

В. А. ВИТТИХ, А. Н. ГИНЗБУРГ

(Новосибирск)

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ УПРАВЛЕНИЯ СБОРОМ ИНФОРМАЦИИ

Рассматривается алгоритм управления сбором информации от источника непрерывного сигнала, основанный на двукратном интегрировании сигнала, и предлагается функциональная схема устройства, реализующего данный алгоритм.

В современных телеизмерительных системах, а также в сложных системах централизованного контроля все большее применение находит дискретное представление непрерывных измерительных сигналов, которое позволяет при обработке результатов эксперимента использовать средства высокоточной цифровой вычислительной техники. Обычно дискретизация по времени сводится к выборке отсчетов сигнала через равные промежутки времени, величина которых определяется либо спектральными свойствами сигнала [1, 2], либо модуль-максимумом его второй производной [3]. Если учесть, что частота опроса источников выбирается в расчете на самый «худший случай» (например, на случай максимальной скорости изменения сигнала), вероятность которого, как правило, невелика, а число параметров в системе измеряется десятками, а иногда и сотнями, то нетрудно представить, с какими огромными потоками информации приходится иметь дело исследователю.

Стремление сократить объем данных приводит к необходимости воспользоваться методами неравноотстоящей дискретизации [4], учитывающей текущие свойства измеряемого сигнала, иными словами, обратиться к методам адаптивной дискретизации, принцип которой заключается в следующем.

Непрерывно вычисляется максимальное значение ошибки приближения

$$\epsilon_m = \max_{0 < t < T} |f(t) - \varphi(t)|$$

сигнала $f(t)$ некоторой функцией $\varphi(t)$, которая, в частности, может представлять собой результат линейной интерполяции сигнала $f(t)$, заданного отсчетами (в этом случае точнее говорить о погрешности интерполяции). Ошибка ϵ_m непрерывно сравнивается с допустимой ϵ_d , и в момент времени $t = t_k$, когда они становятся равными, производится регистрация отсчета сигнала $f(t_k)$.

Таким образом, управление моментами подключения источника измеряемого сигнала к аналого-цифровому преобразователю сводится к контролю погрешности линейной интерполяции между отсчетами сигнала

ла. Если сигнал без помех, то решение поставленной задачи как с математической, так и с инженерной точки зрения не представляет значительных трудностей. Для этого обычно используются остаточные члены формул интерполяции [3, 4], и процесс вычисления ошибки интерполяции сводится к двукратному дифференцированию сигнала. Однако реальные измерительные сигналы всегда сопровождаются помехами, и использование методов оценки погрешности интерполяции, основанных на дифференцировании сигнала, оказывается в таких случаях практически неприемлемым, поскольку эффективность дискретизации резко уменьшается. Последнее обстоятельство представляет собой основное препятствие на пути практического использования алгоритмов неравноотстоящей дискретизации, поскольку отбор информации происходит не на малом интервале, а по равным промежуткам времени.

В статье рассмотрен алгоритм управления сбором информации от источника непрерывного сигнала, который основан на использовании ортогональных полиномов Лежандра и в котором отсутствует операция дифференцирования. Алгоритм обладает некоторыми фильтрующими свойствами, поскольку в нем предусматривается двукратное интегрирование сигнала с помехой.

Сначала мы рассмотрим принцип построения адаптивных дискретизаторов, основанных на использовании ортогональных полиномов Лежандра; покажем, как довольно просто можно вычислять погрешность равномерного приближения сигнала полиномами Лежандра нулевой и первой степени, и затем, установив связь ее с ошибкой линейной интерполяции сигнала, приведем функциональную схему устройства управления сбором информации.

