

В. М. БАБУРИН, М. Л. РООС
(Москва)

**ОШИБКИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ
ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АНАЛОГОВЫХ УСТРОЙСТВ
И ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН**

Работа посвящена оценке погрешности интегральной функции распределения, определяемой по экспериментальным данным; приведены соотношения для среднеквадратической погрешности в зависимости от времени наблюдения и для выбора интервала дискретизации случайного процесса при вычислении функции распределения с помощью цифровой вычислительной машины (ЦВМ).

Показано, как можно оценивать приборную погрешность специализированного устройства для определения функции распределения. Определена связь числа точек функции с ошибкой аппроксимации и методической погрешностью.

Во многих областях техники при исследовании случайных процессов необходимо определять интегральную функцию распределения уровней. Такая задача возникает, например, при оценке погрешности статистических характеристик — корреляционных функций, спектральных плотностей — из-за необходимости проверки нормальности анализируемых случайных процессов [1].

Определение функции распределения в ряде частных случаев помогает решать задачи анализа и синтеза нелинейных систем автоматического управления, работающих под воздействием случайных сигналов [2, 3]. Весьма широко используются функции распределения в теории прочности и строительной механике, в исследованиях погрешностей различного рода механизмов [4, 5].

Задача определения функции распределения может быть решена с помощью той или иной статистической измерительной информационной системы (СИИС), поскольку ее решение связано с большим объемом вычислительных работ. Поэтому на практике вычисление функций распределения часто бывает необходимо при использовании современных вычислительных систем — специализированных устройств или универсальных цифровых вычислительных машин [6—9].

Поскольку функция распределения определяется экспериментально, то весьма важным является точность и достоверность ее оценки, зависимость ее от объема исследуемого материала (длины реализации), числа точек, способа аппроксимации и приборной погрешности.

Цель настоящей работы — систематизировать и уточнить оценку интегральной функции распределения уровней, дать рекомендации по

выбору времени наблюдения, определить необходимый интервал разбиения случайного процесса и представить теоретические результаты в виде, удобном для инженерных расчетов как на специализированных устройствах, так и на универсальных цифровых вычислительных машинах.

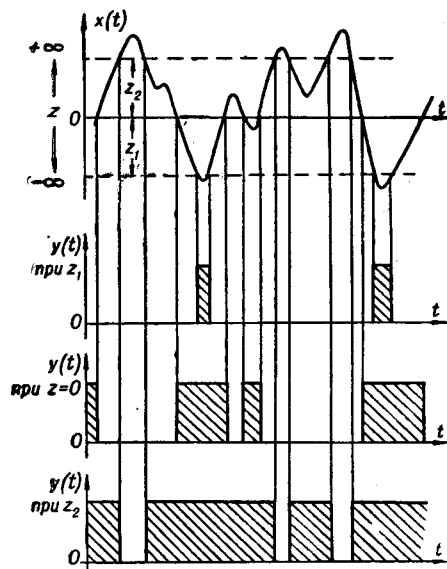
Оценка погрешности определения функции распределения в зависимости от времени наблюдения и уровня случайного процесса

1. Пусть $x(t)$ — некоторый стационарный эргодический случайный процесс, заданный реализацией на отрезке $[0, T]$, а $F(z) = P[x(t) \leq z]$ — функция распределения процесса $x(t)$ (здесь P — символ вероятности). Часто для $F(z)$ употребляется следующая оценка [10, 11]:

$$F^*(z) = \frac{T_z}{T}, \quad (1)$$

где T_z — суммарное время, в течение которого $x(t) \leq z$.

Будем считать z произвольным, но фиксированным, и для этого случая введем новый процесс $y(t)$, связь которого с первоначальным исследуемым процессом $x(t)$ можно проиллюстрировать рис. 1.



При этом

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } x(t) \leq z, \\ 0 & \text{при } x(t) > z. \end{cases} \quad (2)$$

Ясно, что имеют место следующие соотношения:

$$M[y(t)] = P[x(t) \leq z] = F(z); \quad (3)$$

$$F^*(z) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt. \quad (4)$$

Покажем, что оценка функции распределения, согласно (4), а сле-

Рис. 1. Связь между процессами $y(t)$ и $x(t)$.

