А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 3 1965

УДК 621.317.373

С. С. КУЗНЕЦКИЙ
(Красноярск)

О ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРАКТИЧЕСКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ОШИБКАХ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ ФАЗОМЕТРАХ*

В работе рассмотрены законы распределения погрешностей дискретного преобразования в цифровых фазометрах, определен вид закона распределения суммарной погрешности и дана методика определения практически предельной погрешности дискретного преобразования.

Цифровым фазометрам, принцип действия которых основан на преобразовании фазового сдвига в интервал времени с последующим его измерением счетным способом, присуще дискретное преобразование. Этому преобразованию свойственны два вида ошибок, носящих случайный характер:

1) ошибка квантования, возникающая при преобразовании аналоговой величины в дискретную;

2) ошибка, обусловленная произвольным выбором момента пуска фазометрического устройства.

Первая ошибка характерна для фазометров, измеряющих сдвиг фаз за период исследуемых напряжений или за время, значительно большее периода [1, 2]. Она связана с заполнением промежутка времени импульсами вспомогательного квантующего генератора.

Вторая ошибка характерна только для фазометров с постоянным временем измерения и зависит от соотношения времени измерения и периода измеряемой частоты. Если во времени измерения укладывается целое число периодов измеряемой частоты, то эта частота обращается в нуль.

Для проектирования, производства и испытания приборов, а также для выполнения измерений необходимо знать практически предельную ошибку прибора. В измерительной технике применяют два способа суммирования частных погрешностей: арифметическое сложение абсолютных предельных значений частных погрешностей и сложение квадратов предельных погрешностей под корнем квадратным (квадратичное суммирование). Эти способы расчета не являются универсальными и могут давать значительные отклонения от действительного значения суммарной погрешности. Так, первый способ дает завышенную погрешность, а второй — заниженную.

---

* Материал доложен на VI Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1964 г. в Новосибирске.

Как известно [3], практически предельное значение суммарной погрешности равно

$$\Delta_\Sigma = \theta_\Sigma \pm \alpha_\Sigma \sigma_\Sigma, \tag{1}$$

где θ_Σ — суммарная систематическая погрешность;

$\alpha_\Sigma \sigma_\Sigma = \delta$ — суммарная случайная погрешность;

σ_Σ — суммарная среднеквадратическая погрешность, равная

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\,. \tag{2}$$

Здесь σ_i — частная среднеквадратическая погрешность.

В общем случае коэффициент α_Σ определяется заданной доверительной вероятностью и законом распределения суммарной погрешности.

Таким образом, из (1) ясно, что для однозначного определения практически предельной погрешности необходимо знать, помимо суммарной систематической погрешности, законы распределения частных случайных погрешностей, числовые характеристики этих законов (σ_i), найти закон распределения суммарной случайной погрешности и, задавшись доверительной вероятностью суммарной случайной погрешности, определить коэффициент α_Σ.

Целью настоящей работы является определение практически предельной ошибки дискретного преобразования в цифровых фазометрах с постоянным временем измерения.

Под ошибкой дискретного преобразования будем понимать результирующую ошибку, возникающую из-за преобразования аналоговой величины в дискретную и произвольного выбора момента пуска фазометрического устройства. При этом будем считать, что суммарная систематическая ошибка равна нулю $(\theta_\Sigma = 0)$, что возможно, если она определена, например по способу, указанному в [4, 5], и скомпенсирована. Тогда практически предельная погрешность будет равна

$$\Delta_\Sigma = \delta = \alpha_\Sigma \sigma_\Sigma, \tag{3}$$

суммарная среднеквадратическая погрешность —

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}\,, \tag{4}$$

где σ_1 — среднеквадратическая ошибка квантования;

σ_2 — среднеквадратическая ошибка, обусловленная произвольным выбором момента пуска фазометрического устройства;

σ_3 — среднеквадратическая аппаратурная погрешность.

Поскольку мы интересуемся практически предельной ошибкой дискретного преобразования, то исключим из рассмотрения σ_3 и будем определять δ из следующего соотношения:

$$\delta = \alpha_0 \sigma_0, \tag{5}$$

где α_0 — коэффициент, определяемый заданной доверительной вероятностью и законом распределения суммарной погрешности дискретного преобразования

$$\sigma_0 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \tag{6}$$

σ_1 определена в [6]

$$\sigma_1 = \frac{360^\circ}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{F}{Nf}}, \tag{7}$$

где F — частота, на которой измеряется разность фаз;

N — число импульсов квантующего генератора за время $t_{изм}$;

f — частота квантующего генератора.

