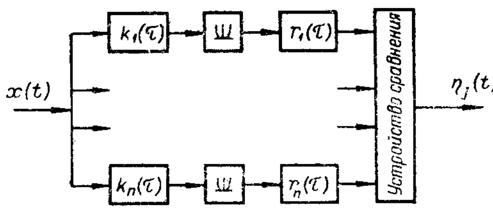
УДК 621.391

Б. Д. БОРИСОВ, А. Г. СЕНИН
(Новосибирск)

О СИНТЕЗЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Предложен способ синтеза аналоговой измерительной системы для классификации случайных процессов, каждый канал которой состоит из двух линейных фильтров и квадратичного детектора. Измеряя и преобразовывая входное воздействие, такая система по принятой реализации оценивает корреляционную функцию и сравнивает с априори известной корреляционной функцией классифицируемого процесса. Решение выносится в пользу того процесса, корреляционная функция которого лучше всего аппроксимируется полученной оценкой.

Одной из важных для практического приложения задач теории случайных функций является задача классификации случайных процессов, которая может быть сформулирована следующим образом. На интервале времени $[0 - T]$ наблюдается сигнал, являющийся реализацией одного из n случайных процессов $\eta_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Требуется на основании принятой реализации $x(t)$ вынести решение о характере самого процесса. Такая задача возникает, например, в медицинской и технической диагностике, при обнаружении случайного сигнала на фоне шума, автоматическом распознавании речевых сигналов. Разрешение подобной задачи основывается на измерении некоторых параметров сигнала (признаков), вычислении и сравнении апостериорных вероятностей каждого из возможных событий. Принимается решение в пользу того процесса, апостериорная вероятность которого больше. Такое разрешение гипотезы является оптимальным и гарантирует минимальное число ошибок при классификации. Однако для его реализации требуется максимальная априорная информация — многомерная функция плотности вероятности, оценка которой в общем случае сопряжена с большими трудностями измерительного и вычислительного характера. Лишь для нормальных процессов эти задачи могут быть решены по оптимальным алгоритмам [1]. Но такие алгоритмы сложны и требуют использования быстродействующих вычислительных машин, что не всегда оказывается возможным. Поэтому несомненный интерес представляет такое решение задачи синтеза, которое не требует знания законов распределения классифицируемых процессов, а практическое выполнение системы не вызывает затруднений. В [2] указана возможность синтеза информационной системы с помощью двух линейных фильтров и квадратичного детектора, однако выбор характеристик фильтров остается неясным: импульсные функции этих фильтров определяются из нелинейного интегрального уравнения, решение которого может не существовать. В [3] дан метод расчета такой системы для обнаружения случайного стационарного сигнала на фоне шума и показано, что при некоторых дополнительных условиях она реализует алгоритм обработки, близкий к оптимальному. Однако в обоих случаях классы различаемых процессов ограничены нормальным распределением, а ситуация наиболее простая: необходимо разрешить двухальтернативную гипотезу. Остается открытым вопрос об использовании подобной схемы для сигналов с произвольным законом распределения и при более сложном многоальтернативном разрешении. В данной работе предложено иное решение задачи синтеза, благодаря чему для определения импульсных функций линейных фильтров достаточно знать корреляционные функции процессов. Многоальтернативность в разрешении гипотез не вносит при этом принципиальных трудностей.



Предположим, что количество параллельных каналов в измерительной системе определяется числом классифицируемых процессов. Сравнивая в некоторый фиксированный момент времени $t=T$ выходные величины этих каналов $y_j\ (T)$, можно опознавать принятую реализацию (см. рисунок). Если априорные вероятности неодинаковы, то выходные величины фильтров должны сравниваться с учетом этой дополнительной информации.