довательно, и (1), является несмещенной. Используя соотношение (4), получаем

$$M[F^*(z)] = \frac{1}{T} \int_0^T M[y(t)] dt. \quad (5)$$

Математическое ожидание процесса $y(t)$ является постоянным числом, поэтому

$$\frac{1}{T} \int_0^T M[y(t)] dt = \frac{1}{T} M[y(t)] \int_0^T dt = M[y(t)].$$

Используя (3)—(5), находим

$$M[F^*(z)] = F(z).$$

Поскольку оценка функции распределения является несмещенной, то ее отклонение от истинного значения $F(z)$ можно характеризовать дисперсией или среднеквадратическим отклонением $\sigma_F(z)$, которое и примем за меру точности:

$$\sigma_F^2(z) = M \{ [F^*(z)]^2 \} - F^2(z). \quad (6)$$

Учитывая (4), можно получить

$$\sigma_F^2(z) = M \left[\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \right]^2 - F^2(z). \quad (7)$$

Откуда, учитывая условие эргодического процесса $y(t)$, выражение (7) можно привести к виду [12]:

$$\sigma_F^2(z) = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{yy}(\tau) d\tau - F^2(z), \quad (8)$$

где $R_{yy}(\tau)$ — автокорреляционная функция процесса $y(t)$.

Если рассматривать центрированный процесс $y_0(t)$, где $y_0(t) = y(t) - M[y(t)]$, то (8) преобразуется в

$$\sigma_F^2(z) = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{y_0 y_0}(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где $R_{y_0 y_0}(\tau)$ — автокорреляционная функция процесса $y_0(t)$.

Если учесть, что $T \gg \tau$, то выражения (8), (9) упрощаются:

$$\sigma_F^2(z) = \frac{2}{T} \int_0^T R_{yy}(\tau) d\tau - F^2(z); \quad (10)$$

$$\sigma_F^2(z) = \frac{2}{T} \int_0^T R_{y_0 y_0}(\tau) d\tau. \quad (11)$$

2. Используя (3) и (4), можно предложить блок-схему устройства для определения интегральной функции распределения, состоящую из нелинейного элемента релейного типа с переменным порогом срабатывания z и интегратора (рис. 2).

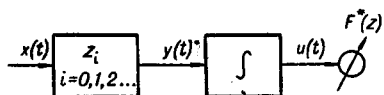


Рис. 2. Блок-схема для определения функции распределения.

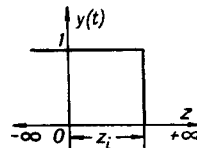


Рис. 3. Характеристика нелинейного звена с переменным порогом срабатывания z .

Обращаясь к рис. 2 и учитывая выражение (11), можно поставить задачу вычисления $\sigma_F(z)$ через определение корреляционной функции процесса на выходе нелинейного звена релейного типа с переменным порогом срабатывания z (рис. 3).

Пусть на входе нелинейного звена действует стационарный нормальный случайный процесс $x(t)$ с математическим ожиданием m_x , дисперсией σ_x^2 и нормированной корреляционной функцией $r_{xx}(\tau)$; при этом $r_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2}$.

Используя метод разложения корреляционной функции $R_{y_0 y_0}(\tau)$ по степеням $r_{xx}(\tau)$ [12], можно показать, что

$$R_{y_0 y_0}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^2(\xi)}{n!} r_{xx}^n(\tau), \quad (12)$$

где

$$E_n(\xi) = \varphi^{(n-1)}(\xi); \quad \varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}; \quad \xi = \frac{z - m_x}{\sigma_x}.$$

Значения $E_n(\xi)$ приведены в [12] для $n=1 \div 7$.

Раскрывая сумму выражения (12), определим

$$R_{y_0 y_0}(\tau) = \frac{1}{2\pi} e^{-\xi^2} \left[r_{xx}(\tau) + \frac{\xi^2}{2} r_{xx}^2(\tau) + \frac{\xi^4 - 2\xi^2 + 1}{6} r_{xx}^3(\tau) + \right. \\ \left. + \frac{\xi^6 - 6\xi^4 + 9\xi^2}{24} r_{xx}^4(\tau) + \dots \right]. \quad (13)$$

Для $m_x = 0$ получаем

$$R_{y_0 y_0}(\tau) = \frac{1}{2\pi} e^{-\left(\frac{z}{\sigma_x}\right)^2} \left[r_{xx}(\tau) + \frac{\left(\frac{z}{\sigma_x}\right)^2}{2} r_{xx}^2(\tau) + \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{z}{\sigma_x}\right)^4 - 2\left(\frac{z}{\sigma_x}\right)^2 + 1}{6} r_{xx}^3(\tau) + \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{z}{\sigma_x}\right)^6 - 6\left(\frac{z}{\sigma_x}\right)^4 + 9\left(\frac{z}{\sigma_x}\right)^2}{24} r_{xx}^4(\tau) + \dots \right]. \quad (14)$$

При этом, учитывая практически возможные значения случайного процесса, принимаем $|z| < 3\sigma_x$ [13].

