А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1965

УДК 62-505

Л. Н. ИВАНОВ

(Новосибирск)

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХ

В статье дано описание алгоритма работы статистической измерительной системы, предназначенной для автоматической обработки данных при наличии помех, вызывающих случайные ошибки измерения. Рассмотрены вопросы эффективности процесса автоматического поиска.

Измерительные информационные системы [1], осуществляющие автоматическую обработку результатов измерения на основе использования статистических методов, находят все более широкое применение при решении задач оптимизации режимов работы промышленных объектов, работающих в условиях случайных помех, при отсутствии детерминированности как в характере изменений величин, так и в их взаимосвязях. Такие измерительные системы, осуществляя обработку первичной информации, позволяют определять текущее состояние объекта, отклонение режима работы от оптимального, степень этого отклонения и на основании найденных результатов производить управление объектом.

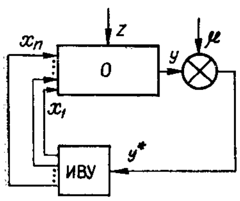

Рис. 1.

В данной работе рассматривается применение одной из разновидностей статистических измерительных информационных систем в системе автоматической оптимизации; кроме того, затрагиваются некоторые вопросы, связанные с реализацией процесса автоматического поиска.

Постановка задачи. На объект управления О (рис. 1), имеющий оптимальный участок рабочей характеристики, действуют управляющие воздействия (входные величины) $x_1, x_2, ..., x_n$, возмущающие воздействия z, влияющие на изменение характеристик объекта, и, кроме того, на его выходе присутствует случайная помеха μ. Выходная величина y связана с входными зависимостью

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (1)$$

и является случайной величиной. Необходимо путем автоматического поиска [2, 3] находить и поддерживать значения входных величин x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такими, чтобы функция y (1) удовлетворяла определенным условиям, например требованию оптимальности. Предполагается, что величина y может быть измерена на выходе объекта, для чего в систему введено измерительно-вычислительное устройство (ИВУ).

Подобные задачи возникают при оптимизации рабочих режимов объектов металлургической и химической промышленности (в качестве выходной величины может быть производительность, потребление ценного сырья и т. д.).

Решение задачи. Необходимым условием оптимальности функции нескольких переменных (1) является достижение аргументами (входными величинами) оптимальных значений:

$$y = y_{\text{опт}} = f(x_{1\,\text{опт}},\ x_{2\,\text{опт}},\ \ldots,\ x_{n\,\text{опт}}); \tag{2}$$

в частном случае

$$y = y_{э} = f(x_{1э},\ x_{2э},\ \ldots,\ x_{nэ}), \tag{2а}$$

где индекс «э» указывает на экстремальное значение величин.

Таким образом, оптимальному режиму работы объекта О соответствует условие (2). Пусть в рассматриваемой системе процесс поиска при оптимальном режиме нежелателен, т. е. при выполнении условия (2) поиск прекращается и возобновляется, когда

$$y = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \neq y_{\text{опт}}.$$

Периодически (с периодом повторения $T_{п}$) в системе измеряется значение выходной величины y и принимается решение: произвести поиск, если $y \neq y_{\text{опт}}$, или поиск производить не следует, если $y = y_{\text{опт}}$ (2). Случайные помехи, действующие на выходе управляемого объекта (на входе ИВУ), вызывают при измерении величины y случайные ошибки. Поэтому, если при измерении y присутствует ошибка μ — случайная величина, на вход ИВУ (см. рис. 1) поступает не истинное значение y, а его оценка

$$y^* = y + \mu \tag{3}$$

(можно предположить, что ошибки μ последовательных измерений независимы, т. е. время корреляции случайных помех меньше периода $T_{п}$). Присутствие случайных ошибок измерения может привести к тому, что некоторые решения будут неверными; при этом могут возникать ошибки двух родов [4]:

1) ошибка ложного поиска при оптимальном режиме;

2) ошибка отсутствия поиска при неоптимальном режиме работы объекта.

Оптимальные решения при измерении величины y^* должны приниматься на основе какого-либо статистического критерия.