* * *

Пусть на произвольном отрезке времени $[0, T]$ задана непрерывная функция времени $f(t)$, представляющая собой реализацию некоторого в общем случае нестационарного случайного процесса. Функция $f(t)$ получена в результате эксперимента и состоит из суммы полезного сигнала $f(t)$ и помехи $\xi(t)$. Последнее обстоятельство определяет характер приближения и приводит нас к необходимости воспользоваться полиномами метода наименьших квадратов, в частности, полиномами Лежандра $X_i(x)$, ортогональными с весом $\rho(x) = 1$ на отрезке $[-1, 1]$. Основное преимущество этих полиномов заключается в относительной простоте вычисления коэффициентов разложения c_i функции $f(x)$ в ряд Фурье-Лежандра по формуле [5]:

$$c_i = \frac{2i+1}{2} [f^{(-1)}(1) X_i(1) - f^{(-2)}(1) X_i^{(1)}(1) + \dots \\ \dots + (-1)^i f^{(-i-1)}(1) X_i^{(i)}(1)], \quad (1)$$

где $X_i^{(j)}(1) = \left. \frac{d^j X_i(x)}{dx^j} \right|_{x=1}$ — j -я производная полинома Лежандра i -й степени в точке $x=1$;

$$f^{(-j)}(x) = \int_{-1}^x f^{(-j+1)}(\xi) d\xi.$$

Процесс вычисления коэффициентов по этой формуле сводится к умножению вектора

$$[f^{(-1)}(1), -f^{(-2)}(1), \dots, (-1)^i f^{(-i-1)}(1)] \quad (2)$$

на матрицу

$$\begin{vmatrix} X_0(1), & 0, & \dots, & 0 \\ X_1(1), & X_1^{(1)}(1), & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_i(1), & X_i^{(1)}(1), & \dots, & X_i^{(i)}(1) \end{vmatrix}, \quad (3)$$

которая известна заранее.

Приведение произвольного отрезка $[0, T]$ к отрезку $[-1, 1]$ может быть осуществлено по формуле $x = \frac{2}{T}t - 1$ (по существу, производится деформация интервала времени в $2/T$ раз).

Очевидно, что

$$f^{(-j)}(1) = \int_{-1}^1 f^{(-j+1)}(x) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f^{(-j+1)}(t) dt.$$

Если мы хотим выяснить характер распределения погрешностей равномерного приближения на отрезке $[-1, 1]$ функции $f(t)$ n -м отрезком

$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i X_i(x)$ формального разложения $f(x)$ в ряд Фурье-Ле-

жандра, то не значительно ошибемся, оценив эту погрешность первым опущенным членом ряда [6]. Тогда погрешность конечного разложения в $n+1$ членов будет приближенно равна $\varepsilon_{n+1}(x) = c_{n+1} X_{n+1}(x)$. Функция $X_{n+1}(x)$ колеблется около нуля с изменяющимися амплитудами. Амплитуды постоянно возрастают при переходе через середину интервала и достигают максимума, равного единице, в обеих конечных точках $x=-1$ и $x=1$. Следовательно, погрешность неравномерно распределена по всему интервалу и максимальна в концах интервала. Для обеспечения того, чтобы ошибка $\varepsilon_{n+1}(x)$ не превысила допустимой в крайних точках $x=-1$ и $x=1$, нам придется расплатиться большим числом членов ряда, ибо мы получаем их больше, чем нужно внутри интервала. Однако это на первый взгляд неприятное обстоятельство можно выгодно использовать, осуществляя контроль погрешности приближения не во всех точках интервала $[-1, 1]$, а только в двух: $x=-1$ и $x=1$.

Таким образом, необходимо вычислять значения:

$$\varepsilon(-1) = f(-1) - \sum_{i=0}^n c_i X_i(-1); \quad (4)$$

$$\varepsilon(1) = f(1) - \sum_{i=0}^n c_i X_i(1).$$

Поскольку $X_i(-1) = (-1)^i$, а $X_i(1) = 1$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$), то (4) можно записать как:

$$\varepsilon(-1) = f(-1) - \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i; \quad (5)$$

$$\varepsilon(1) = f(1) - \sum_{i=0}^n c_i,$$

т. е. контроль погрешности сводится к сравнению значения функции $f(x)$ в точке $x=-1$ с величиной $\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i$, а значения $f(x)$ в точке $x=1$ — с алгебраической суммой коэффициентов $\sum_{i=0}^n c_i$.

Учитывая вышесказанное, можно изложить принцип построения адаптивных дискретизаторов, основанных на использовании ортогональных полиномов Лежандра.