Оптимальные импульсные функции линейных фильтров $k_j(\tau)$ и $r_j(\tau)$ желательно было бы определять по критерию минимума вероятности ошибочного решения, однако такая задача требует априорного знания многомерной плотности распределения входных сигналов. В рассматриваемом случае такая статистика предполагается неизвестной. Поэтому необходимо искать иной критерий, по которому возможно оптимизировать искомые функции. Таким критерием может быть максимум математического ожидания случайной величины $y_j\ (T)$ на выходе канала:

$$\overline{y_j(T)} = \int_0^T r_j(\tau)\,d\tau \int_0^{T-\tau}\int_0^{T-\tau} k_j(T-\tau-\theta)\,k_j(T-\tau-\mu)\times$$

$$\times\,\overline{\eta_j(\theta)\,\eta_j(\mu)}\,d\theta\,d\mu = \int_0^T r_j(\tau)\,d\tau \int_0^{T-\tau}\int_0^{-\tau} k_j(T-\tau-\theta)\times$$

$$\times\,k_j(T-\tau-\mu)\,R_j(\theta,\mu)\,d\theta\,d\mu. \qquad (1)$$

Как видно, для оптимизации искомых функций по этому критерию достаточно знания лишь корреляционной функции. Импульсные функции каналов должны нормироваться так, чтобы результат измерения определялся характером реализации.

Условие нормировки импульсных функций представим в виде

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T k_j^2(\tau)\,d\tau = \text{const}; \\ &\int_0^T r_j^2(\tau)\,d\tau = \text{const}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эти ограничения исключают δ-функции и их производные, что упрощает задачу синтеза системы. Итак, поиск оптимальных импульсных функций следует осуществлять, максимизируя функционал математического ожидания (1) при условии (2). Решение задачи сводится к использованию стандартных приемов вариационного исчисления: функции $k_j(\tau)$ $r_j(\tau)$ должны обеспечивать экстремум функционала

$$\gamma_j = \int_0^T d\tau \int_0^{T-\tau}\int_0^{T-\tau} r_j(\tau)\, k_j(T-\tau-\theta)\, k_j(T-\tau-\mu)\, R_j(\theta,\mu)\, d\theta\, d\mu - \\ - \lambda \int_0^T r_j^2(\tau)\, d\tau - \nu \int_0^T k_j^2(\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

где λ, ν — множители Лагранжа.

Сформулированный критерий максимума математического ожидания является весьма общим и оказывается применимым в случае оптимального разрешения гипотез. Действительно, пусть классификация производится по многомерной плотности вероятности $p_j(x)$, где x — многомерный вектор. Будем подвергать этот вектор некоторому преобразованию

$$y_j = f_j(x), \tag{4}$$

причем для определенности решения наложим ограничение аналогичного характера

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_j^2(x)\, dx = \text{const}. \tag{5}$$

Интеграл в последней формуле тоже является многомерным. Выявим вид функции $f_j(x)$, обеспечивающей максимум математического ожидания величины y_j при сформулированном условии. Для этого максимизируем функционал

$$\sigma_j = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x)\, p_j(x)\, dx - \mu \int_{-\infty}^{\infty} f_j^2(x)\, dx. \tag{6}$$

Нетрудно показать [4], что его экстремум имеет место, если искомая функция $f_j(x)$ равна

$$f_j(x) = \frac{1}{\mu}\, p_j(x). \tag{7}$$

Таким образом, преобразование входной случайной величины x, обеспечивающее максимум математического ожидания выходной величины y, соответствует также вычислению апостериорной вероятности, что необходимо при решении оптимальных задач классификации по любому критерию.

Возвращаясь к интересующей нас формуле (3), аналогичными приемами можно показать, что оптимальные функции $k_j(\tau)$ и $r_j(\tau)$ должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\int_0^{T-\tau}\int_0^{T-\tau} k_j(T-\tau-\theta)\, k_j(T-\tau-\mu)\, R_j(\theta, \mu)\, d\theta\, d\mu = \lambda\, r_j(\tau); \qquad (8)$$

$$\int_0^{T-\mu} d\tau \int_0^{T-\tau} r_j(\tau)\, k_j(\theta)\, R_j(T-\tau-\theta,\; T-\tau-\mu)\, d\theta = \nu\, k_j(\mu). \qquad (9)$$

