А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1965

УДК 519.27

А. Н. ДОМАРАЦКИЙ

(Новосибирск)

ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассматривается задача определения моментов случайных величин путем усреднения знаковых случайных величин, отражающих знак суммы исследуемых случайных величин и дополнительных непрерывных случайных величин с равномерными функциями распределения. Дается оценка погрешностей определения моментов случайных величин по результатам опытов.

Все возрастающая необходимость в статистической оценке нестационарных случайных сигналов для задач физики, техники, биологии и т. п. делает желательным построение простых и надежных корреляционных устройств. Поэтому остро встает задача создания таких методов статистической оценки нестационарных случайных сигналов, которые позволили бы создавать максимально простые автоматические измерительные корреляционные устройства. В [1, 2] рассмотрен метод измерения корреляционной функции стационарных эргодических случайных сигналов с помощью дополнительного случайного шума. Этот метод делает пригодным применение коррелятора совпадения знаков к стационарным эргодическим случайным сигналам с произвольной совместной функцией распределения. В настоящей статье рассматривается применение подобного метода к измерению корреляционных функций и математических ожиданий нестационарных случайных сигналов.

Поскольку случайный сигнал в каждый данный момент времени можно представить как случайную величину, то все дальнейшие выкладки мы будем относить к случайным величинам. Будем предполагать, что в данный момент времени мы имеем последовательность возможных значений случайной величины.

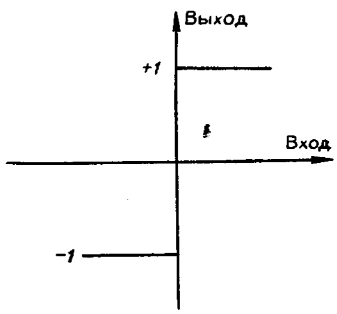

Рис. 1. Характеристика релейного элемента.

Рассмотрим нелинейный элемент с релейной характеристикой (рис. 1), на вход которого поступает случайная величина X. На его выходе образуется знак каждого возможного значения x случайной величины X. Добавим на входе элемента к каждому возможному значению x случайной величины X другую случайную величину U, имеющую равномерную плотность вероятности в промежутке $\pm A$ (рис. 2). Теперь на выходе элемента будет образовываться знак каждого возможного значения z случайной величины $Z=x+U$. Определим математическое ожидание случайной величины $Z'=\mathrm{sgn}(x+U)$. Поскольку каждое возможное значение x случайной величины X является неслучайной величиной, то случайную величину Z' можно рассматривать как определенную функцию $\varphi(U)$ случайной величины U; тогда, согласно [3],

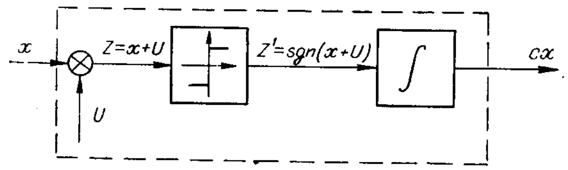

Рис. 2. Структурная схема квазилинейного элемента.

$$M[Z'] = M[\varphi(U)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) f(u)\, du. \qquad (1)$$

Подставляя значения $\varphi(u)$ и $f(u)$ и предполагая, что практически все возможные значения x случайной величины X обязательно попадают в промежуток $\pm$A, имеем

$$M[Z'] = \int_{-A+x}^{A+x} \mathrm{sgn}(x+u) \frac{1}{2A} du = -\int_{-A+x}^{0} \frac{1}{2A} du + \int_{0}^{A+x} \frac{1}{2A} du = \frac{x}{A} = cx,$$

$$\text{где } c = \frac{1}{A}, \qquad (2)$$

т. е. математическое ожидание $M_{z'}$ в некотором масштабе равно возможному значению x случайной величины X. Таким образом, нелинейный элемент с релейной характеристикой может быть сделан линейным в ограниченной области $|2A|$ путем добавления на его вход случайной величины, имеющей равномерную плотность вероятности в промежутке $\pm$A, и последующего интегрирования его выходного эффекта. Схему, состоящую из релейного элемента с дополнительной случайной величиной на входе и интегратора, будем называть квазилинейным элементом. Такая линеаризация релейного элемента не вызывает, так же как и аналоговый линейный элемент, погрешности от квантования и позволяет осуществлять более простые дальнейшие преобразования над входными величинами в двоичной форме.