σ_2 определена в [7]

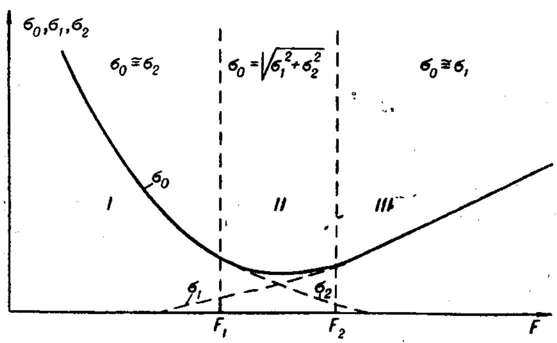
$$\sigma_2 = \frac{90^\circ}{\sqrt{3}} \frac{f}{NF}. \tag{8}$$

Следует отметить, что в (8) приведено максимальное значение σ_2 при $\varphi = 180^\circ$ и $\Delta T = t_{изм} - nT = \frac{1}{2} T$ ($t_{изм}$ — время измерения, n — целое число периодов измеряемой частоты, укладывающихся во времени измерения).

Величина N связана со временем измерения соотношением

$$t_{изм} = \frac{N}{f}. \tag{9}$$

Зависимость σ_0, σ_1, σ_2 от частоты F дана на графике (см. рисунок). На кривой $\sigma_0 = f(F)$ можно выделить три области. В области I при $F < F_1$ σ_0 определяется ошибкой σ_2, обусловленной произвольным выбором момента пуска фазометрического устройства, поскольку σ_1 в этой области очень мала и ее можно не учитывать. В области II при $F_1 < F < F_2$ σ_1 и σ_2 становятся сравнимыми по величине и σ_0 следует определять из соотношения (6). В области III при $F > F_2$ σ_0 определяется ошибкой квантования σ_1, ибо σ_2 в этой области очень мала и ее можно не учитывать.



Таким образом,

$$\text{для области I } \sigma_0 \simeq \sigma_2, \tag{10}$$

$$\text{для области II } \sigma_0 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2},$$

$$\text{для области III } \sigma_0 \cong \sigma_1. \tag{11}$$

Определяя частоты F_1 и F_2, ниже и выше которых можно пользоваться соотношениями (10) и (11), очень важно знать, какая при этом допускается ошибка.

Используя (6—8), можно найти зависимость между F_1, F_2 и допустимыми ошибками:

$$F_1 \leqslant \frac{f}{2} \sqrt[3]{\frac{a\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_2} - 1\right)}{N}} \leqslant F_{\sigma_1 = \sigma_2} \sqrt[3]{a\,(a+2)}, \qquad (12)$$

где $a = \frac{\sigma_0}{\sigma_2} - 1$;

$$F_2 \geqslant \frac{f}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{Na\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} + 1\right)}} \geqslant \frac{F_{\sigma_1 = \sigma_2}}{\sqrt[3]{a\,(a+2)}}, \qquad (13)$$

где $a = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1$.

В (12) и (13) a — относительная ошибка; $F_{\sigma_1 = \sigma_2}$ — частота, на которой $\sigma_1 = \sigma_2$. Последней соответствует выражение [8]

$$F_{\sigma_1 = \sigma_2} = \frac{f}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{N}}.$$

В области I при $F < F_1$ (F_1 находим из (12)) $\sigma_0 \simeq \sigma_2$. Следовательно, и ошибка дискретного преобразования в этой области (при $a \ll 1$) определяется только ошибкой, обусловленной произвольным выбором пуска фазометрического устройства. Практически предельная ошибка в этой области равна максимальной ошибке, обусловленной произвольным выбором пуска [7, 8]:

$$\delta_{\mathrm{I}} = \Delta \varphi_{\max} = \frac{90^\circ}{n}, \qquad (14)$$

где n — целое число периодов измеряемой частоты, укладывающихся во времени измерения $t_{изм}$.

Для области III при $F > F_2$ (F_2 находим из (13)) $\sigma_0 \simeq \sigma_1$. В этой области закон распределения и практически предельная ошибка дискретного преобразования полностью определяются ошибкой квантования. Покажем, что закон распределения этой ошибки близок к нормальному.

В фазометрах с постоянным временем измерения средняя разность фаз за $t_{изм}$ измеряется как усредненный временной интервал [7]:

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tau_i}{n}, \qquad (15)$$

где τ_i — длительность i-го временного интервала, пропорционального разности фаз;

n — число периодов измеряемой частоты, укладывающихся во времени измерения.

Случайная величина $\bar{\tau}$ (15) является линейной функцией независимых случайных величин $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, каждая из которых имеет закон распределения Симпсона [9], поэтому суммарный закон распределения ошибки величины τ является композицией n одинаковых законов распределения по треугольнику. На основании центральной предельной теоремы вероятностей [10] можем считать суммарный закон распределения близким к нормальному. Это будет тем точнее, чем больше n.

В нашем случае n достаточно велико даже на низких частотах, чтобы считать закон распределения нормальным. Поэтому для практически предельной ошибки при доверительной вероятности 0,9973, обычно принятой в технических приложениях, можно использовать правило «трех сигма»:

$$\delta_{III} = 3\sigma_1 = 360^\circ \sqrt{\frac{3F}{2Nf}}, \qquad (16)$$

где σ_1 определяется (7).

