АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1965

УДК 621.317.39+681.2.082

В. Г. ВАСИЛЬЕВ
(Жуковский)

МНОГОСВЯЗНЫЕ ВОСПРОИЗВОДЯЩИЕ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМИ КОРРЕКТНЫМИ ПРЕОБРАЗУЮЩИМИ КОМПЛЕКСАМИ

Статья посвящена исследованию многосвязных воспроизводящих систем, реализуемых на базе инерционных преобразующих элементов неселективного (неизбирательного) действия. Результаты работы могут найти применение, в частности, при строении измерительных систем с неселективными первичными преобразователями, предназначенных для одновременного измерения (или регистрации) нескольких разнородных физических процессов.

В настоящее время при решении многих технических и научных задач возникает необходимость в одновременном измерении (а также регистрации) группы физических параметров. Очень часто эти параметры оказываются тесно связанными между собой (например, измерение концентрации газов в смеси) или им сопутствуют помехи. Обычно подобные задачи решаются за счет использования первичных преобразователей, обладающих высокой селективностью (избирательностью) действия. Однако такой путь решения оказывается в ряде случаев неприемлемым из-за невозможности создания первичных преобразователей, обладающих достаточно высокой избирательностью, из-за невозможности обеспечения необходимой стабильности различных элементов схемы и т. д. Поэтому приходится искать пути, позволяющие решить указанную задачу.

В статье показывается принципиальная возможность создания многосвязных воспроизводящих систем с неселективно действующими линейными инерционными преобразующими элементами и производится анализ таких систем с целью получения необходимых и достаточных условий их качественной работы.

Определения

Линейные преобразующие комплексы. Группу линейных воспроизводящих систем [1, 2], обеспечивающую восприятие и преобразование некоторой совокупности физических процессов, мы будем именовать линейным преобразующим комплексом.

При нулевых начальных условиях взаимосвязь между физическими процессами, воспринимаемыми линейным преобразующим комплексом $\left\{\tilde{x}_i(t)\right\}_{i=1,2,\ldots,m}$, и физическими процессами $\left\{\tilde{y}_k(t)\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$, являющимися результатом действия комплекса, может быть описана совместной системой интегральных уравнений

$$\tilde{y}_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \tilde{f}_{ki}(t-\xi)\, \tilde{x}_i(\xi)\, d\xi, \qquad (1)$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь $\tilde{f}_{ki}(t)$ — «долевая» импульсная переходная функция, которая характеризует преобразующие свойства k-й воспроизводящей системы комплекса по отношению к i-му физическому процессу, воспринимаемому комплексом.

Примем, что функции $\{\tilde{x}_i(t)\}_{i=1, 2, \ldots, m}$ относятся к классу функций времени, над которыми осуществимо преобразование Лапласа [3],— к классу L. В этом случае для физически правомерного линейного преобразующего комплекса функции $\{\tilde{y}_k(t)\}_{k=1, 2, \ldots, n}$ будут также принадлежать к классу L. Это в свою очередь означает возможность использования для преобразующих свойств линейного комплекса либо совместной системы алгебраических уравнений

$$y_k(p) = \sum_{i=1}^{m} f_{ki}(p)\, x_i(p), \qquad (2)$$

$$k = 1, 2, \ldots n,$$

либо матричного уравнения

$$\underset{(n)}{Y}(p) = \underset{m,\, n}{F}[p]\, \underset{(m)}{X}(p). \qquad (3)$$

Здесь $y_k(p)$, $f_{ki}(p)$ и $x_i(p)$ — изображения (по Лапласу) функций времени $\tilde{y}_k(t)$, $\tilde{f}_{ki}(t)$ и $\tilde{x}_i(t)$;

$\underset{(n)}{Y}(p)$ — n-мерный вектор, k-я компонента которого — функция $y_k(p)$;

$\underset{(m,\, n)}{F}[p]$ — прямоугольная матрица из n строк и m столбцов, элементы которой суть функции $\{f_{ki}(p)\}_{\substack{k=1, 2, \ldots, m \\ i=1, 2, \ldots, n}}$ — «долевые» передаточные функции линейного преобразующего комплекса;

$\underset{(m)}{X}(p)$ — m-мерный вектор, i-я компонента которого — функция $x_i(p)$.