При $z=0$ выражение (14) упрощается и принимает вид

$$R_{y_0 y_0}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[r_{xx}(\tau) + \frac{1}{6} r_{xx}^3(\tau) + \dots \right]. \quad (15)$$

Анализируя (12)–(15), следует отметить, что первые слагаемые в этих рядах соответствуют тому слагаемому выходного сигнала, корреляционная функция которого совпадает по форме с корреляционной функцией входного сигнала, а остальные слагаемые соответствуют искажениям, вносимым нелинейным элементом. Эти искажения обычно незначитель-

ны в силу убывания коэффициентов ряда, как $\frac{1}{n!}$, а также из-за уменьшения $r_{xx}^n(\tau)$, так как $|r_{xx}(\tau)| < 1$ при $\tau > 0$. Более существенными оказываются искажения при $m_x \neq 0$ или $z \neq 0$, так как в этом случае коэффициент при $r_{xx}^2(\tau)$ возрастает с увеличением $\frac{m_x}{\sigma_x}$ или $\frac{z}{\sigma_x}$.

Таким образом, при расчетах $R_{y_0, y_0}(\tau)$ для определения среднеквадратической погрешности функции распределения мы можем ограничиться первым слагаемым ряда, вводя коэффициент 1,5—2 из-за отбрасывания остальных членов:

$$R_{y_0, y_0}(\tau) \approx \frac{0,75 \div 1}{\pi} e^{-\left(\frac{z - m_x}{\sigma_x}\right)^2} r_{xx}(\tau); \quad (16)$$

$$R_{y_0, y_0}(\tau) \approx \frac{0,75 \div 1}{\pi} e^{-\left(\frac{z}{\sigma_x}\right)^2} r_{xx}(\tau), \quad m_x = 0; \quad (17)$$

$$R_{y_0, y_0}(\tau) \approx \frac{0,75 \div 1}{\pi} r_{xx}(\tau), \quad z = 0, \quad m_x = 0. \quad (18)$$

Используя выражения (10), (17) и (18), определим $\sigma_F(z)$ и $\sigma_F(0)$:

$$\sigma_F^2(z) \approx \frac{1,5 \div 2}{\pi T} e^{-\left(\frac{z}{\sigma_x}\right)^2} \int_0^T r_{xx}(\tau) d\tau; \quad (19)$$

$$\sigma_F^2(0) \approx \frac{1,5 \div 2}{\pi T} \int_0^T r_{xx}(\tau) d\tau. \quad (20)$$

Если $r_{xx}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|}$, то

$$\sigma_F^2(z) \approx \frac{0,5 \div 0,7}{\gamma T} e^{-\left(\frac{z}{\sigma_x}\right)^2}, \quad \sigma_F^2(0) \approx \frac{0,5 \div 0,7}{\gamma T}.$$

Если $r_{xx}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, то

$$\sigma_F^2(z) \approx \frac{0,5 \div 0,7}{\gamma T \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\right)} e^{-\left(\frac{z}{\sigma_x}\right)^2}, \quad \sigma_F^2(0) \approx \frac{0,5 \div 0,7}{\gamma T \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\right)}.$$

Нетрудно заметить, что для $r_{xx}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ среднеквадратическая погрешность функции распределения всегда меньше, чем для $r_{xx}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|}$; при $z \rightarrow \pm \infty$ погрешность $\sigma_F(z)$ стремится к нулю, иначе говоря, при $z=0$ $\sigma_F(z)$ максимальна.

Вывод. Для оценки погрешности $\sigma_F(z)$ сверху достаточно оценивать только $\sigma_F(0)$, используя при этом параметры затухания γ и колебательности ω_0 корреляционных функций исследуемого процесса:

$$\sigma_F^2(0) \approx \frac{0,5 \div 0,7}{\gamma T} \quad \text{для } r_{xx}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|}; \quad (21)$$

$$\sigma_F^2(0) \approx \frac{0,5 \div 0,7}{\gamma T \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\right)} \quad \text{для } r_{xx}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau. \quad (22)$$

Указанные выражения позволяют также по заданному среднеквадратическому отклонению $\sigma_F(0)$ определять необходимое время интегрирования T .

Оценка погрешности определения функции распределения в зависимости от интервала дискретизации случайного процесса

Поскольку в настоящее время для определения функции распределения используются УЦВМ или клавишные машины, то интересно оценить погрешность ее определения в зависимости от интервала дискретизации случайного процесса $x(t)$, равного $\Delta t = \frac{T}{N}$ (N — число ор-

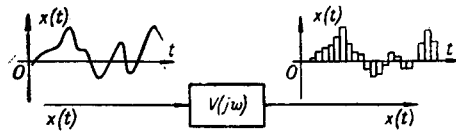


Рис. 4. Звено, выполняющее амплитудно-импульсную модуляцию.

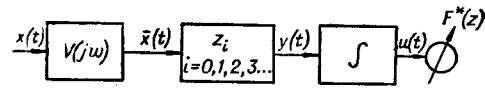


Рис. 5. Блок-схема для определения функции распределения при дискретизации процесса.