Рассмотрим теперь задачу определения математического ожидания случайной величины Z' на выходе релейного элемента по результатам n независимых опытов, произведенных в одинаковых условиях. В качестве оценки математического ожидания случайной величины Z' можно принять среднее арифметическое полученных в результате опытов ее значений [3]:

$$M^*[Z'] = m^*_{z'} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} Z'_{\nu}. \qquad (3)$$

Для оценки точности определения математического ожидания по формуле (3) найдем дисперсию M^*_z:

$$D[M^*_{z'}] = M\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} Z'_{\nu} - m_{z'}\right)^2\right], \qquad (4)$$

но $m_{z'} = cx$.

Для простоты выкладок примем $|A|=1$; тогда $c=1$ и

$$D[M^*_{z'}] = M\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} Z'_\nu - x\right)^2\right] = M\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} Z'_\nu\right)^2\right] -$$

$$- 2xM\left[\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} Z'_\nu\right] + x^2 = M\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} Z'_\nu\right)^2\right] - x^2. \qquad (5)$$

Найдем первый член формулы (5):

$$M\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} Z'_\nu\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{\mu=1}^{n}[Z'_\nu Z'_\mu] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n} Z'^2_\nu + \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} M[Z'_\nu]\, M[Z'_\mu]. \qquad (6)$$

Последний член формулы (6) равен

$$\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} M[Z'_\nu]\, M[Z_\mu] = \frac{1}{n^2}\, n(n-1)\, x^2. \qquad (7)$$

Определим первый член формулы (6) как момент второго порядка случайной величины Z', являющейся определенной функцией случайной величины U:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n} M[Z'^2] = \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\left(-\int_{-1+x}^{0}\frac{1}{2}dx + \int_{0}^{1+x}\frac{1}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1-x+1+x}{2} = \frac{1}{n}. \qquad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (6), имеем

$$M\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} Z'\right)^2\right] = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}(n-1)\, x^2, \qquad (9)$$

или

$$D[M_{z'}] = \frac{1-x^2}{n}, \qquad (10)$$

т. е. если дополнительная случайная величина U распределена равномерно в промежутке ± 1, в который попадают практически все возможные значения x случайной величины X, то погрешность измерения возможного значения x случайной величины X при помощи квазилинейного элемента можно оценить по формуле (10). Эта погрешность уменьшается с ростом количества n независимых опытов.

Определим погрешность в измерении возможного значения x случайной величины X при помощи квазилинейного элемента, вызванную нестабильностью характеристики релейного элемента. Предположим, что характеристика релейного элемента может смещаться вправо и влево относительно нуля на $\pm\frac{\Delta}{2}$ (рис. 3). При нахождении математического ожидания случайной величины Z' следует изменить пределы интегрирования в формуле (2). С учетом нестабильности характеристики релейного элемента $M_{z'}$ определится как

$$M[Z'] = -\frac{1}{2A}\int\limits_{-A+x}^{0\pm\frac{\Delta}{2}} du + \frac{1}{2A}\int\limits_{0\pm\frac{\Delta}{2}}^{A+x} du = \frac{x}{A} \pm \frac{1}{A}\cdot\frac{\Delta}{2} = cx \pm c\frac{\Delta}{2}. \quad (11)$$

Формула (11) показывает, что погрешность в измерении возможного значения x случайной величины X при помощи квазилинейного элемента, вызванная нестабильностью характеристики релейного элемента, пропорциональна величине зоны, в которой может изменяться его характеристика.

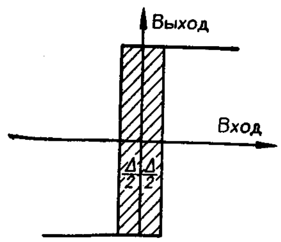

Рис. 3. Зона изменения характеристики релейного элемента.