Линейный преобразующий комплекс мы будем называть нормальным, если характеризующая его преобразующие свойства матрица $\underset{m,\, n}{F}[p]$ является квадратной и удовлетворяет условию

$$m = n. \qquad (4)$$

В этом случае число n мы будем именовать порядком преобразующего комплекса, а нормальный преобразующий комплекс, для характеризующей матрицы которого $\underset{n,\, n}{F}[p]$ существует обратная матрица $\underset{n,\, n}{F^{-1}}[p]$ —

корректным линейным преобразующим комплексом. Из определения обратной матрицы [4] следует, что необходимым и достаточным условием корректности линейного преобразующего комплекса является выполнение соотношения

$$|F[p]| \neq 0, \tag{5}$$

где $|F[p]|$ — определитель [4] матрицы $\underset{n,n}{F}[p]$.

Для корректных линейных преобразующих комплексов задача определения функций $\{\tilde{y}_k(t) \in L\}_{k=1,2,\ldots,n}$ по известным функциям $\{\tilde{x}_i(t) \times \times \in L\}_{i=1,2,\ldots,m}$, т. е. обратная задача, является корректной по Тихонову [5, 6].

В рассматриваемом случае

$$\underset{(n)}{\vec{X}}(p) = \underset{n,n}{F^{-1}}[p]\underset{(n)}{\vec{Y}}(p), \tag{6}$$

или

$$\tilde{x}_i(t) = \frac{1}{2\pi j}\sum_{k=1}^{n}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\frac{F_{ik}[p]}{|F[p]|}y_k(p)\,e^{pt}\,dp, \tag{7}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь $F_{ik}[p]$ — алгебраическое дополнение ik-го элемента матрицы $\underset{n,n}{F}[p]$.

В дальнейшем для описания преобразующих свойств корректных линейных преобразующих комплексов n-го порядка мы будем пользоваться матричными соотношениями вида

$$\begin{aligned}\vec{Y}(p) &= F[p]\vec{X}(p);\\ \vec{X}(p) &= F^{-1}[p]\vec{Y}(p),\end{aligned} \tag{8}$$

подразумевая при этом, что

$$F[p]F^{-1}[p] \equiv F^{-1}[p]F[p] \equiv E, \tag{9}$$

где E — единичная матрица [4] n-го порядка.

Линейные многосвязные воспроизводящие системы. «Большую» воспроизводящую систему, образованную из линейных корректных преобразующих комплексов одинакового порядка, мы будем именовать полной линейной многосвязной воспроизводящей системой, или многосвязной воспроизводящей системой (МВС)

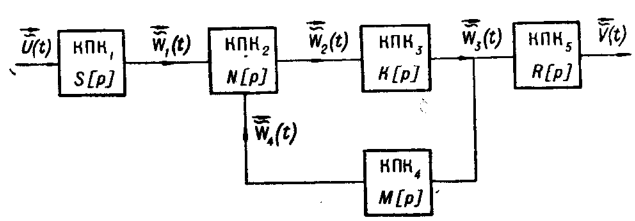

Рис. 1

Рассмотрим МВС, реализованную из пяти линейных корректных преобразующих комплексов $КПК_{1,2,3,4,5}$ в соответствии с векторно-структурной схемой, приведенной на рис. 1. На схеме $\vec{\tilde{U}}(t)$ — n-мерный вектор, компоненты которого — функции $\{\tilde{u}_i(t)\}_{i=1,2,...,n}$ — описывают физические процессы, воспринимаемые входным КПК; $\vec{\tilde{V}}(t)$ — n-мерный вектор, компоненты которого — $\{\tilde{v}_k(t)\}_{k=1,2,...,n}$ — описывают выходные сигналы МВС; $\{\vec{\tilde{W}}_\nu(t)\}_{\nu=1,2,3,4}$ — n-мерные векторы, характеризующие внутренние процессы в рассматриваемой МВС.

