А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1965

УДК 62—505

В. М. АЛЕКСАНДРОВ

(Новосибирск)

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Для линейных систем второго порядка с управлением по приращению входного сигнала рассмотрен выбор коэффициента при первой производной, обеспечивающий наименьшее время переходного процесса. Даны рекомендации по выбору коэффициентов при практической реализации таких систем.

Применение теории оптимальных процессов [1] при построении автоматических систем позволяет реализовать наилучшие в смысле принятого критерия качества переходные процессы. Одним из широко используемых в технике критериев качества является минимум времени переходного процесса. Задача синтеза оптимального управления в общем случае сопряжена с большим объемом вычислений, что приводит к сложной технической реализации. Реализация существенно упрощается, если осуществляется переход из некоторой фиксированной точки, принимаемой за начало координат, в точку статического равновесия [2]. В таком режиме, например, могут работать измерительные системы при кусочно-постоянной входной (измеряемой) величине. Управляющим параметром является приращение входного воздействия. Время переходного процесса, как отмечалось в [2], существенным образом зависит от коэффициентов дифференциального уравнения, описывающего измерительную систему. Поэтому выбор последних при использовании оптимального управления представляет некоторый интерес.

В данной работе для объекта второго порядка

$$\ddot{x}+a\dot{x}+cx=bu(t) \qquad (1)$$

при оптимальном управлении по $u(t)$ ставится задача выбора коэффициента a в зависимости от коэффициента c, чтобы время оптимального переходного процесса было минимальным. Рассматривается случай перехода изображающей точки фазового состояния динамической системы из начала координат в точку статического равновесия. Считаем также, что время оптимального переходного процесса меньше времени интервала постоянства кусочно-постоянного входного воздействия $y(t)$. Управление $u(t)$ подчинено неравенству $|u|\leqslant|\Delta y|$, где Δy — приращение входного воздействия $y(t)$.

Такая постановка задачи объясняется тем, что выбор коэффициента c обусловлен требованиями статической точности, в то время как коэффициент a может варьироваться в довольно широких пределах и выбираться из условий качества переходных процессов.

Запишем уравнение (1) в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -ax_2 - cx_1 + bu(t), \end{cases} \tag{2}$$

где x_1, x_2 — фазовые координаты, определяющие состояние объекта.

Для решения поставленной задачи найдем уравнение, связывающее время оптимального переходного процесса T с коэффициентами дифференциального уравнения (1), и продифференцируем по a. Для нахождения уравнения, определяющего время оптимального переходного процесса T, используем метод стыкования фазовых координат, поскольку последние непрерывны при разрывах первого рода управления $u(t)$. Для перехода из начала координат в точку статического равновесия имеем одно переключение управления $u(t)$ в некоторый момент t_1. Поэтому для первого интервала $0 \leqslant t \leqslant t_1$ постоянства управления $u(t)$ можно записать следующее решение для (2):

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dfrac{b}{c} u(0); \\ x_2(t) = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \tag{3}$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения; начальные условия: $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

Для второго интервала $t_1 \leqslant t \leqslant T$ имеем:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t} - \dfrac{b}{c} u(0); \\ x_2(t) = \lambda_1 c_3 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_4 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \tag{4}$$

Точка статического равновесия характеризуется условиями:

$$x_1(T) = \frac{b}{c} u(0); \qquad x_2(T) = 0.$$

Стыкуя фазовые координаты в момент $t = t_1$ и выражая постоянные интегрирования c_i через начальные и конечные координаты и управление $u(0)$, получаем систему из двух трансцендентных (относительно t_1 и T) уравнений:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 (T - t_1)} = 1 + 0{,}5e^{\lambda_1 T}; \\ e^{\lambda_2 (T - t_1)} = 1 + 0{,}5e^{\lambda_2 T}. \end{cases} \tag{5}$$

Исключая $(T - t_1)$, найдем одно трансцендентное (относительно времени оптимального переходного процесса T) уравнение

$$\lambda_2 \ln\left(1 + 0{,}5e^{\lambda_1 T}\right) - \lambda_1 \ln\left(1 + 0{,}5e^{\lambda_2 T}\right) = 0. \tag{6}$$