динат случайного процесса, равноотстоящих от Δt). Элементом, осуществляющим дискретное преобразование с интервалом Δt непрерывного процесса $x(t)$, может быть звено, выполняющее амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ) с коэффициентом, равным 1, и передаточной функцией

$$V(j\omega) = \frac{\sin \frac{1}{2} \omega (\Delta t)}{\frac{1}{2} \omega (\Delta t)} e^{-j \frac{1}{2} \omega (\Delta t)} \quad [14] \text{ (рис. 4).}$$

Таким образом, блок-схема, изображенная на рис. 2, должна быть дополнена элементом, осуществляющим АИМ, и задача будет заключаться в определении корреляционной функции $\bar{r}_{xx}(\tau)$ процесса $x(t)$ (рис. 5).

Как известно [15]:

$$\bar{S}_{xx}(\omega) = |V(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega);$$

$$\bar{r}_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [V^*(j\omega) V^*(-j\omega)] \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau e^{-j\omega\tau} d\omega, \quad (23)$$

где $\bar{S}_{xx}(\omega)$ и $S_{xx}(\omega)$ — соответственно спектральные плотности $\bar{r}_{xx}(\tau)$ и $r_{xx}(\tau)$.

Подставив в (23) соответственно $r_{xx}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|}$ и $r_{xx}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|} \times \times \cos \omega_0 \tau$, выполняя необходимые преобразования с отбрасыванием членов второго порядка малости, получим (см. приложение 1):

$$\bar{r}_{xx}(\tau) \approx \left(1 + \frac{p^2}{12}\right) e^{-\gamma|\tau|}; \quad (24)$$

$$\bar{r}_{xx}(\tau) \approx \left(1 + \frac{p^2 - q^2}{12}\right) e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau + \frac{pq}{6} e^{-\gamma|\tau|} \sin \omega_0 \tau. \quad (25)$$

Для определения среднеквадратической погрешности $\bar{\sigma}_F(0)$ функции распределения при дискретизации процесса $x(t)$ достаточно воспользоваться выражениями (19) и (20) (см. приложение 1).

Мы ограничимся оценкой параметров $p = \frac{\gamma T}{N}$ и $q = \frac{\omega_0 T}{N}$, когда $\bar{\sigma}_F(0) \leq 1,1 \sigma_F(0)$, или $\sigma_F^2(0) \leq 1,21 \sigma_F^2(0)$. Если $r_{xx}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|}$, то $1 + \frac{p^2}{12} \leq 1,21$, откуда

$$\frac{\gamma T}{N} \leq 1,5. \quad (26)$$

Если $r_{xx}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, то $1 + \frac{p^2 + q^2}{12} \leq 1,21$, откуда

$$p^2 + q^2 \leq 2,5. \quad (27)$$

Вывод. Соотношения (26) и (27) позволяют выбирать интервал разбиения случайного процесса Δt при его дискретизации, причем среднеквадратическая погрешность определения функции распределения из-за этого увеличивается не более чем на 10%. Соотношения (26) и (27) справедливы соответственно для процессов с корреляционными функциями $e^{-\gamma|\tau|}$ и $e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ или близкими к ним.

Определение числа точек интегральной функции распределения и достоверности ее оценок

1. Процесс вычисления интегральной функции распределения с помощью вычислительных средств обычно состоит в последовательном определении значений ее точек z_i ($i = \pm 0, 1, 2, \dots$), равноотстоящих друг от друга. Назовем эти точки узловыми. Для получения непрерывной функции распределения узловые точки должны соединяться тем или иным способом. Выбор числа точек функции распределения связан с получением определенного уровня погрешности в промежуточных точках по сравнению с узловыми при определенном способе соединения их.

Ошибка конкретной функции распределения в узловых точках при вычислении с помощью специализированных аналоговых устройств определяется методической среднеквадратической погрешностью $\sigma_F(z_i)$, зависящей от времени T и уровня z_i , и приборной погрешностью σ_n (см. приложение 2). Общая среднеквадратическая погрешность в узловых точках $\Delta_F(z_i)$ при независимости методической и приборной по-

грешностей будет равна $\Delta_F(z_i) = \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_F^2(z_i)}$.

В случае определения функции распределения с помощью УЦВМ, когда случайный процесс дискретизирован, имеем аналогичное соотношение для общей среднеквадратической погрешности

$$\bar{\Delta}_F(z_i) = \sqrt{\bar{\sigma}_n^2 + \bar{\sigma}_F^2(z_i)},$$

где $\bar{\sigma}_F(z_i)$ зависит от времени T , уровня z_i и интервала дискретизации Δt ; $\bar{\sigma}_n$ — ошибки исходных данных и округления цифровых величин.