Перейдем теперь к определению моментов случайной величины с применением квазилинейного элемента. Найдем моменты случайной величины $M_{z'}$ как определенной функции случайной величины X. В соответствии с [3] они определяются соотношением

$$\alpha_k = M\left[M_{z'}^k\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} M_{z'}^k f(x)\,dx. \quad (12)$$

Для математического ожидания имеем

$$M[M_{z'}] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} M_{z'} f(x)\,dx. \quad (13)$$

Если дополнительная случайная величина U и случайная величина X независимы, то, учитывая (2), получаем

$$M[M_{z'}] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-A+x}^{A+x} Z'f(u)f(x)dxdu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} cxf(x)\,dx = cm_x. \quad (14)$$

Формула (14) показывает, что математическое ожидание математического ожидания случайной величины $Z' = \operatorname{sgn}(x+U)$ пропорционально математическому ожиданию случайной величины X. Таким образом, подавая на вход квазилинейного элемента случайную величину X так, чтобы каждое ее возможное значение x определялось при добавлении дополнительной независимой случайной величины U по достаточному числу независимых опытов (с учетом (10)), и усредняя получающиеся промежуточные результаты по множеству возможных значений x случайной величины X, на выходе элемента получаем математическое ожидание случайной величины X.

В качестве оценки математического ожидания m_x случайной величины X примем среднее арифметическое полученных в результате опытов ее значений

$$m_x = \frac{1}{l}\sum_{\nu=1}^{l} x_\nu = \frac{1}{l}\sum_{\nu=1}^{l} m_{z'_\nu}, \tag{15}$$

а для оценки точности измерения математического ожидания при помощи квазилинейного элемента найдем дисперсию M_x^*:

$$D[M_x^*] = M\left[\left(\frac{1}{l}\sum_{\nu=1}^{l} m_{z'_\nu} - m_x\right)^2\right] = M\left[\left(\frac{1}{l}\sum_{\nu=1}^{l} m_{z'_\nu}\right)^2\right] -$$

$$-2M\left[\frac{1}{l}\sum_{\nu=1}^{l} m_{z'_\nu}\right] m_x + m_x^2 = \frac{1}{l^2}\sum M\left[m^2_{z'_\nu}\right] +$$

$$+\frac{1}{l^2}\sum_{\nu=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{l} M\left[m_{z'_\nu}\right] M\left[m_{z'_\mu}\right] + m_x - m_x^2 = \frac{1}{l} M[X^2] +$$

$$+\frac{1}{l^2}\, l(l-1)\, m_x^2 - m_x^2 = \frac{M[X^2] - m_x^2}{l} = \frac{D_x}{l}. \tag{16}$$

Формула (16) показывает, что с увеличением числа независимых опытов точность измерения математического ожидания случайной величины X при помощи квазилинейного элемента возрастает. Для дисперсии случайной величины X имеем

$$D[X] = M[\mathring{X}^2] = M[m^2_{\mathring{z}'}] = \int_{-\infty}^{\infty} m^2_{\mathring{z}'} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-A+x}^{A+x}\int_{-A+x}^{A+x} \operatorname{sgn}(\mathring{x}+u_1)\operatorname{sgn}(\mathring{x}+u_2) f(u_1) f(u_2) f(x)\,dx\,du_1\,du_2. \tag{17}$$

Формула (17) справедлива лишь в том случае, если случайные величины X, U_1, U_2 независимы. Таким образом, для того, чтобы определять дисперсию случайной величины X с помощью квазилинейного элемента, необходимо использовать две независимые случайные величины U_1, U_2, а в квазилинейный элемент ввести умножающее устройство. Поскольку на выходе релейного элемента получается двоичная случайная величина (знак случайной величины Z), то в качестве умножающего устройства (умножителя) можно использовать схему, реализующую логическую функцию И. Тогда квазилинейный элемент для измерения дисперсии случайной величины X примет вид, показанный на рис. 4. Так как случайные величины X, U_1 и U_2 по условию независимы, то в одном и том же опыте случайные величины $Z_1 = \mathring{x} + U_1$ и $Z_2 = \mathring{x} + U_2$ могут иметь разные знаки, т. е. на выходе релейных элементов могут быть двоичные случайные величины разного знака. Поэтому умножитель должен учитывать все возможные комбинации знаков на его входе и его схема должна иметь вид, показанный на рис. 5.