Примем, что для рассматриваемой системы физически возможные вариации векторов $\vec{\tilde{U}}(t)$, $\{\vec{\tilde{W}}_\nu(t)\}_{\nu=1,2,3,4}$ и $\vec{\tilde{V}}(t)$ таковы, что все компоненты указанных векторов являются функциями времени класса L. Будем считать также, что преобразующие свойства комплексов, образующих МВС, характеризуются по аналогии с (8) матричными соотношениями вида:

$$\left.\begin{aligned}\vec{W}_1(p) &= S[p]\,\vec{U}(p)\\ \vec{U}(p) &= S^{-1}(p)\,\vec{W}_1(p)\end{aligned}\right\} - КПК_1;$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{W}_2(p) &= N[p]\,[\vec{W}_1(p) - \vec{W}_4(p)]\\ \vec{W}_1(p) - \vec{W}_4(p) &= N^{-1}[p]\,\vec{W}_2(p)\end{aligned}\right\} - КПК_2;$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{W}_3(p) &= K[p]\,\vec{W}_2(p)\\ \vec{W}_2(p) &= K^{-1}[p]\,\vec{W}_3(p)\end{aligned}\right\} - КПК_3;$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{W}_4(p) &= M[p]\,\vec{W}_3(p)\\ \vec{W}_3(p) &= M^{-1}[p]\,\vec{W}_4(p)\end{aligned}\right\} - КПК_4;$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{V}(p) &= R[p]\,\vec{W}_3(p)\\ \vec{W}_3(p) &= R^{-1}[p]\,\vec{V}(p)\end{aligned}\right\} - КПК_5.$$

Рассматривая эти соотношения как совместную систему матричных уравнений [4], нетрудно вывести матричное соотношение

$$M[p]+N^{-1}[p]\,K^{-1}[p]\,R^{-1}[p]\,\vec{V}(p) = S[p]\,\vec{U}(p), \tag{10}$$

характеризующее преобразующие свойства рассматриваемой МВС по отношению к совокупности входных сигналов $\{\tilde{u}_i(t) \in L\}_{i=1,2,...,n}$.

Цель и погрешности преобразования. Примем, что назначением рассматриваемой МВС является преобразование входных сигналов $\{\tilde{u}_i(t) \in L_x \subset L\}_{i=1,2,...,n}$ с характером взаимосвязи между $\vec{\tilde{U}}(t)$ и $\vec{\tilde{V}}(t)$, максимально близким к характеру взаимосвязи между $\vec{\tilde{U}}(t)$ и n-мерным вектором $\vec{\tilde{\tilde{V}}}(t)$, устанавливаемой матричным уравнением

$$\vec{\bar{V}}(p) = \bar{D}[p]\,\vec{U}(p), \tag{11}$$

именуемым в дальнейшем целью преобразования.

Развернутой формой цели преобразования является система уравнений

$$\widetilde{\widetilde{V}}_k(t)=\frac{1}{2\pi j}\sum_{l=1}^{n}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\bar{d}_{kl}(p)\,u_l(p)\,e^{pt}\,dp, \tag{12}$$

$$k=1,2,\ldots,n,$$

где $\bar{d}_{kl}(p)$ — kl-й элемент матрицы $\overline{D}[p]$.

Пригодность рассматриваемой МВС для достижения заданной цели преобразования над заданным классом входных сигналов мы будем определять путем оценки предельных значений модулей погрешностей преобразования

$$\widetilde{\Delta}_k(t)=\widetilde{V}_k(t)-\widetilde{\widetilde{V}}_k(t), \tag{13}$$

$$k=1,2,\ldots,n$$

для заданного класса сигналов в заданном интервале времени.

Рассмотрим возможность использования линейной МВС (см. рис. 1) для выполнения некоторых конкретных целей преобразования.