Необходимое число точек функции распределения зависит от ее вида, способа аппроксимации и общей среднеквадратической погрешности в узловых точках $\Delta_F(z_i)$.

При этом следует учитывать, что простое увеличение точек усложняет конструирование специализированного прибора, увеличивает время вычисления и, что особенно важно, подчеркивает при любом способе аппроксимации методическую погрешность функции распределения. Последнее основывается на том, что между значениями ординат оценки функции распределения $F^*(z)$ существует зависимость (корреляция) и значения $\sigma_F(z)$ будут зависимыми случайными величинами (см. приложение 3).

Предположим, что выбрана линейная аппроксимация, т. е. значения функции в узловых точках соединяем прямыми линиями; обозначим максимальную погрешность аппроксимации δ_a . Ясно, что величина δ_a зависит от вида корреляционной функции и расстояния между узловыми точками Δz .

Учитывая правило «трех сигма» [13], можно утверждать, что максимальная погрешность в узловых точках с большой вероятностью может составить $\pm (2 \div 3) \Delta_F(z_i)$.

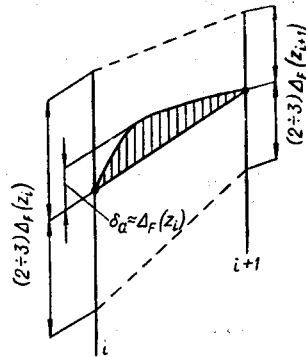


Рис. 6. Соотношение методической погрешности и погрешности аппроксимации.

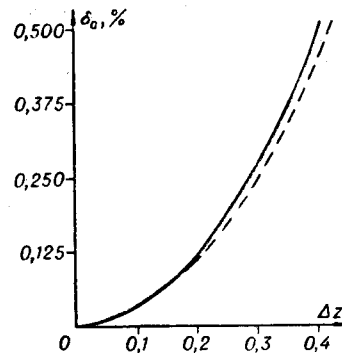


Рис. 7. Погрешность аппроксимации δ_a для функции нормального распределения.

Приняв $\delta_a \approx \Delta_F(z_i)$, мы обеспечим погрешность в промежуточных точках не более $\pm (3 \div 4) \Delta_F(z_i)$, что незначительно превышает погрешность в узловых точках (рис. 6). Как известно [16, 17], δ_a можно определить из соотношения $\delta_a \leq \frac{(\Delta z)^2}{8} |F''_{\max}(z)|$, где F''_{\max} — максимальное значение второй производной функции распределения.

На рис. 7 показана зависимость δ_a от Δz (сплошная линия) при $\delta_a = \frac{(\Delta z)^2}{8} |F'_{\max}(z)|$ для нормального закона распределения с $m_x=0$ и $\sigma_x=1$. Для сравнения на этом же рисунке пунктиром показана зависимость δ_a от Δz , полученная в результате непосредственного разбиения интервала функции и подсчета максимальной погрешности при линейной аппроксимации. Обе зависимости весьма близки. Так, например, если максимальная погрешность функции распределения не должна превышать 1%, то учитывая, что она равна $(3 \div 4) \Delta_F(z)$, а $\delta_a \approx \Delta_F(z)$, согласно графику на рис. 7, получим $\Delta z = 0,3 \div 0,4$; поэтому число точек будет равно 15—20, так как $z_{\max} = \pm 3$.

Помимо точности определения оценки интегральной функции распределения, очень важно оценивать надежность, т. е. доверительный интервал ϵ_F и доверительную вероятность p_g . При достаточно большом времени наблюдения T оценка функции распределения будет асимптотически нормальной [17], откуда

$$p_g = \frac{1}{2} \Phi \left[\frac{\epsilon_F}{\Delta_F(z)} \right],$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Применяя $p_g = 0,96 \div 0,99$, для узловых точек получим $\epsilon_F = (2 \div 3) \times \Delta_F(z)$, а для промежуточных — $\epsilon_F = (3 \div 4) \Delta_F(z)$, так как $\delta_a \approx \Delta_F(z)$.

Приложение 1

Воспользуемся выражением (23), учитывая, что

$$V^*(j\omega) = \frac{\sin \frac{\omega(\Delta t)}{2}}{\frac{\omega(\Delta t)}{2}} e^{-j \frac{\omega(\Delta t)}{2}};$$

$$V^*(-j\omega) = \frac{\sin \frac{\omega(\Delta t)}{2}}{\frac{\omega(\Delta t)}{2}} e^{j \frac{\omega(\Delta t)}{2}}.$$

Тогда

$$V^*(j\omega) V^*(-j\omega) = \frac{\sin^2 \frac{\omega(\Delta t)}{2}}{\frac{\omega^2(\Delta t)^2}{4}}.$$