Итак, подавая на вход квазилинейного элемента (см. рис. 4) центрированную случайную величину $\overset{\circ}{X}$ так, чтобы каждое ее возможное значение $\overset{\circ}{x}$ определялось при добавлении дополнительных независимых

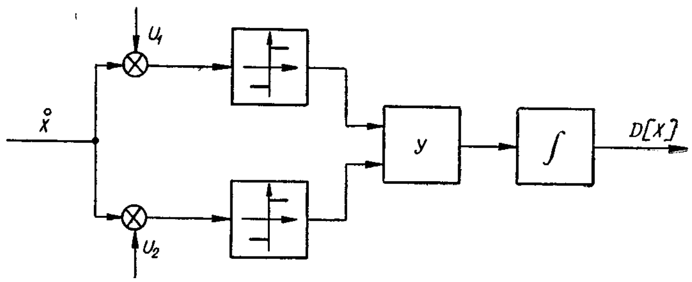

Рис. 4. Структурная схема квазилинейного элемента для определения дисперсий случайных величин.

случайных величин U_1, U_2 по достаточному числу независимых опытов (с учетом (10)), перемножая промежуточные результаты и усредняя полученные произведения по множеству возможных значений x случайной величины X, на выходе элемента получаем дисперсию случайной величины X.

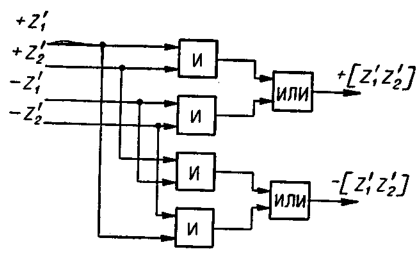

Рис. 5. Структурная схема умножителя.

Так как дисперсия случайной величины X представляет собой математическое ожидание случайной величины $(X - m_x)^2$, то за оценку дисперсии случайной величины X можно принять среднее арифметическое полученных в результате опытов значений случайной величины $(X - M_x)^2$:

$$D_x^* = \frac{1}{l} \sum_{\nu=1}^{l} (x_\nu - M_x)^2. \qquad (18)$$

Формула (18) дает несмещенную оценку дисперсии случайной величины X, однако практически математическое ожидание никогда не бывает известным, и поэтому (18) оказывается неприемлемой. Обычно в формуле (18) неизвестное математическое ожидание случайной величины X заменяют средним арифметическим полученных в результате опытов ее значений, а оценку дисперсии определяют по формуле

$$D_x^* = \frac{1}{l-1} \sum_{\nu=1}^{l} (x_\nu - m_x^*)^2. \qquad (19)$$

Для оценки точности определения дисперсии случайной величины по формуле (19) найдем дисперсию случайной величины D_x^*. Используя известные соотношения [3], имеем

$$D\left[D_x^*\right] = M\left[(D_x^* - D_x)^2\right] = M\left[D_x^{*2}\right] - D_x. \qquad (20)$$

Далее

$$M\left[D_x^{*2}\right] = \frac{1}{(l-1)^2} \sum_{\mu,\nu=1}^{l} M\left[(X_\mu - M_x^*)^2 (X_\nu - M_x^*)^2\right]. \qquad (21)$$

Из (21) следует, что для оценки точности формулы (19) необходимо знать моменты четвертого порядка случайных величин $X_\nu - M_x^*$. Если случайная величина X распределена нормально, то по известным формулам [3] можно определить необходимые моменты. Подставляя их значения в формулу (21), получим окончательно дисперсию оценки (19):

уменьшается с ростом числа независимых опытов.

Рассмотрим теперь задачу измерения корреляционных моментов случайных величин при помощи квазилинейного элемента. Для двух случайных величин X и Y, используя (2), имеем

$$K_{xy} = M\,[\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y}[= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M\left[Z_x'\right] M\left[Z_y'\right] f(xy)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\mathrm{A}+x}^{\mathrm{A}+x}\int\limits_{-\mathrm{A}+x}^{\mathrm{A}+x} \operatorname{sgn}(x+u_1)\operatorname{sgn}(y+u_2) f(u_1) f(u_2) f(xy)\,dxdydu_1du_2. \qquad (23)$$

Эта формула справедлива только тогда, когда случайные величины X, U_1, U_2 и Y, U_1, U_2 независимы. Из (23) следует, что при измерении корреляционных моментов двух случайных величин с помощью квазилинейного элемента необходимо использовать так же, как и в случае определения дисперсии, две дополнительные случайные величины и в квазилинейный элемент ввести умножитель. Структурная схема квазилинейного элемента для измерения корреляционных моментов представлена на рис. 6.

