А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 3 1965

УДК 621.317.733.025

Б. Н. ДУДКЕВИЧ, Т. А. ЖУРАВЛЕВА
(*Новосибирск*)

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗДЕЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ КОМПЛЕКСНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Показано, что решение вопроса о раздельном измерении составляющих комплексного сопротивления облегчается, если исследовать на комплексной плоскости расположение особых точек функции отношения двух напряжений исследуемой цепи.

Возможность раздельного измерения параметров электрических цепей и простота измерительного процесса обеспечили квазиуравновешенным мостам широкое применение во многих областях техники. Поэтому разработка методов их анализа и синтеза представляет существенный интерес.

Впервые анализ квазиуравновешенных цепей проведен К. Б. Карандеевым и Г. А. Штамбергером на основе обобщенного уравнения мостовой цепи [1]:

$$W = |W| e^{j\theta} = \frac{a Z_1 + b}{c Z_1 + d},$$

где W — вектор отношения двух напряжений цепи;
$|W|$, θ — модуль и фаза этого вектора;
$Z_1 = R_1 + jX_1 = |Z_1| e^{j\varphi_1}$ — измеряемое сопротивление;
a, b, c, d — в общем случае комплексные коэффициенты, представляющие собой комбинации известных сопротивлений цепи.

Как известно, по соотношениям между коэффициентами W [2, 3] можно судить об осуществимости раздельного измерения составляющих Z_1. Однако, как будет показано ниже, решение вопроса о раздельном измерении может оказаться более простым и наглядным при исследовании расположения на комплексной плоскости особых точек функции W, записанной следующим образом:

$$W = k \frac{Z_1 - \alpha}{Z_1 - \beta},$$

где $\alpha = -\dfrac{b}{a} = \alpha_1 + j\alpha_2$ — нуль функции W;
$\beta = -\dfrac{d}{c} = \beta_1 + j\beta_2$ — полюс W;
$k = \dfrac{a}{c}$.

В частных случаях
при $a=0$

$$W = k\,\frac{1}{Z_1 - \beta} \tag{2}$$

$\left(k = \frac{b}{c};\right.$ β — одиночный полюс)
и при $c=0$

$$W = k(Z_1 - \alpha)$$

$\left(k = \frac{a}{d};\right.$ α — одиночный нуль).

Для получения условий раздельного измерения составляющих Z_1 предлагаемым способом полезно использовать аналогию между функцией

$$\ln W = \ln|W| + j\theta = \ln k + \ln(Z_1 - \alpha) - \ln(Z_1 - \beta)$$

и выражением комплексного потенциала электростатического поля двух разноименно заряженных осей с координатами α и β (или одной оси, если одна из особых точек отсутствует) [4]. Это обеспечивает наглядность анализа и избавляет от лишних выкладок.

По аналогии с напряженностью поля $-\mathrm{grad}[\ln W]$ равен вектору $\dot{E}$, сопряженному величине $-\frac{d\ln W}{dZ_1}$.

$$\dot{E} = -\overline{\frac{d\ln W}{dZ_1}} = -\frac{1}{\bar{Z}_1 - \bar{\alpha}} + \frac{1}{\bar{Z}_1 - \bar{\beta}} = -\frac{\partial \ln|W|}{\partial R_1} + j\frac{\partial\theta}{\partial R_1} = j\frac{\partial\ln|W|}{\partial X_1} - \frac{\partial\theta}{\partial X_1} = E_{R_1} + jE_{X_1},$$

где черта — знак сопряженности.