Производится $(n+1)$ -кратное интегрирование сигнала $f(t)$, т. е. непрерывно вычисляется вектор (2), после умножения которого на матрицу (3), получается $n+1$ коэффициент c_i . По формуле (5) вычисляются ошибки приближения $\varepsilon(-1)$ и $\varepsilon(1)$, которые сравниваются с допустимой ε_d . В момент T , когда $\varepsilon(\pm 1) = \varepsilon_d$, фиксируется набор коэффициентов c_i и величина отрезка времени $[0, T]$, после чего рассмотренная процедура повторяется.

Остановимся подробнее на алгоритме адаптивной дискретизации при $n=1$. В этом случае сигнал аппроксимируется некоторой кусочно-линейной функцией. Такой алгоритм привлекает внимание своими очевидными преимуществами: простотой по сравнению с алгоритмами, использующими высшие степени полиномов, и тем, что процесс восстановления аппроксимирующей кусочно-линейной функции весьма несложен. Кроме того, этот вид алгоритма адаптивной дискретизации может быть реализован средствами аналоговой вычислительной техники, поскольку в нем предусматривается лишь двукратное интегрирование сигнала.

Для контроля максимальной погрешности приближения необходимо вычислять только сумму $\varphi(1) = c_0 + c_1$ и разность $\varphi(-1) = c_0 - c_1$ коэффициентов c_0 и c_1 . Таким образом, о сигнале $f(x)$ мы судим по функции $\varphi(x) = c_0 + c_1 x$, полученной в результате некоторых преобразований исходного сигнала. Эта функция в среднеквадратичном смысле является наилучшим описанием сигнала, но все же это есть результат обработки сигнала вычислительными средствами, обладающими ограниченной точностью. Поэтому следует отдать предпочтение алгоритмам адаптивной дискретизации, основанным на интерполяции сигнала. В этом случае сигнал описывается рядом его отсчетов, взятых адаптивно, и временными интервалами между ними. Алгоритм, построенный по такому принципу, оказывается несколько проще алгоритма кусочно-линейной аппроксимации и, безусловно, выигрывает в наглядности представления данных, хотя и уступает в эффективности последнему, поскольку он основан на линейной интерполяции сигнала. При этом адаптивный дискретизатор будет выполнять функцию устройства, предназначенного для управления сбором информации от источника непрерывного сигнала (рис. 1). Такой алгоритм управления может быть построен на основе описанного выше адаптивного дискретизатора, использующего полиномы Лежандра нулевой и первой степени. Для этого достаточно при нарушении одного из условий

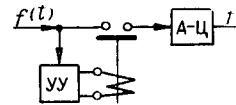


Рис. 1.

$$\varepsilon(1) = f(1) - \varphi(1) \leq \varepsilon_d; \quad \varepsilon(-1) = f(-1) - \varphi(-1) \leq \varepsilon_d,$$

вместо значений c_0 и c_1 , регистрировать отсчет сигнала $f(1) = f(T)$ в этот момент времени.

Поскольку ошибка приближения внутри интервала аппроксимации всегда меньше ошибки на конце интервала, а следовательно, меньше ε_{Δ} , то

$$\max \left| f(t) - f(0) - \frac{f(T) - f(0)}{T} t \right| < 2\varepsilon_{\Delta},$$

$$0 \leq t \leq T.$$

Иными словами, погрешность линейной интерполяции сигнала на выбранном отрезке времени не более чем в два раза превышает погрешность равномерного приближения сигнала на этом же отрезке полиномами Лежандра нулевой и первой степени.

Рассмотрим теперь функциональную схему устройства, управляющего моментами подключения измеряемого сигнала к аналого-цифровому преобразователю; эта схема может быть взята за основу при построении аналоговой модели алгоритма управления сбором информации от источника непрерывного сигнала (рис. 2).