Для $r_{xx}(\tau) = e^{-\tau|\tau|}$ имеем:

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{\omega(\Delta t)}{2}}{\frac{\omega(\Delta t)}{2}} \right]^2 \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} e^{-j\omega\tau} d\omega \approx \\
&\approx \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{\omega^2(\Delta t)^2}{24} \right]^2 \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} e^{-j\omega\tau} d\omega = \\
&= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{\omega^2(\Delta t)^2}{12} + \frac{\omega^4(\Delta t)^4}{576} \right] \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} e^{-j\omega\tau} d\omega = \\
&= \frac{\gamma}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega\tau}}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega - \frac{(\Delta t)^2}{12} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\gamma^2 + \omega^2} e^{-j\omega\tau} d\omega \right] = \\
&= \frac{\gamma}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega\tau}}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega - \frac{(\Delta t)^2}{12} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \omega^2} \right) e^{-j\omega\tau} d\omega \right] = \\
&= \frac{\gamma}{\pi} \left[1 + \frac{\gamma^2(\Delta t)^2}{12} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega\tau}}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\gamma}{\pi} \left[1 + \frac{\gamma^2(\Delta t)^2}{12} \right] \frac{\pi}{\gamma} e^{-\gamma|\tau|} = \\
&= \left[1 + \frac{\gamma^2(\Delta t)^2}{12} \right] e^{-\gamma|\tau|};
\end{aligned}$$

$$\gamma \Delta t = \frac{\gamma T}{N} = p;$$

$$\bar{r}_{xx}(\tau) = \left(1 + \frac{p^2}{12} \right) r_{xx}(\tau).$$

Используя (20) и (21), можно утверждать, что ошибка из-за дискретизации увеличится не более чем на 10%, если $1 + \frac{p^2}{12} \leq 1,21$ или $p = \frac{\gamma T}{N} \leq 1,5$.

Если $r_{xx}(\tau) = e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, то $\bar{r}_{xx}(\tau)$ будем определять так же, как показано выше, преобразовав $r_{xx}(\tau)$, а именно: $r_{xx}(\tau) = \text{Re} \times \{ e^{-(\gamma + j\omega_0)|\tau|} \}$. Подставляя вместо γ $(\gamma + j\omega_0)$ и определяя действительную часть, получим

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{xx}(\tau) &= \text{Re} \left\{ \left[1 + \frac{(\Delta t)^2 (\gamma + j\omega_0)^2}{12} \right] e^{-(\gamma + j\omega_0)|\tau|} \right\} = \\
&= \text{Re} \left\{ \left[1 + \frac{1}{12} (\gamma^2 - \omega_0^2) (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \omega_0 \gamma (\Delta t)^2 \right] e^{-\gamma|\tau|} \times \right. \\
&\times \left. (\cos \omega_0 \tau - j \sin \omega_0 \tau) \right\} = e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau \left[1 + \frac{1}{12} (p^2 - q^2) \right] + \\
&+ \frac{pq}{6} e^{-\gamma|\tau|} \sin \omega_0 \tau.
\end{aligned}$$

Используя (20), найдем

$$\begin{aligned}
 \sigma_F^2(0) &\approx \frac{1,5 \div 2}{\pi T} \int_0^T \bar{r}_{xx}(\tau) d\tau = \\
 &= \frac{1,5 \div 2}{\pi T} \left\{ \left[1 + \frac{1}{12} (p^2 - q^2) \right] \int_0^T e^{-\gamma|\tau|} \cos \omega_0 \tau d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{pq}{6} \int_0^T e^{-\gamma|\tau|} \sin \omega_0 \tau d\tau \right\} = \\
 &= \frac{1,5 \div 2}{\pi T} \left\{ \left[1 + \frac{1}{12} (p^2 - q^2) \right] \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega_0^2} + \frac{pq}{6} \frac{\omega_0}{\gamma^2 + \omega_0^2} \right\} = \\
 &= \frac{1,5 \div 2}{\pi T} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega_0^2} \left[1 + \frac{1}{12} (p^2 - q^2) + \frac{1}{6} q^2 \right] = \\
 &= \frac{0,5 \div 0,7}{T} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega_0^2} \left[1 + \frac{1}{12} (p^2 + q^2) \right].
 \end{aligned}$$

Учитывая (22), можно утверждать, что ошибка из-за дискретизации увеличится не более чем на 10%, если $1 + \frac{p^2 + q^2}{12} \leq 1,21$, откуда $p^2 + q^2 \leq 2,5$.

Приложение 2

Приборная погрешность σ_n устройства (см. рис. 2) будет в основном определяться неточностью порога срабатывания z и погрешностью интегратора. Будем оценивать эту погрешность как среднеквадратическое отклонение σ_n вычисляемой функции от точно известной.