Из приведенного выражения следует, что

$$E_{R_1} = -\frac{\partial\ln|W|}{\partial R_1} = -\frac{\partial\theta}{\partial X_1}; \qquad E_{X_1} = -\frac{\partial\ln|W|}{\partial X_1} = \frac{\partial\theta}{\partial R_1}.$$

Представляя Z_1 в полярной форме, получаем

$$\dot{E} = \left(-\frac{\partial\ln|W|}{\partial|Z_1|} + j\frac{\partial\theta}{\partial|Z_1|}\right)e^{-j\varphi_1} = \left(-j\frac{\partial\ln|W|}{\partial\varphi_1} - \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\right)\times \frac{e^{-j\varphi_1}}{|Z_1|} = E_{|Z_1|} + jE_{\varphi_1},$$

откуда

$$E_{|Z_1|} = -\frac{\partial\ln|W|}{\partial|Z_1|}\,e^{-j\varphi_1} = -\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{e^{-j\varphi_1}}{|Z_1|};$$

$$E_{\varphi_1} = \frac{\partial\theta}{\partial|Z_1|}\,e^{-j\varphi_1} = -\frac{e^{-j\varphi_1}}{|Z_1|}\cdot\frac{\partial\ln|W|}{\partial\varphi_1}.$$

Составляющие градиента функции $\ln|W|$ для двух особых точек показаны на рис. 1, *а*. Этот вектор, как и вектор напряженности, всегда касателен к окружностям, проходящим через α, β и Z_1, с центром на перпендикуляре к середине отрезка $\alpha-\beta$. Картина для одной особой точки представлена на рис. 1, *б*.

Как известно, квазиуравновешенные цепи приводятся к такому состоянию, когда изменение модуля или аргумента отношения напряжений W (соответственно в модульном или фазовом режимах измерения)

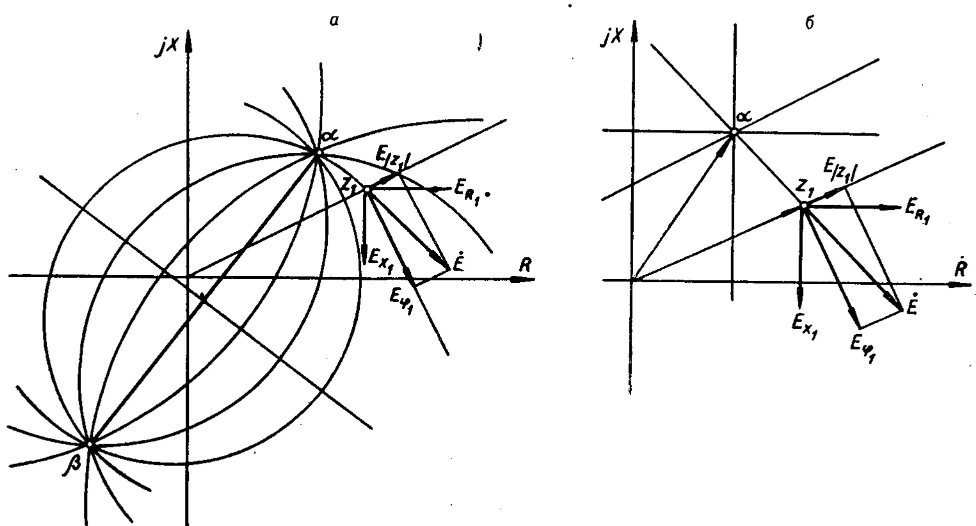


Рис. 1.

зависит только от изменения измеряемой составляющей Z_1. Иначе говоря, в этих цепях обеспечиваются условия инвариантности $|W|$ или Θ по неизмеряемому параметру

$$\frac{\partial|W|}{\partial p}=0\left(\frac{\partial\ln|W|}{\partial p}=0\right)\text{ или }\frac{\partial\theta}{\partial p}=0$$

во всем диапазоне значений неизмеряемого параметра p.

Определить расположение особых точек, удовлетворяющих тому или иному условию раздельного измерения, несложно, если исследовать характер линий градиента функции $\ln|W|$.