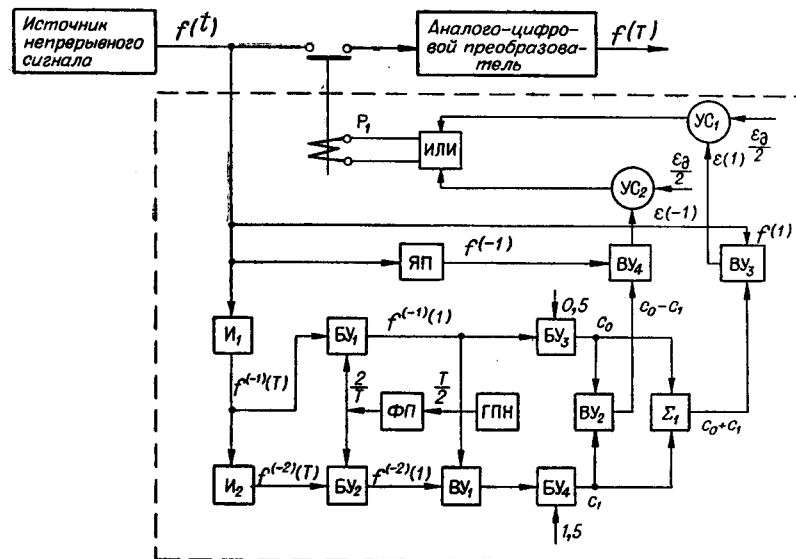


Рис. 2.

Непрерывный сигнал $f(t)$ от источника поступает на вход интегратора I_1 , на выходе которого имеем $\int_0^T f(t) dt = f^{(-1)}(T)$. Величина $f^{(-1)}(T)$ с выхода I_1 поступает на вход интегратора I_2 , выходной результат которого представляет собой второй последовательный интеграл $f^{(-2)}(T) = \int_0^T f^{(-1)}(t) dt$. В момент времени $t=0$ запускается генератор пилообразного напряжения ГПН, вырабатывающий линейно на-

растающее напряжение, пропорциональное $T/2$, которое подается на вход функционального преобразователя ФП. Выходное напряжение ФП, пропорциональное $2/T$, в блоках умножения БУ₁ и БУ₂ умножается соответственно на $f^{(-1)}(T)$ и $f^{(-2)}(T)$. Напряжения на выходах БУ₁ и БУ₂ представляют собой результаты последовательного интегрирования сигнала $f^{(-1)}(1)$ и $f^{(-2)}(1)$, приведенные к отрезку $[-1, 1]$. В вычитающем устройстве ВУ₁ получаем величину $f^{(-1)}(1) - f^{(-2)}(1)$, которая умножается на 1,5, и с выхода БУ₄ снимается напряжение, пропорциональное текущему значению коэффициента c_1 .

Коэффициент c_0 получается в результате умножения величины $f^{(-1)}(1)$ в БУ₃ на 0,5. Напряжения, пропорциональные c_0 и c_1 , суммируются в сумматоре Σ_1 и вычитаются в ВУ₂, на выходах которых имеем соответственно величины:

$$\varphi(1) = c_0 + c_1;$$

$$\varphi(-1) = c_0 - c_1,$$

равные значениям приближающей прямой в крайних точках отрезка аппроксимации. В ВУ₃ и ВУ₄ вычисляются ошибки приближения:

$$\varepsilon(1) = f(1) - \varphi(1);$$

$$\varepsilon(-1) = f(-1) - \varphi(-1);$$

(значение $f(-1)$ хранится в ячейке памяти ЯП). В устройствах сравнения УС₁ и УС₂ эти ошибки сравниваются с величиной $\varepsilon_d/2$, и, если хотя бы в одном из них нарушается условие $\varepsilon_d/2 \geq \varepsilon(\pm 1)$, то на выходе схемы ИЛИ вырабатывается команда, по которой контакт реле Р₁ замыкается, и отсчет сигнала $f(T)$ в этот момент времени подается на вход аналого-цифрового преобразователя. По этой же команде в ЯП фиксируется новое значение сигнала $f(-1)$, все элементы схемы возвращаются в исходное состояние и рассмотренный процесс повторяется снова.

* * *

При построении схемы управляющего устройства мы исходили из предположения, что погрешность аппроксимации может быть максимальной как в точке $x = -1$, так и в точке $x = 1$, и поэтому контроль погрешности осуществляется в обеих крайних точках отрезка аппроксимации. Это предположение справедливо для функций аналитических. Однако когда мы имеем дело с функциями эмпирическими (функциями с помехами), то при их дискретизации погрешность аппроксимации будет, как правило, максимальна в точке $x = 1$, так как выбор интервала аппроксимации определяется, в основном, появлением помехи на правом конце в отличие от аналитических функций, для которых выбор интервала определяется только приближающими свойствами аппроксимирующего полинома. Учитывая это обстоятельство, рассмотренную функциональную схему управляющего устройства можно упростить, если осуществлять контроль погрешности приближения лишь в точке $x = 1$. В связи с этим отпадает необходимость помнить значение сигнала в точке $t = 0 (x = -1)$, что важно с практической точки зрения, поскольку использование запоминающих устройств всегда нежелательно. Кро-

ме того, в упрощенной схеме не нужны вычитающие устройства ВУ₂ и ВУ₄, устройство сравнения УС₂ и логическая схема ИЛИ.