Для области II (см. рисунок) при $F_1 < F < F_2$, где $\sigma_0 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, задачу о практически предельной ошибке следует решать, учитывая, что закон распределения ошибки будет композицией двух законов распределения. Практически предельная ошибка при этом будет определяться соотношением $\delta_{II} = \alpha_0 \sigma_0$ (5).

Таким образом, задача нахождения практически предельной ошибки дискретного преобразования сводится к определению коэффициента α_0, поскольку при известной частоте F среднеквадратическую погрешность дискретного преобразования мы можем найти, пользуясь (6), (7), (8).

Выше нами было установлено, что ошибка квантования распределена по закону, близкому к нормальному. Закон распределения второй составляющей ошибки дискретного преобразования нам неизвестен. В [7] даны лишь некоторые числовые характеристики закона.

Если среди частных погрешностей есть одна доминирующая погрешность с предельным значением $\pm l$, закон распределения которой неизвестен, а остальные погрешности в совокупности распределены по нормальному закону, то для распределения $\pm l$ теория вероятностей [3] рекомендует выбирать закон равной вероятности. При этом оказывается, что ошибка за счет несоответствия выбранного закона действительному не превышает $\pm 20\%$ от значения суммарной предельной погрешности (при доверительной вероятности 0,9973). Эта ошибка соответствует крайним случаям, когда погрешность имеет постоянное значение l или когда она подчинена нормальному закону $l = 3\sigma_2$. В обоих случаях указанная ошибка $(+20\%)$ имеет место при $l = 3\sigma_1$ и уменьшается при $l \leq 3\sigma_1$.

Суммарная погрешность распределена в этом случае по закону композиции нормального и равновероятного законов распределения. Выражение для суммарного закона распределения имеет вид [10]:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{l-z}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{-l-z}{\sigma_1}\right)\right], \qquad (17)$$

где $l = \Delta\varphi_{max} = \sigma_2\sqrt{3}$ ($\Delta\varphi_{max}$ находим из (14)).

В таблице приведены значения α_0 в зависимости от двух параметров — заданной доверительной вероятности p и отношения $\frac{\sigma_2}{\sigma_0}$ [13].

$\frac{\sigma_2}{\sigma_0}$	$p = 0{,}9973$	$p = 0{,}99$	$p = 0{,}95$
0	3,0	2,58	1,96
0,658	2,75	2,42	1,88
0,868	2,52	2,25	1,84
0,957	2,17	1,90	1,72
0,98	2,0	1,75	1,70
1,0	1,73	1,71	1,64

Таким образом, задача о практически предельной погрешности дискретного преобразования полностью решается.

Приведенная методика позволяет найти практически предельную погрешность для случая, когда учитывается и случайная аппаратурная погрешность. Случайная аппаратурная погрешность распределена по нормальному закону. Вследствие того, что ошибка квантования тоже подчиняется нормальному закону распределения, суммарная погрешность будет нормальной и ее среднеквадратическое значение можно записать следующим образом:

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{(\sigma_1')^2 + \sigma_2^2}, \tag{18}$$

где

$$\sigma_1' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}. \tag{19}$$

При этом практически предельная ошибка будет равна

$$\delta = \alpha_\Sigma \sigma_\Sigma.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Ковалевская, Б. З. Беленький. Цифровой фазометр с постоянным измерительным временем.— Труды конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений (Новосибирск, 1959). Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1961.
2. С. С. Кузнецкий, Л. Н. Стуков, С. П. Халавенков. Цифровой фазометр-частотомер-счетчик на полупроводниковых приборах.— Передовой научно-технический и производственный опыт, вып. 10, тема 35, НП—62—58/10. М., ГОСИНТИ, 1962.
3. Б. Е. Рабинович. Методика суммирования частных погрешностей в области радиотехнических измерений.— Исследование по методике оценки погрешности измерений. Труды ин-тов Комитета стандартов, вып. 57 (117). М., Стандартгиз, 1962.
4. И. К. Поздняков. Определение погрешности фазометров методом самопроверки.— Труды ин-тов Комитета стандартов, вып. 70 (130). М., Стандартгиз, 1963.
5. И. К. Поздняков. Определение амплитудных погрешностей фазометров.— Труды ин-тов Комитета стандартов, вып. 70 (130). М., Стандартгиз, 1963.
6. С. С. Кузнецкий. Об одном методе расширения частотного диапазона и увеличения точности цифровых фазометров.— Труды Томского ин-та радиоэлектроники и электронной техники, т. 2. Томск, 1964.
7. С. С. Кузнецкий, М. К. Чмых. Статистические характеристики методических погрешностей цифровых фазометров.— Тезисы докладов и сообщений V Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений. Новосибирск, ЦБТИ, 1963.
8. Н. П. Поляков. Методические погрешности цифровых фазометров с постоянным измерительным временем.— Приборы и техника эксперимента, 1959, № 3.
9. Э. И. Гитис. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных машин. М., Госэнергоиздат, 1961.
10. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1958.

Поступила в редакцию
15 сентября 1964 г.