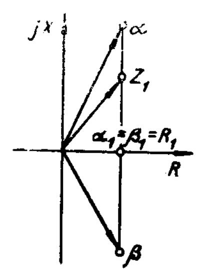
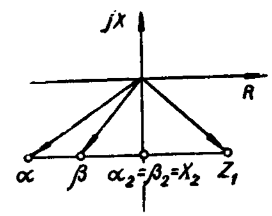
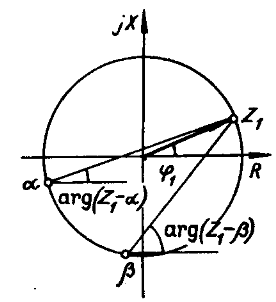
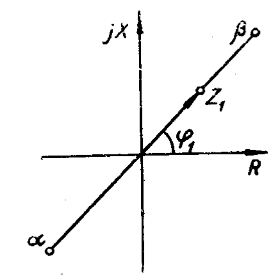
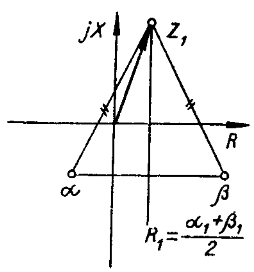
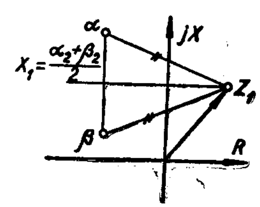
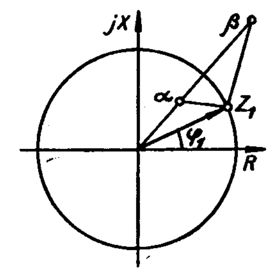
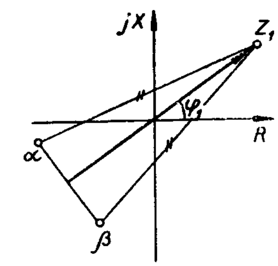
Рассмотрим вначале фазовый режим измерения, причем на первом этапе не будем учитывать характера постоянной k, полагая, например, $k=1$.

Раздельному измерению активной составляющей соответствует условие $E_{R_1}=-\frac{\partial\theta}{\partial X_1}=0$. Составляющая градиента обращается в нуль во всем диапазоне X_1 только при расположении особых точек на одной прямой с Z_1, перпендикулярной действительной оси (см. рис. 1, *а*).

Расположение особых точек для всех случаев раздельного измерения составляющих Z_1 в модульном и фазовом режимах приводится в таблице.

В момент измерения R_1 выполняется соотношение $\alpha_1=\beta_1=R_1$ для двух особых точек, $\alpha_1=R_1$ или $\beta_1=R_1$ — для одиночной особой точки.

Нетрудно установить, что приведение цепи к квазиравновесию может осуществляться только путем параллельного переноса прямой, пер-

<table>
<tr><th rowspan="2">Режим изме-рения</th><th colspan="4">Расположение нуля и полюса в момент квазиравновесия при раздельном измерении составляющих Z_1</th></tr>
<tr><th>R_1</th><th>X_1</th><th>$|Z_1|$</th><th>φ_1</th></tr>
<tr><td>Фазовый</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td></tr>
<tr><td>Модульный</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td></tr>
</table>

пендикулярной к действительной оси и проходящей через особые точки. Иначе говоря, в случае двух особых точек α_1 и β_1 должны одинаково зависеть от регулируемого параметра и для любого состояния цепи быть тождественно равными. Квазиравновесие невозможно при отрицательных α_1 и β_1.

Раздельное измерение реактивной составляющей осуществимо при $E_{X_1} = \frac{\partial\theta}{\partial R_1} = 0$, что выполняется для всех R_1, если $\alpha_2 = \beta_2 = X_1$ для двух особых точек и $\alpha_2 = X_1$ или $\beta_2 = X_1$ для одиночной особой точки.

Аналогично предыдущему случаю равенство $\alpha_2 = \beta_2$ должно выполняться в любом состоянии цепи. Очевидно, что при $\alpha_2 = \beta_2 > 0$ можно измерять индуктивную составляющую, а при $\alpha_2 = \beta_2 < 0$ — емкостную.

При раздельном измерении модуля необходимо, чтобы $E_{|Z_1|} = -$ чение составляющей градиента $e_{\varphi_1} = \frac{\partial\theta}{\partial|Z_1|} \cdot e^{-j\varphi_1}$ для всех значений $|Z_1|$. В момент квазиравновесия измеряемый фазовый угол определяется из следующих выражений:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \operatorname{arctg}\frac{\beta_2}{\beta_1}$$

(для двух особых точек);

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad \text{или} \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{\beta_2}{\beta_1}$$

(для одной особой точки).