Необходимо принять стратегию, которая предписывает определенный выбор одной из двух гипотез: гипотеза A_1 — поиск производить не следует при выполнении условия (2); гипотеза A_2 — произвести поиск, когда условие (2) не выполняется. Применим для решения задачи выбора одной из двух возможных ситуаций методы теории статистических решений (в [5] подобный подход использован для решения задач оценки параметров и подстройки компенсирующего устройства объекта управления; самонастраивающаяся система названа решающей, т. е. способной принимать оптимальные решения). Методы теории статистических решений обеспечивают оптимальную стратегию решений и позволяют произвести выбор гипотезы A_1 или A_2 таким образом, чтобы минимизировать допускаемые ошибки (1 и 2-го рода) или вероятности их появления.

При таком подходе к решению задачи для получения максимальной вероятности правильного решения при измерении оценки y^* измерительно-вычислительное устройство должно формировать в качестве выходного критерия величины апостериорных вероятностей гипотез и выносить решение в пользу той, апостериорная вероятность которой больше. На основании формулы Байеса апостериорные вероятности можно определить следующим образом:

$$p(A_1/y) = \frac{p(A_1)P(y/A_1)}{p(A_1)P(y/A_1) + p(A_2)P(y/A_2)} = \frac{p(A_1)P(y/A_1)}{\sum_{j=1}^{2} p(A_j)P(y/A_j)} \qquad (4)$$

для гипотезы A_1;

$$p(A_2/y) = \frac{p(A_2)P(y/A_2)}{p(A_1)P(y/A_1) + p(A_2)P(y/A_2)} = \frac{p(A_2)P(y/A_2)}{\sum_{j=1}^{2} p(A_j)P(y/A_j)} \qquad (5)$$

для гипотезы A_2,

где $p(A_j)$ — априорные вероятности гипотез $(j=1,2)$;

$P(y/A_j)$ — многомерные плотности вероятностей величины y в области оптимальных (A_1) и неоптимальных (A_2) значений.

В общем случае при поиске оптимального режима (2) поочередным изменением входных величин необходимо знание одномерных условных плотностей вероятностей $P(y/x_{i\,\text{опт}})$ и $P(y/x_i)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Таким образом, на основании сравнения апостериорных вероятностей гипотез (4), (5) можно принять решение, причем, если

$$\frac{p(A_1/y)}{p(A_2/y)} = \frac{p(A_1)P(y/A_1)}{p(A_2)P(y/A_2)} = \lambda l(y) > 1, \qquad (6)$$

то решение выносится в пользу гипотезы $A_1 \left(\lambda = \frac{p(A_1)}{p(A_2)}\right.$ — отношение априорных вероятностей гипотез, а величина

$$l = \frac{P(y/A_1)}{P(y/A_2)} \qquad (7)$$

называется коэффициентом правдоподобия).

При неизвестных априорных вероятностях гипотез форма алгоритма решения не изменяется. Для каждого измерения оценки функции y^* вычисляется величина текущего значения коэффициента правдоподобия, которая сравнивается с пороговым значением l_0, и тогда

$$\begin{aligned} &\text{если} \quad l(y) < l_0, \text{ то } y \neq y_{\text{опт}}, \\ &\text{если} \quad l(y) \geqslant l_0, \text{ то } y = y_{\text{опт}}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Измерительно-вычислительное устройство, предназначенное для измерения выходной величины объекта при наличии помех, для автоматической обработки данных измерения и принятия оптимального решения на основе статистических методов, вырастает из рамок простого устройства в статистическую измерительную информационную систему [1], которую, следуя [5], можно назвать р е ш а ю щ е й. Такая система сбора и переработки информации, получая информацию о состоянии объекта в условиях помех, способна принимать оптимальные решения для осуществления основной задачи оптимизации режима работы объекта.