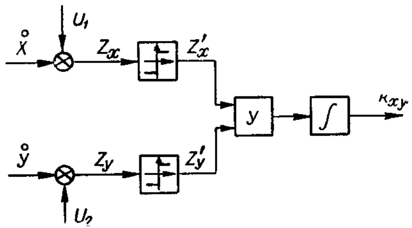

Рис. 6. Структурная схема квазилинейного элемента для определения корреляционных моментов случайных величин.

Итак, для того, чтобы измерить корреляционный момент двух случайных величин X, Y при помощи квазилинейного элемента, необходимо на его входы подавать центрированные случайные величины $\overset{\circ}{X}$, $\overset{\circ}{Y}$ так, чтобы каждые возможные их значения $\overset{\circ}{x}$, $\overset{\circ}{y}$ определялись при добавлении независимых случайных величин U_1, U_2 по достаточному числу независимых опытов (с учетом (10)), перемножать промежуточные результаты на умножителе и усреднять полученные произведения по множеству возможных значений x случайных величин X.

За оценку корреляционного момента K_{xy} случайных величин X, Y можно принять среднее арифметическое полученных в результате опытов значений случайной величины $(X - M_x)(Y - M_y)$:

$$k_{xy}^* = \frac{1}{l}\sum_{\nu=1}^{l}(x_\nu - m_x)(y_\nu - m_y). \qquad (24)$$

Так как при определении корреляционного момента случайных величин их математические ожидания обычно бывают неизвестными, то их заменяют соответствующими средними арифметическими, а оценку корреляционного момента определяют по формуле

$$k_{xy}^{*} = \frac{1}{l-1} \sum_{\nu=1}^{l} (x_{\nu} - m_x^{*})(y_{\nu} - m_y^{*}). \tag{25}$$

Для оценки точности определения корреляционного момента по формуле (25) вычислим дисперсию случайной величины K_{xy}^{*}. Используя известные соотношения [3], имеем:

$$D[K_{xy}^{*}] = M[(K_{xy}^{*} - k_{xy})^2] = M[K_{xy}^{*2}] - k_{xy}^{*}; \tag{26}$$

$$M[K_{xy}^{*2}] = \frac{1}{(l-1)^2} \sum_{\mu,\nu=1}^{l} M[X_{\mu} - M_x^{*}](Y_{\mu} - M_y^{*})(X_{\nu} - M_x^{*}) \times \times (Y_{\nu} - M_y^{*})]. \tag{27}$$

Следовательно, для оценки точности определения корреляционного момента K_{xy} случайных величин X, Y по формуле (25) необходимо знать момент четвертого порядка случайных величин $X_{\nu} - M_x^{*}$, $Y_{\mu} - M_y^{*}$ (ν, $\mu = 1, \ldots, l$). Если случайный вектор (X, Y) распределен нормально, то по известным формулам [3] можно определить необходимые моменты. Подставляя их значения в (27), получим окончательно дисперсию оценки (25):

$$D[K_{xy}^{*}] = \frac{D_x D_y + k_{xy}^2}{l-1}. \tag{28}$$

Эта формула может служить для оценки точности измерения корреляционных моментов случайных величин с помощью квазилинейных элементов. Следует отметить, что относительная точность оценки (25) корреляционного момента падает с уменьшением абсолютной величины коэффициента корреляции.

Описанный метод применения квазилинейных элементов для определения моментов случайных величин делает возможным построение простых корреляционных измерительных устройств для измерения корреляционных функций и математических ожиданий нестационарных случайных сигналов, производящих преобразования над входными величинами в двоичной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. P. Veltman, H. Kwakernaak. Theorie und Technik der Polaritätskorrelation für die dynamische Analyse niederfrequenter Signale und Systeme.— Regelungstechnik, 1961, 9 Jahrg., H. 9, S. 357—364.
2. Б. П. Велтман, А ван ден Бос. Применение релейного коррелятора и коррелятора совпадения знаков в автоматическом регулировании.— II конгресс ИФАК. Базель, 1963.
3. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию
24 марта 1965 г.