Линейные МВС простого преобразования

Определение. МВС простого преобразования мы будем именовать такую МВС, цель преобразования для которой выражается системой соотношений:

$$\widetilde{\widetilde{V}}_k(t)=\bar{d}_{kk}(0)\,\tilde{u}_k(t-\bar{\tau}), \tag{14}$$

$$k=1,2,\ldots,n,$$

где $\{\bar{d}_{kk}(0)\}_{k\ \ 1,2,\ldots,n}$ и $\bar{\tau}$ — вещественные числа. Нетрудно прийти к выводу, что при $\{\tilde{u}_k(t)\in L\}_{k=1,2,\ldots,n}$ цель преобразования может быть выражена

$$\widetilde{\widetilde{V}}(p)=\underset{\sim}{\overline{D}}[p]\vec{U}(p), \tag{15}$$

где $\underset{\sim}{\overline{D}}[p]$ — диагональная матрица [4], элементы которой

$$\bar{d}_{kk}(p)=\bar{d}_{kk}(0)\,e^{p\,\bar{\tau}}. \tag{16}$$

$$k=1,2,\ldots,n.$$

Необходимые условия качественного преобразования для МВС *простого преобразования.* Условия, при которых рассматриваемая МВС выполняет (с той или иной степенью точности) цель преобразования по отношению к заданному классу функций $\{\tilde{u}_l(t)\}_{l=1,2,\ldots,n}$ при $t\to\infty$ мы будем именовать необходимыми условиями качественного преобразования для МВС простого преобразования. Выявление этих условий для линейной МВС, характеризуемой матричным уравнением (10), проведено ниже.

1. *Условие однозначности действия* МВС. Анализ матричного уравнения (10) показывает, что необходимым и достаточным условием решения его относительно $\vec{V}(p)$ является существование матрицы

$$\{[M[p]+N^{-1}[p]K^{-1}[p]]R^{-1}[p]\}^{-1},$$

обратной [4] по отношению к матрице $\{[M[p]+N^{-1}[p]K^{-1}[p]]R^{-1}[p]\}$. Указанное условие выполняется при соблюдении соотношения

$$|E+K[p]\,N[p]\,M[p]|\neq 0, \tag{17}$$

именуемого в дальнейшем условием однозначности действия МВС.

При выполнении (17) матричное соотношение (10) приводится к виду

$$\vec{V}(p)=R[p]\,H^{-1}[p]\,G[p]\,\vec{U}(p), \tag{18}$$

где

$$H[p]\equiv E+K[p]\,N[p]\,M[p]; \tag{18а}$$

$$G[p]\equiv K[p]\,N[p]\,S[p]. \tag{18б}$$

Это в свою очередь означает, что при выполнении (17) для определения функций $\left\{\tilde{v}_k(t)\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ могут быть использованы формулы:

$$\tilde{v}_k(t)=\frac{1}{2\pi j}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} r_{kl}(p)\,\frac{H_{jl}[p]}{|H[p]|}\,g_{ji}(p)\,u_i(p)\,e^{pt}\,dp, \tag{19}$$

$$k=1,2,\ldots,n,$$

где $r_{kl}(p)$ — kl-й элемент матрицы $R[p]$;
$H_{jl}[p]$ — алгебраическое дополнение jl-го элемента матрицы $H[p]$;
$g_{ji}(p)$ — ji-й элемент матрицы $G[p]$.

Невыполнение (17), исключающего возможность однозначного определения функций $\left\{\tilde{v}_k(t)\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ при заданном характере функций $\left\{\tilde{u}_i(t)\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$, приводит к вступлению МВС в своеобразный неустойчивый режим работы, названный нами «эффектом рысканья». Сущность «эффекта рысканья» состоит в «блуждании» внутренних процессов МВС между несколькими (в ряде случаев бесконечно многими) вариантами процесса слежения за функциями $\left\{\tilde{u}_i(t)\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$. Характерной особенностью «эффекта рысканья» является то, что он может возникать при невыполнении (17), даже в идеальных МВС с безынерционными преобразующими комплексами. МВС, удовлетворяющие (17), будут именоваться однозначно действующими.