Б л о к-с х е м а с и с т е м ы о п т и м и з а ц и и функции y нескольких переменных x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) (рис. 2) состоит из решающей статистической измерительной системы РСИС, исполнительного устройства ИУ и устройства управления УУ. В системе с периодом повторения $T_п$ проверяется режим работы объекта О, измеряется оценка y^* (3) и на основе алгоритма (6) или (8) принимается решение о необходимости поиска. Если следует начать поиск, то УУ переключает выход ИУ на изменение той или иной входной величины x_i, и в системе осуществляются изменения переменных с целью приведения режима работы объекта к оптимальному. При поочередном изменении входных величин в i-м цикле настройки необходимо:

1) изменять x_i с целью приближения ее к значению $x_{i\,опт}$;

2) анализировать результат изменения.

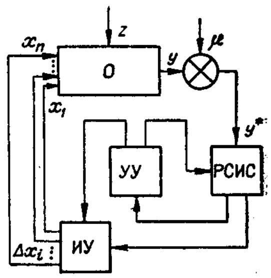

Рис. 2.

Производя итерационный процесс и получая текущую информацию о рабочем режиме объекта, РСИС принимает решения: закончить процесс поиска по i-й величине при достижении ею значения $x_{i\,опт}$ и перейти к поиску по ($i+1$)-й величине или продолжить поиск по x_i^1, если $x_i \neq x_{i\,опт}$, и определить направление следующего рабочего изменения (шага); прекратить процесс поиска при выполнении условия (2) или продолжить, если оно не выполняется.

Э ф ф е к т и в н о с т ь п р о ц е с с а а в т о м а т и ч е с к о г о п о и с к а можно оценить временем поиска, величинами вероятностей верных и неверных решений или ошибками, допускаемыми при принятии решения. Использование статистических методов позволяет выбрать границу решения РСИС таким образом, чтобы минимизировать допускаемые при принятии решения ошибки или вероятности их появления. Если начальное состояние объекта характеризуется зависимостью

$$y = y_0 = f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}),$$

а конечное —

$$y = y_{опт} = f(x_{1\,опт}, x_{2\,опт}, \ldots, x_{n\,опт}),$$

то время, необходимое для полного изменения входных величин от значений $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ до значений $x_{1\,опт}, x_{2\,опт}, \ldots, x_{n\,опт}$, есть время поиска. Оно зависит от алгоритма поиска, включающего в себя метод поиска [2, 3] и правило рабочего изменения переменных [6]. Наиболее распространенные методы поиска — метод Гаусса-Зейделя, градиента и наискорейшего спуска. Метод должен выбираться, исходя из условий каждой конкретной задачи, и рассматриваться совместно с правилом рабочего изменения переменных, с тем чтобы алгоритм поиска обеспечивал быструю сходимость процесса настройки. Оптимальный алгоритм должен учитывать имеющиеся априорные сведения о поведении объекта, текущие сведения о его состоянии и величине отклонения режима работы от оптимального.

Правило рабочего изменения переменных определяет величину и направление рабочих шагов. Если x_{i0} — начальное значение i-й настраиваемой величины, то ее значение после p-го шага равно

$$x_{ip} = x_{i0} + \sum_{k=1}^{p} \Delta x_{ik} = x_{i(p-1)} + \Delta x_{ip}, \tag{9}$$

где Δx_{ik} — величина k-го шага.

В системе оптимизации с решающей статистической измерительной системой (см. рис. 2) целесообразно настройку варьируемых величин x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ производить по косвенному критерию оптимальности — по величине текущего значения коэффициента правдоподобия. После каждого шага (k) определяется значение

$$l_{ik} = \frac{P_k(y/x_{i\,\text{опт}})}{P_k(y/x_i)}, \tag{10}$$

которое сравнивается с пороговым значением l_{i0}. Величина их разности может служить мерой приближения x_i к оптимальному значению. При настройке непосредственно по выходной величине из-за наличия случайных ошибок измерения система с некоторой вероятностью будет совершать шаги в ложном направлении, так как направление рабочего движения определяется из выражения

$$\Delta x_{ik} = a \operatorname{sign}\left[\frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta x_{i(k-1)}} + \mu_k\right],$$

где a — величина шага;

$\Delta y_{k-1} = y_{k-1} - y_{k-2}$ — результат предшествующего шага $\Delta x_{i(k-1)}$;

μ_k — ошибка измерения.