Известно, что время оптимального переходного процесса при переходе из любой точки фазовой плоскости в начало координат уменьшается по мере перехода от действительных корней к комплексным (за счет вариации коэффициента a) и затем при некотором положительном значении действительной части комплексных корней переход из данной точки становится невозможным, т. е. $T=\infty$. Таким образом, можно предположить, что функция $T=f(a)$ имеет минимум, который расположен в области комплексных корней. Принимая $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$ и используя тригонометрическую форму записи комплексных чисел, уравнение (6) можно записать в виде

$$\alpha\varphi-\beta\ln\rho=0, \tag{7}$$

где

$$\varphi=\operatorname{Arctg}\frac{0{,}5e^{\alpha T}\sin\beta T}{1+0{,}5e^{\alpha T}\cos\beta T};$$

$$\rho=\sqrt{1+e^{\alpha T}\left(\cos\beta T+0{,}25e^{\alpha T}\right)};$$

$$\alpha=-\frac{a}{2};\qquad \beta=\sqrt{c-\alpha^2}.$$

Отсюда видно, что задача определения значения a, при котором T минимально, эквивалентна определению действительной части α корней λ_1, λ_2.

Обозначим (7) через $F(T,\alpha)$. Тогда минимум функции $T=f(\alpha)$, заданной в неявной форме уравнением (7), характеризуется условием

$$\frac{dT}{d\alpha}=-\frac{F'_\alpha(T,\alpha)}{F'_T(T,\alpha)}=0. \tag{8}$$

Минимум функции $T=f(\alpha)$ находим из совместного решения трансцендентных уравнений — (7) и $F'_\alpha(T,\alpha)=0$. Уравнение $F'_\alpha(T,\alpha)=0$ запишем в виде

$$\varphi+\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\ln\rho-\beta\frac{\partial\ln\rho}{\partial\alpha}=0, \tag{9}$$

где

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=\frac{0{,}5Te^{\alpha T}\left[\sin\beta T-\frac{\alpha}{\sqrt{c-\alpha^2}}\left(\cos\beta T+0{,}5e^{\alpha T}\right)\right]}{1+e^{\alpha T}\left(\cos\beta T+0{,}25e^{\alpha T}\right)};$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}=-\frac{\alpha}{\sqrt{c-\alpha^2}};$$

$$\frac{\partial\ln\rho}{\partial\alpha}=\frac{0{,}5Te^{\alpha T}\left(\cos\beta T+0{,}5e^{\alpha T}+\frac{\alpha}{\sqrt{c-\alpha^2}}\sin\beta T\right)}{1+e^{\alpha T}\left(\cos\beta T+0{,}5e^{\alpha T}\right)}.$$

В результате численных расчетов по приведенным выше формулам получаем, что минимальное время $T_{\min}$ оптимального переходного процесса имеет место при выполнении следующих условий:

$$\beta T=\frac{\pi}{2}; \tag{10}$$

$$t_1=\frac{1}{2}T. \tag{11}$$

Из уравнений (5) с учетом условия (11) получаем

$$\alpha T = \ln 2. \tag{12}$$

Тогда отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ при минимальном времени оптимального переходного процесса есть величина постоянная, не зависящая от параметров объекта:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\ln 4}{\pi}. \tag{13}$$

Кроме того, из (12) следует, что $\alpha > 0$, так как $T > 0$. Это означает, что исходная система (1) при переходе из начала координат в точку статического равновесия для обеспечения наименьшего времени при использовании оптимального управления по u должна быть неустойчивой и иметь сопряженные комплексные корни с положительной действительной частью. Последнюю можно выразить через коэффициент c, используя выражения для β и (13), соотношением

$$\alpha = \sqrt{c \cdot \frac{\ln 8}{\pi^2 + \ln 8}}. \tag{14}$$

Отсюда искомое значение a^*, обеспечивающее минимальное время $T_{\min}$, определяется как

$$a^* = -2\sqrt{\frac{c \cdot \ln 8}{\pi^2 + \ln 8}}, \tag{15}$$

а минимальное время —

$$T_{\min} = \frac{\ln 2}{\sqrt{c \cdot \frac{\ln 8}{\pi^2 + \ln 8}}}. \tag{16}$$