При существовании обеих особых точек соотношение $\alpha = \pm n\beta$ должно выполняться в любом состоянии цепи.

Рассмотрим характер постоянной k для всех случаев раздельного измерения в фазовом режиме. С учетом k угол Θ между напряжениями цепи в момент квазиравновесия для всего диапазона значений неизмеряемого параметра p определяется следующими соотношениями:

$$\Theta = \Theta' + \arg k = \arg(Z_1 - \alpha) - \arg(Z_1 - \beta) + \arg k = \text{const}$$

(для двух особых точек),

$$\Theta = \Theta' + \arg k = \arg(Z_1 - \alpha) + \arg k = \text{const}$$

или

$$\Theta = \Theta' + \arg k = -\arg(Z_1 - \beta) + \arg k = \text{const}$$

(для одной особой точки).

Из предыдущего следует, что при раздельном измерении R_1, X_1, φ_1 в случае двух особых точек и $|Z_1|$, когда $\alpha = -\beta$, угол Θ' равен нулю, π или $\pi/2$ и не изменяется при изменении p.

Поскольку с помощью применяемых в измерительной практике фазовых указателей можно фиксировать углы Θ, равные $0°$, π, $\pi/2$, и применение фазовых цепочек нежелательно (из-за увеличения погрешности, частотной зависимости и т. д.), то необходимо, чтобы в отмеченных выше случаях $\arg k$ имел любой из указанных углов, что соответствует мнимому или действительному k. При этом условие $\arg k = \mathrm{const}$ выполняется всегда.

Так как при раздельном измерении модуля Θ' может быть любым углом, то $\arg k$ должен дополнить Θ' до 0, π либо $\pi/2$, что возможно при комплексном k.

Рассмотрим характер k при раздельном измерении фазового угла, когда существует одна особая точка. При этом $\Theta = \arg k + \arg(Z_1 - \alpha) = \arg k + \varphi_1$ для одиночного нуля, $\Theta = \arg k - \arg(Z_1 - \beta) = \arg k - \varphi_1$ для одиночного полюса.

В обоих случаях $\arg k$ должен дополнять измеряемый фазовый угол до 0, π либо $\pi/2$. Для получения угла Θ, равного 0 или π, необходимо, чтобы при одиночном нуле $k = \pm n\underline{\alpha}$ и $k = \pm n\beta$ при одиночном полюсе.

При условиях $k_1 = n\alpha_2$, $k_2 = n\alpha_1$ и $k_1 = n\beta_2$, $k_2 = -n\beta_1$ соответственно для одиночных нуля и полюса $\arg k$ дополняет измеряемый угол до $\Theta = 90^\circ$. Указанные соотношения между k и одиночной особой точкой должны удовлетворяться в любом произвольном состоянии цепи.

В частном случае, если одиночная особая точка нулевая ($\alpha = 0$ или $\beta = 0$) при комплексном k всегда можно цепь привести к такому состоянию, когда $\arg k$ в сумме с измеряемым фазовым углом φ_1 составит 0, π либо $\pi/2$. При этом φ_1 будет определяться через arctg отношения мнимой и действительной составляющих k.

Перейдем к рассмотрению модульного режима измерения, полагая $k = 1$. Для раздельного измерения активной составляющей необходимо, чтобы для всех X_1 не нарушалось равенство нулю составляющей градиента $E_{X_1} = -\dfrac{\partial \ln |W|}{\partial X_1}$, что возможно при $\alpha_2 = \beta_2$ и $R_1 = \dfrac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$.

Раздельное измерение реактивной составляющей выполнимо при $E_{R_1} = -\dfrac{\partial \ln |W|}{\partial R_1} = 0$ во всем диапазоне значений R_1. Для этого необходимо, чтобы в момент квазиравновесия выполнялись соотношения

$$X_1 = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} \text{ и } \alpha_1 = \beta_1.$$

Раздельному измерению фазового угла соответствует $E_{|Z_1|} = -\dfrac{\partial \ln |W|}{\partial |Z_1|} e^{-j\varphi_1} = 0$, что имеет место при $|\alpha| = |\beta|$ и $\varphi_1 = \mathrm{arctg} \times \dfrac{\beta_2 - \alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}$.