Настройка по величине коэффициента правдоподобия обеспечивает минимальную вероятность ложного шага.

Рабочие изменения можно производить:

1) с постоянным шагом

$$\Delta x_{ik} = a \operatorname{sign}\left[\frac{\Delta l_{i(k-1)}}{\Delta x_{i(k-1)}}\right], \tag{11}$$

где $\Delta l_{i(k-1)} = l_{i(k-1)} - l_{i(k-2)}$;

$l_{i(k-1)}$ — значение коэффициента правдоподобия при изменении x_i после $(k-1)$-го шага;

2) с переменным шагом

$$\Delta x_{ik} = a(l_{i(k-1)}) \operatorname{sign}\left[\frac{\Delta l_{i(k-1)}}{\Delta x_{i(k-1)}}\right] = a_{k-1} \operatorname{sign}\left[\frac{\Delta l_{i(k-1)}}{\Delta x_{i(k-1)}}\right], \tag{12}$$

где $a_{k-1} = a(l_{i(k-1)})$ — переменный шаг, зависящий от значения коэффициента правдоподобия.

На рис. 3 кривая *2* представляет собой возможный вид зависимости $a = a(l)$ (прямая *1* соответствует поиску с постоянным шагом $a_0 =$

$=\mathrm{const}$). По мере приближения l_i к значению l_{i0} величина шага a уменьшается и минимальный шаг равен

$$a_{\min}(l) = a\,[(l_{i0} - l_{i\varepsilon}) \leqslant \varepsilon] = a\,(l_{i\varepsilon} \leqslant l_i < l_{i0}) = a_0, \qquad (13)$$

где ε — некоторое заданное число.

Величина a_0 определяется точностью работы системы. Если число поисковых шагов конечно, то при поиске с переменным шагом (12) можно, задавшись минимальным шагом a_0 (13), при той же точности работы системы уменьшить время поиска по сравнению с поиском с постоянным шагом (11), что вполне очевидно, если длительность шага в том и другом случае одинакова. В общем случае поиск с постоянным шагом не является оптимальным, так как в нем не учитывается степень приближения к требуемым характеристикам, не обеспечивается быстрая сходимость процесса поиска при высокой точности работы системы и, наоборот, высокая точность работы при быстрой сходимости процесса поиска. Возможны и другие законы управления при поиске [6].

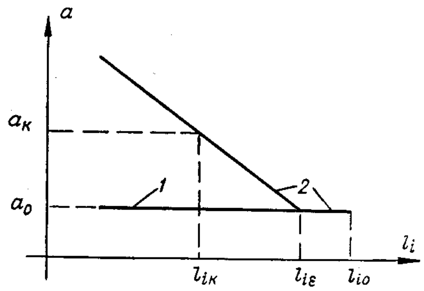

Рис. 3.

Заключение. Если при оптимизации функции нескольких переменных x_1, x_2, ..., x_n(1) измерение значения y сопровождается ошибкой (3), то целесообразно в такой системе применение решающей статистической измерительной системы, обеспечивающей на базе методов теории статистических решений оптимальную стратегию решения (6), (8). На основе измерения текущих значений коэффициента правдоподобия (10) можно создать систему оптимизации с эффективной поисковой процедурой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Синицын. Автоматические корреляторы и их применение. Новосибирск, РИО СО АН СССР, 1964.
2. А. А. Фельдбаум. Вычислительные устройства в автоматических системах. М., Физматгиз, 1959.
3. А. А. Красовский. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М., Физматгиз, 1963.
4. А. Вальд. Последовательный анализ. М., Физматгиз, 1960.
5. J. G. Hsu, W. E. Meserve. Decision-making in adaptive control systems.— IRE Trans. Automat. Control, 1962, № 1.
6. О. В. Кириллов. Автоматический минимизатор однократного действия в дискретных системах автоматической оптимизации.— Теория и применение дискретных автоматических систем (Труды конференции). М., Изд-во АН СССР, 1960.

Поступила в редакцию
23 февраля 1965 г.