Отказ от контроля погрешности в начальной точке интервала аппроксимации делает упрощенный вариант устройства управления более помехоустойчивым, особенно в случае, когда на сигнал наложена импульсная помеха, приводящая к появлению одиночных выбросов сигнала (такую помеху часто называют аномальной). Если выброс сигнала оборвал интервал аппроксимации в некоторый момент времени, то при контроле погрешности в упрощенной схеме на новом выбираемом отрезке аппроксимации этот выброс не будет учитываться, что приведет к увеличению отрезков аппроксимации и к соответствующему увеличению коэффициентов сжатия.

Однако отказ от контроля погрешности в точке $t=0$ приводит к появлению ошибок приближения, превышающих допустимую, что заставляет исследователя усомниться в целесообразности использования упрощенного алгоритма. И он будет прав, если отношение сигнал/помеха ν велико, т. е. сигнал практически можно считать аналитической функцией. При ν порядка 10—15, когда вероятность появления ошибок, превышающих допустимую, чрезвычайно мала, применение упрощенной схемы является оправданным.

Приведем в связи с этим некоторые экспериментальные данные. На цифровой вычислительной машине было произведено моделирование обоих алгоритмов и подсчитаны коэффициенты сжатия и вероятности ошибок $p(\epsilon > \epsilon_d)$, которые получились при обработке по этим алгоритмам «эталонного» сигнала при различных уровнях помех. Величина вероятности ошибок $p(\epsilon > \epsilon_d)$, больших допустимой, не превышала 0,008, а коэффициент сжатия при использовании упрощенного алгоритма при $\nu=16$ был в 1,6 раза больше, чем при применении алгоритма с контролем погрешности в обеих крайних точках интервала аппроксимации. При уменьшении ν величина $p(\epsilon > \epsilon_d)$ уменьшалась, а отношение коэффициентов сжатия, получаемых при использовании обоих алгоритмов, росло (для $\nu=12$ оно равнялось 1,9). Очевидно, целесообразно разменивать такую небольшую потерю в точности на увеличение коэффициента сжатия более чем в 1,5 раза и на существенное упрощение схемы управляющего устройства.

* * *

Рассмотренный алгоритм управления сбором информации от источника непрерывного сигнала является интерполяционным алгоритмом, в том смысле, что приближающая прямая строится на основе знания всего сигнала в целом на отрезке аппроксимации и при увеличении отрезка коэффициенты прямой могут изменяться. В отличие от известных экстраполирующих алгоритмов, основанных на предсказании свойств сигнала по значению самого сигнала и его производных в точке $t=0$ и обладающих меньшей гибкостью, поскольку приближающая прямая не изменяет своих параметров при увеличении отрезка времени, изложенный алгоритм позволяет получать большие коэффициенты сжатия. Кроме того, данный алгоритм, использующий ортогональные полиномы Лежандра, превосходит экстраполирующие алгоритмы по помехоустойчивости, ибо вместо двукратного дифференцирования, необходимого при реализации последних, в нем предусматривается двукратное интегрирование сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Котельников. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи.— Материалы радиосекции к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции связи. М., Редакция управления связи РККА, 1933.
2. Н. А. Железнов. Принцип дискретизации стохастических сигналов с неограниченным спектром и некоторые результаты теории импульсной передачи сообщений.— Радиотехника и электроника, 1958, т. 3, № 1.
3. Б. Н. Хлистунов. О погрешности аппроксимации дискретных методов измерения.— Приборостроение, 1960, № 5.
4. З. Фридрих. К вопросу о неравномерной дискретизации непрерывных сигналов.— ИВУЗ, Радиофизика, 1960, т. III, № 2.
5. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. Справочная математическая библиотека. М., Физматгиз, 1961.
6. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.

*Поступила в редакцию
10 апреля 1965 г.*