Для этого воспользуемся синусоидальным сигналом $X(t) = a \sin \omega_0 t$, интегральная функция распределения которого известна (рис. 8):

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{z}{a}, \quad |z| \leq a; \\
 F(z) &= 0, \quad |z| > a,
 \end{aligned}$$

а погрешность из-за конечного времени интегрирования T может быть сделана пренебрежимо малой. Оценим эту погрешность, обозначив ее $\delta_T(z)$.

Анализируя процессы, имеющие место в устройстве (см. рис. 2) при $x(t) = a \sin \omega_0 t$, нетрудно заметить, что величина погрешности зависит от площади переменной составляющей процесса $y(t)$ и времени интегрирования T (рис. 9).

Величина и длительность импульсов процесса $y(t)$ изменяется в зависимости от z соответственно выражениям:

$$1 - \frac{1}{2} \arcsin \frac{z}{a} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\omega_0} + \frac{2}{\omega_0} \arcsin \frac{z}{a}.$$

Погрешность, отнесенная к максимальной величине $F(z)$, т. е. к 1, будет равна:

$$\delta_T(z) = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0} + \frac{2}{\omega_0} \arcsin \frac{z}{a}} \left(1 - \frac{1}{2} \arcsin \frac{z}{a}\right) dt,$$

или

$$\delta_T(z) = \frac{1}{T} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \arcsin \frac{z}{a}\right) \left(\frac{\pi}{\omega_0} + \frac{2}{\omega_0} \arcsin \frac{z}{a}\right) \right].$$

Таким образом,

$$\delta_T(z) = \frac{1}{T} \left(\frac{\pi}{2\omega_0} - \frac{2}{\omega_0 \pi} \arcsin^2 \frac{z}{a} \right).$$

Если $z=0$, то $\delta_T(0) = \frac{\pi}{2\omega_0 T}$; при $z = \pm a$ максимальная погрешность равна нулю.

Например, для синусоидального сигнала с частотой $f_0 = 25$ гц при времени интегрирования $T = 10$ сек получим $\delta_T(0) \approx 0,1\%$.

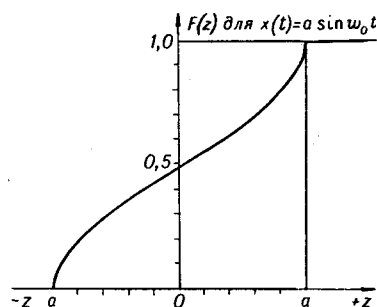


Рис. 8. Интегральная функция распределения для сигнала $x(t) = a \sin \omega_0 t$.

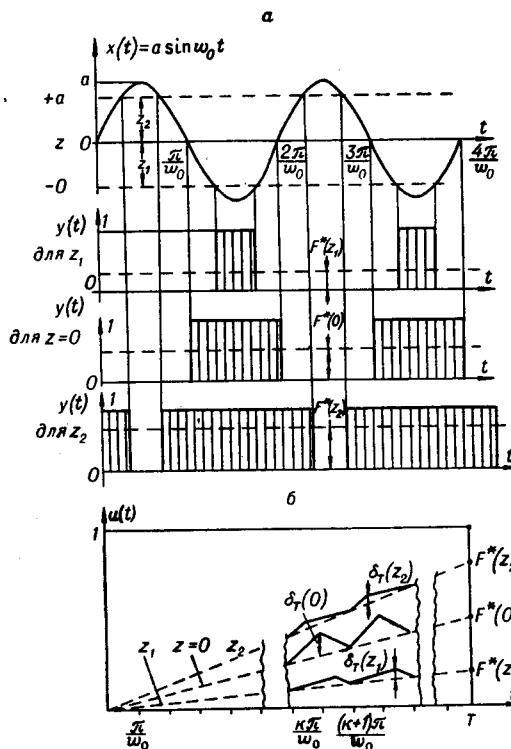


Рис. 9. Определение погрешности функции распределения для $x(t) = a \sin \omega_0 t$:

a — связь между процессами $y(t)$ и $x(t)$ для $x(t) = a \sin \omega_0 t$; b — процесс $u(t)$ с погрешностью $\delta_T(z)$.

Таким образом, используя синусоидальный сигнал $x(t) = a \sin \omega_0 t$, выбирая соответствующее время интегрирования T , можно определить приборную среднеквадратическую погрешность

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i [F^*(z_i) - F(z_i)]^2},$$

где N — число точек функции распределения. Чтобы эксперимент был достаточно представителен, число точек функции распределения для $a \sin \omega_0 t$ должно быть не менее 20.