Выражения (15) и (16) позволяют при принятом значении c просто получить необходимое значение a^* и минимальное время переходного процесса $T_{\min}$. Если оно недостаточно, то следует либо изменить c, либо воспользоваться предварительным усилением приращений входного сигнала. В первом случае требуемое значение c легко определяется из (16). Во втором случае управление u подчинено неравенству

$$|u| \leqslant k|\Delta y|, \qquad k > 1,$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности.

Основное уравнение (6) имеет вид

$$\lambda_2 \ln\left(\frac{1}{k} + 0{,}5e^{\lambda_1 T}\right) - \lambda_1 \ln\left(\frac{1}{k} + 0{,}5e^{\lambda_2 T}\right) = 0. \tag{17}$$

Минимальное время $T_{\min}$ и значение коэффициента a^*, обеспечивающее это минимальное время, находятся на основе совместного решения двух трансцендентных уравнений [типа (7) и (9)], полученных из уравнения (17).

Как было показано выше, минимальное время оптимального переходного процесса при вариации коэффициента a достигается для неустойчивой исходной системы (1) при взаимно сопряженных комплексных корнях характеристического уравнения с положительной действительной частью. Нарушение устойчивости является препятствием на пути практической реализации таких режимов работы. Эту трудность, однако, легко устранить, если имеется возможность управлять коэффициентом a в переходном процессе. Тогда коэффициент a на время переходного процесса $T_{\min}$ принимается равным a^* (15), а в момент прихода в точку статического равновесия — таким, чтобы обеспечивалась устойчивость исходной системы (1). Такой режим возможен за счет переключения, например, обратной связи по производной от регулируемой величины x. Для случая, когда возможно управление только коэффициентом a или вообще коэффициентами исходной системы, описываемой дифференциальным уравнением n-го порядка, можно предложить еще более эффективный способ управления [3]. Если управление по a в переходном процессе невозможно, то полученные в работе выражения можно рассматривать как предельные, показывающие потенциальные возможности таких систем. При практической реализации коэффициент a выбирается, с одной стороны, таким, чтобы исходная система была устойчивой. С другой стороны, для уменьшения времени переходного процесса его следует выбирать таким, чтобы система приближалась к границе устойчивости. Для такой системы имеем взаимно сопряженные комплексные корни с отрицательной действительной частью и время переходного процесса определяется из решения трансцендентного уравнения (7).

Для примера рассмотрим систему второго порядка с коэффициентом $c=0{,}02$. Наименьшее значение времени переходного процесса при оптимальном управлении достигается при $a^*=-0{,}118$ (15) и составляет $T_{\min}=11{,}75$ *сек* (16). Наименьшее время переходного процесса без применения оптимального управления достигается при настройке системы на критический апериодический процесс, т. е. при $a=0{,}283$.

Считая временем установления показаний время вхождения в 1%-ю зону установившегося значения, имеем $t=32{,}56$ *сек*, а для 0,1%-й зоны — 48,8 *сек*. Соответственно быстродействие повышается в 2,77 и 4,15 раза. Если исходное значение a отличается от 0,283, то имеем еще больший выигрыш в увеличении быстродействия.

ВЫВОД

Найдены простые выражения для определения наименьшего времени переходного процесса $T_{\min}$ и выбора коэффициента a^*, обеспечивающего это время для линейной системы второго порядка при использовании оптимального управления. Полученные соотношения можно рассматривать как предельные для оценки возможного быстродействия существующих систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
2. В. М. Александров, Б. Г. Матиенко, А. А. Нестеров. Уменьшение времени установления показаний для линейных измерительных систем n-го порядка.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, серия техн. наук, 1964, вып. 1, № 2.
3. В. М. Александров, А. А. Нестеров. Оптимальные процессы в линейных измерительных системах.— Автометрия, 1965, № 2.

Поступила в редакцию
16 марта 1965 г.