Из последнего соотношения, принимая во внимание (8), можно получить одно уравнение для искомой функции $k_j(\tau)$:

$$\int_0^{T-\mu} d\tau \int_0^{T-\tau}\int_0^{T-\tau} k_j(\theta)\, k_j(\psi)\, k_j(\xi)\, R_j(T-\tau-\theta,\; T-\tau-\mu) \times$$
$$\times R_j(T-\tau-\psi,\; T-\tau-\xi)\, d\theta\, d\psi\, d\xi = \nu_j k\,(\mu). \qquad (10)$$

Методы решения полученного уравнения неизвестны, поэтому для отыскания приближенного решения $k_j(\tau)$ и $r_j(\tau)$ воспользуемся соотношениями (8) и (9).

Аппроксимируем импульсную функцию $k(\mu)$ суммой экспонент

$$k\,(\mu) = A_1 e^{-\alpha\mu} + A_2 e^{-2\alpha\mu} + A_3 e^{-3\alpha\mu}, \qquad (11)$$

после чего из (8) определим $r_j(\tau)$. Система функций $A_j e^{-\alpha_j \mu}$ может образовывать ортогональную систему и с любой степенью точности аппроксимировать произвольную функцию [5]. Однако при большом числе членов разложения возникают затруднения в определении оптимальных коэффициентов A_j, так как сама функция еще не определена. Поэтому целесообразно ограничиться небольшим числом членов разложения. Подбором значений коэффициентов A_j следует добиться максимума математического ожидания (1) при условии (2).

Если корреляционные функции процессов представимы в виде

$$R_j(t, t') = N\delta\,(t-t') + D_j f_j(t) f_j(t'), \qquad (12)$$

то нет необходимости использовать фильтр после детектора. При этом импульсная функция $k_j(\tau)$ определяется из выражения

$$\int_0^{T} R_j(T-\theta,\; T-\mu)\, k_j(\theta)\, d\theta = \nu\, k_j(\mu), \qquad (13)$$

откуда

$$k_j(\mu) = \lambda f_j(T-\mu). \qquad (14)$$

Известно, что первая собственная функция однородного уравнения

$$\int_0^{T} R(\theta, \mu)\, f(\theta)\, d\theta = \nu f(\mu) \qquad (15)$$

с минимальной среднеквадратической ошибкой представляет собой случайный процесс на заданном интервале наблюдения, поэтому для приближенной аппроксимации корреляционной функции в виде произведения двух сомножителей достаточно найти первую собственную функцию уравнения (15). В настоящее время методы приближенной оценки максимального собственного числа и соответствующей собственной функции развиты достаточно полно.

Изложенные приемы обработки принимаемых сигналов для классификации пригодны как для широкополосных, так и для узкополосных сигналов. Однако в последнем случае мы оперируем комплексной корреляционной функцией и квадратурными составляющими процесса.

Вопросы анализа ошибок классификации в данной работе не рассматриваются, поскольку их оценка должна основываться лишь на законах распределения выходных величин каждого из каналов. Так как предполагается, что такая полная статистическая характеристика неизвестна для входных сигналов, то не представляется возможным определить ее и на выходе системы. Поэтому наиболее приемлемый способ оценки характеристик такой системы должен основываться на экспериментальном статистическом материале. Можно утверждать, что вероятность ошибок будет тем меньше, чем больше отличаются по форме корреляционные функции классифицируемых процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1960.
2. К. Хелстром. Статистическая теория обнаружения сигналов. М.—Л., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. К. Б. Круковский-Синевич. Обнаружение случайного стационарного сигнала на фоне помех.— ИВУЗ, Радиотехника, 1959, т. 2, № 3.
4. Л. Э. Эльсгольц. Вариационное исчисление. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
5. Д. Х. Лэнинг, Р. Г. Бэттин. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М.—Л., Изд-во иностр. лит., 1958.

Поступила в редакцию
12 апреля 1965 г.