Заметим, что условия $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_1 = \beta_1$ и $|\alpha| = |\beta|$ должны быть справедливы для любого состояния цепи, когда раздельно измеряется активная, реактивная составляющие и фазовый угол комплексного сопротивления Z_1. При одиночной особой точке никогда не выполняются условия раздельного измерения перечисленных параметров.

Итак, для всех рассмотренных случаев модульного режима в момент квазиравновесия α и β находятся на одинаковом расстоянии от Z_1, т. е. $|Z_1 - \alpha| = |Z_1 - \beta|$, а следовательно, и $|W| = |k|$.

Так как при квазиравновесии устанавливается равенство или определенное соотношение $(2, 3, \ldots, n)$ между модулями сравниваемых напряжений, то постоянная k может быть действительным, мнимым и комплексным выражением, модуль которого в момент измерения равен $|k| = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Остановимся на раздельном измерении модуля. При раздельном измерении $|Z_1|$ необходимо, чтобы

$$E_{\varphi_1} = -\frac{e^{-j\varphi_1}}{|Z_1|} \cdot \frac{\partial \ln |W|}{\partial \varphi_1} = 0$$

для всех значений φ_1.

Это возможно при выполнении следующих условий в случае двух особых точек:

$$\alpha = n\beta \text{ и } |Z_1|^2 = \frac{|\alpha|^2}{n}.$$

При этом $|Z_1 - \alpha| \neq |Z_1 - \beta|$, поэтому модуль k определяется

$$|k| \cdot \frac{|Z_1 - n\beta|}{|Z_1 - \beta|} = 1, 2, \ldots, n.$$

Если исследуемая функция отношения напряжений имеет нулевую одиночную особую точку, то регулировкой параметра, входящего в k (очевидно, целесообразнее, когда k — действительный или мнимый параметр цепи), можно достигнуть состояния квазиравновесия цепи, при котором осуществимо раздельное измерение модуля Z_1. В момент квазиравновесия

$$|Z_1| = \frac{|W|}{|k|} \text{ для } \alpha = 0 \text{ и } |Z_1| = \frac{|k|}{|W|} \text{ для } \beta = 0.$$

Рассмотрим на примере известной мостовой цепи [1], изображенной на рис. 2, использование изложенной методики анализа. С помощью данной мостовой цепи можно раздельно измерить $|Z_1|$, R_1 X_1, φ_1, устанавливая определенные модульные и фазовые соотношения между напряжениями: $\dot U_{cd}$ и $\dot U_{ck}$, $\dot U_{da}$ и $\dot U_{dc}$, $\dot U_{bc}$ и $\dot U_{bd}$, $\dot U_{ca}$ и $\dot U_{ck}$.

Возьмем отношение напряжений $\dot U_{cd}$ и $\dot U_{ck}$, которое выражается через параметры цепи следующим образом:

$$\frac{\dot U_{cd}}{\dot U_{ck}} = \frac{Z_1 R_3 - R_4 (R_2 - jX_2)}{R_2 (R_3 + R_4)},$$

откуда

$$\alpha = \frac{R_4}{R_3}(R_2 - jX_2); \quad k = \frac{R_3}{R_2 (R_3 + R_4)}; \quad \arg k = 0.$$

Как видно из рис. 3, при регулировке R_4 α последовательно занимает положения $\alpha'(\Theta = \arg k + \arg(Z_1 - \alpha') = 0°)$ и $\alpha''(\Theta = \arg k + \arg(Z_1 - \alpha'') = 90°)$, при которых $X_1 = \alpha_2 = \frac{R_4}{R_3} X_2$ и $R_1 = \alpha_1 = \frac{R_4}{R_3} R_2$. При установлении нулевого фазового сдвига между исследуемыми напряжениями раздельно измеряется X_1, а при квадратуре между ними — R_1.