2. *Условия устойчивости однозначно действующих* МВС. Анализ (19) показывает, что при $t\to\infty$ сколько-нибудь точно осуществить цель преобразования (14) рассматриваемой МВС возможно лишь в том случае, если при $\mathrm{re}(p)\geqslant 0$ выполняются соотношения:

$$|E+K[p]\,N[p]\,M[p]|\neq 0; \tag{20}$$

$$|r_{ki}(p)|<\infty;\ |K_{ki}(p)|<\infty;\ |n_{ki}(p)<\infty;\ |s_{ki}(p)|<\infty, \tag{21}$$

$$k=1,2,\ldots,n;\qquad i=1,2,\ldots,n,$$

обеспечивающие затухающий характер переходных процессов в МВС, т. е. устойчивость.

Соотношение (21) в данном случае выражает условие устойчивости воспроизводящих систем, образующих комплексы $КПК_1$, $КПК_2$, $КПК_3$ и $КПК_5$. Соотношение же (20) представляет собой условие устойчивости, свойственное только МВС.

3. *Условие отсутствия явления обобщенного резонанса в однозначно действующих* МВС. Сопоставляя (19) с (14), нетрудно прийти к выводу, что рассматриваемая МВС способна обеспечить при $t \to \infty$ сколь угодно точное достижение цели преобразования далеко не для всех функций $\left\{\tilde{u}_i(t) \in L\right\}_{i=1,2,\dots,n}$. Так, например, это невозможно в тех случаях, когда функции $\{u_i(p)\}_{i=1,2,\dots,n}$ являются дробнорациональными функциями, полюсы которых совпадают с полюсами «долевых» передаточных функций однозначно действующей МВС:

$$d_{ki}(p) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{kl}(p) \frac{H_{jl}[p]}{|H[p]|} g_{ji}(p), \tag{22}$$

$$k=1, 2, \dots, n; \; i=1, 2, \dots, n.$$

В указанном случае в МВС возникает явление обобщенного резонанса, впервые описанное (для односвязных воспроизводящих систем) С. П. Стрелковым [8]. Необходимым и достаточным условием отсутствия явления обобщенного резонанса в рассматриваемой МВС является принадлежность «долевых» импульсных переходных функций МВС

$$d_{ki}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} d_{ki}(p) e^{pt} dp, \tag{23}$$

$$k=1, 2, \dots, n; \; i=1, 2, \dots, n,$$

и функций $\left\{\tilde{u}_i(t)\right\}_{i=1,2,\dots,n}$ к различным подклассам класса L.

В дальнейшем будем предполагать, что функции $\left\{\tilde{u}_i(t)\right\}_{i=1,2,\dots,n}$ принадлежат к классу $L_\alpha \subset L$, произвольная функция которого $\widetilde{\alpha(t)}$ удовлетворяет условию

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{1(t)}{2\pi j} \oint_{\Gamma_\alpha} \alpha(p) e^{pt} dp, \tag{24а}$$

а функции $\{\tilde{d}_{ki}(t)\}_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ k=1,2,\dots,n}}$ принадлежат к классу $L_\beta \subset L$, произвольная функция которого $\widetilde{\beta(t)}$ удовлетворяет условию

$$\tilde{\beta}(t) = \frac{1(t)}{2\pi j} \oint_{\Gamma_\beta} \beta(p) e^{pt} dp. \tag{24б}$$

В (24а) и (24б) символ Γ_α обозначает замкнутый контур, образующий в плоскости p односвязную область G_α, а символ Γ_β — замкнутый контур, образующий в плоскости p односвязную область G_β (рис. 2). Необходимым и достаточным условием отсутствия явления обобщенного резонанса при $\left\{\tilde{u}_i(t) \in \times L_\alpha \doteq G_\alpha\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$ является выполнение соотношений:

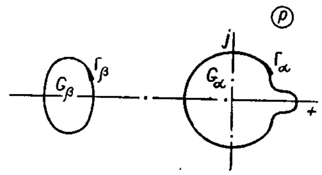

Рис. 2.

$$|d_{ki}(p)| < \infty \text{ при } p \in G'_\alpha \supset G_\alpha,$$
$$k = 1, 2, \ldots, n; \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{25}$$
$$|u_i(p)| < \infty \quad \text{при } p \in G'_\beta \supset G_\beta,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

выражающих несовпадение областей G_α и G_β.