Как известно [18], второй смешанный момент (ковариацию) от $F^*(z)$ можно выразить следующим образом:

$$\operatorname{cov}\{F^*(z_1)F^*(z_2)\} = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \{P[x(t) \leq z_1, x(t) \leq z_2] - F^2(z)\} d\tau.$$

Пусть процесс $x(t)$ нормален, а $m_x = 0$ и $\sigma_x = 1$; при этом $F(z) = \Phi(z)$, где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Двумерное распределение процесса $x(t)$ будет нормальным с плотностью вероятности

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - r_{xx}^2(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{z_1^2 - 2r_{xx}(\tau)z_1z_2 + z_2^2}{2[1 - r_{xx}^2(\tau)]} \right\},$$

где $r_{xx}(\tau)$ — корреляционная функция процесса $x(t)$.

Если $|r_{xx}(\tau)| \neq 1$, то распределение будет невырожденным. В этом случае

$$P[x(t) \leq z_1, x(t) \leq z_2] = \int_{-\infty}^{z_1} \int_{-\infty}^{z_2} f(\psi_1, \psi_2) d\psi_1 d\psi_2 = \\ = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - r_{xx}^2(\tau)}} \int_{-\infty}^{z_1} \int_{-\infty}^{z_2} \exp \left\{ -\frac{\psi_1^2 - 2r_{xx}(\tau)\psi_1\psi_2 + \psi_2^2}{2[1 - r_{xx}^2(\tau)]} \right\} d\psi_1 d\psi_2.$$

Удобно ввести новые переменные:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{1 - r_{xx}^2(\tau)}} \psi_1 - \frac{r_{xx}(\tau)}{\sqrt{1 - r_{xx}^2(\tau)}} \psi_2; \\ v = \psi_2. \end{cases}$$

После замены переменных получим

$$P[x(t) \leq z_1, x(t) \leq z_2] = \frac{1}{2\pi} \int_S \int e^{-\frac{u^2 + v^2}{2}} du dv.$$

Границей области интегрирования S являются лучи двух прямых:

$$\begin{cases} v = z_2; \\ u \sqrt{1 - r_{xx}^2(\tau)} + vr_{xx}(\tau) = z_1. \end{cases}$$

Откуда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{z_1} \int_{-\infty}^{z_2} e^{-\frac{u^2 + v^2}{2}} du dv \neq \Phi^2(z).$$

Равенство выполняется лишь в том случае, когда $r_{xx}(\tau) = 0$ или $z_1 = z_2$; последнее противоречит принятому условию $z_1 \neq z_2$. Следовательно, $\cos \nu\{F^*(z_1), F^*(z)\}$ не может быть равен нулю, если $r_{xx}(\tau) \neq 0$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. I. М., Изд-во «Советское радио», 1963.
2. А. А. Первозванский. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М., Физматгиз, 1962.
3. И. Е. Казаков, Б. Г. Доступов. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1962.
4. В. В. Болотин. Статистические методы в строительной механике. М., Госстройиздат, 1961.
5. В. И. Сергеев. К вопросу о случайных процессах в задаче точности механизмов.— В сб. «Вопросы синтеза и точности сложных устройств непрерывного действия». М., Изд-во АН СССР, 1958.
6. И. Н. Бочаров, Р. И. Стаховский. Анализатор плотности распределения вероятностей случайных процессов.— Автоматика и телемеханика, 1962, т. XXIII, № 2.
7. F. B. Smith. Analog Equipment for Processing Randomly Eluctuating Data.— Aeronaut. Eng. Rev., 1955, v. 14, № 5.
8. I. Daniel. Simple Plotter Analyser Rader Noise Rapidely.— Electronics, 1956, v. 14.
9. Lien Hwachii. Probability Density Measurement with an Electrode Mounted on the Face of Cathode Ray Tube.— Rev. Sci. Instr., 1959, v. 30, № 12.
10. А. А. Фельдбаум. Вычислительные устройства в системах автоматического управления. М., Физматгиз, 1959.
11. Н. П. Слободенюк. Об оценке функции распределения по реализации стационарного процесса.— Труды Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1958.
12. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. II. М., Изд-во «Советское радио», 1963.
13. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
14. Ю. М. Быков. К определению среднеквадратической ошибки интерполяции при дискретном измерении случайных сигналов.— В сб. «Комплексная автоматизация химических производств», т. XXV. М., Машгиз, 1963.
15. В. В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
16. В. Н. Хлистунов. О погрешности аппроксимации дискретных методов измерения.— Приборостроение, 1960, № 5.
17. Э. Л. Ицкович. Определение необходимой частоты измерений при дискретном контроле.— Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 2.
18. В. М. Бабурин, П. С. Матвеев, Ю. Б. Рождественский, Ю. И. Соркин. О вычислении функции распределения случайного процесса по экспериментальным данным.— Автоматика и телемеханика, 1962, т. XXIII, № 5.

Поступила в редакцию
25 января 1965 г.