Рассмотрим отношение напряжений

$$\frac{\dot U_{da}}{\dot U_{dc}} = \frac{Z_1 R_3 + R_3 (R_2 - jX_2)}{Z_1 R_3 - R_4 (R_2 - jX_2)},$$

имеющее и нуль, и полюс. Нетрудно видеть, что $|\alpha|$ будет равно $|\beta|$

только при $R_3=R_4$. Тогда в фазовом режиме измерения при квадратуре напряжений $\dot{U}_{da}$ и $\dot{U}_{dc}$ ($\arg(Z_1-\alpha)-\arg(Z_1-\beta)=90°$; $k=1$) возможно раздельно измерить $|Z_1|$

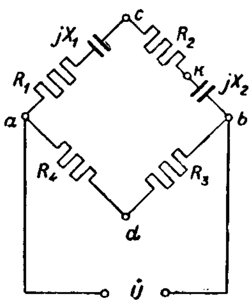


Рис. 2.

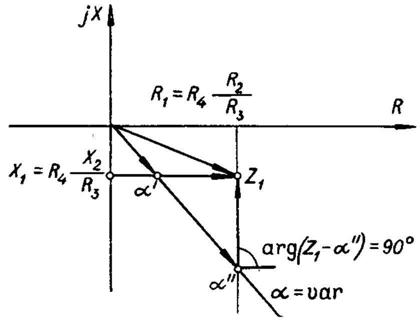


Рис. 3.

При установлении равенства модулей тех же напряжений ($|W|=$ $=1$) можно измерить φ_1, так как особые точки ($\alpha=-\beta$) всегда могут быть приведены на перпендикуляр к прямой, проходящей через начало координат и Z_1. В момент квазиравновесия

$$\varphi_1=\operatorname{arctg}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\operatorname{arctg}\frac{\beta_1}{\beta_2}=\operatorname{arctg}\left(-\frac{R_2}{X_2}\right).$$

При раздельном измерении φ_1 и $|Z_1|$, очевидно, в качестве регулируемого параметра выбирается либо R_2, либо X_2. Установив нулевой фазовый сдвиг между $\dot{U}_{bc}$ и $\dot{U}_{bd}$ $\left[\frac{\dot{U}_{bd}}{\dot{U}_{bc}}=\frac{R_2(R_3+R_4)-jX_2(R_3+R_4)}{R_3Z_1+R_3(R_2-jX_2)}\right]$, можно также измерить фазовый угол, поскольку выполняется соотношение

$$k=-n\beta=\frac{R_3+R_4}{R_3}(R_2-jX_2).$$

В модульном режиме измерения при равенстве модулей напряжений $\dot{U}_{ca}$ и $\dot{U}_{ck}$ измеряется модуль Z_1.

Итак, исследование расположения особых точек функций отношения рассмотренных выше напряжений позволяет сравнительно просто оценить возможность раздельного измерения всех параметров $|Z_1|$.

Очевидно, что описанная методика анализа квазиуравновешенных цепей может быть применена и при представлении измеряемого сопротивления параллельной схемой замещения. В этом случае условия раздельного измерения составляющих проводимости Y_1 аналогичны условиям раздельного измерения составляющих сопротивления Z_1.

Итак, зная для конкретной цепи функцию W, по характеру особых точек и постоянной k этой функции легко установить, осуществимо ли раздельное измерение составляющих комплексного сопротивления Z_1 при использовании цепи в модульном и фазовом режимах. При этом достаточно просто определяется значение измеряемого параметра и параметра, с помощью которого цепь может быть приведена к заданному состоянию.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке методики синтеза квазиуравновешенных цепей, которая основывается на выборе цепи по заданному расположению особых точек.

3. К. М. Соболевский. Основы синтеза квазиуравновешенных цепей для раздельного измерения составляющих комплексных величин.— Автоматический контроль и методы электрических измерений (Труды IV конференции, 1962 г.), т. I. Новосибирск, РИО СО АН СССР, 1964.
4. А. В. Нетушил, К. И. Поливанов. Основы электротехники, ч. III. М.—Л., Госэнергоиздат, 1956.

Поступила в редакцию
23 февраля 1965 г.