При выполнении соотношений (25) каждая из функций $\left\{\tilde{v}_k(t)\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ может быть представлена как сумма трех составляющих:

$$\tilde{v}(t) = \tilde{v}_k(t)_{\text{А. вын}} + \tilde{v}_k(t)_{\text{НА. вын}} + \tilde{v}_k(t)_{\text{св}}, \tag{26}$$

где

$$\tilde{v}_k(t)_{\text{А. вын}} = \frac{1(t)}{2\pi j} \oint_{\Gamma_\alpha} d_{kk}(p)\, u_k(p)\, e^{pt}\, dp \tag{26а}$$

— автономная вынужденная составляющая;

$$\tilde{v}_k(t)_{\text{НА. вын}} = \frac{1(t)}{2\pi j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \oint_{\Gamma_\alpha} d_{ki}(p)\, u_i(p)\, e^{pt}\, dp \tag{26б}$$

— неавтономная вынужденная составляющая;

$$\tilde{v}_k(t)_{\text{св}} = \frac{1(t)}{2\pi j} \sum_{i=1}^{n} \oint_{\Gamma_\beta} d_{ki}(p)\, u_i(p)\, e^{pt}\, dp \tag{26в}$$

— свободная составляющая.

Для МВС простого преобразования составляющие $\left\{\tilde{v}_k(t)_{\text{НА. вын}}\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ и $\left\{\tilde{v}_k(t)_{\text{св}}\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ представляют собой погрешности преобразования в чистом виде. Для однозначно действующих устойчивых МВС

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{v}_k(t)_{\text{св}} = 0, \tag{27}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

4. *Условие отсутствия явления подавления полезного сигнала в однозначно действующих* МВС. Сопоставляя (26а) с соотношением

$$\tilde{\tilde{v}}_k(t) = \frac{1(t)}{2\pi j} \oint_{\Gamma_\alpha} \bar{d}_{kk}(0)\, e^{p\bar{\tau}}\, u_k(p)\, e^{pt}\, dp, \tag{28}$$

вытекающим из (14), представляется возможным сформулировать четвертое необходимое условие качественного преобразования для МВС простого преобразования — условие отсутствия явления подавления полезного сигнала [2, 7]. Этим условием при $\left\{\tilde{u}_i(t) \in L_\alpha \doteq G_\alpha\right\}_{i=1,2,\dots,n}$ является выполнение соотношений

$$|d_{kk}(p)| \neq 0 \text{ при } p \in G_\alpha' \supset G_\alpha, \tag{29}$$

$$k=1, 2, \dots, n.$$

5. *Условие корректного использования* МВС *для целей простого преобразования.* Ограничим подлежащие преобразованию рассматриваемой МВС функции $\left\{\tilde{u}_i(t)\right\}_{i=1,2,\dots,n}$ классом $L_\gamma \subset L$, произвольная функция которого $\tilde{\gamma}(t)$ удовлетворяет условию

$$\tilde{\gamma}(t) = \frac{1(t)}{2\pi j} \oint\limits_{\Gamma_\gamma} \gamma(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{30}$$

Здесь Γ_γ — окружность радиуса ρ_U, образующая круг $|p| \leqslant \rho_U$, не соприкасающийся с областью G_β и лежащий в зоне аналитичности функций $\{d_{ki}(p)\}_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ k=1,2,\dots,n}}$. В этом случае каждая из функций $\left\{\tilde{v}_k(t)_{\text{А. вын}}\right\}_{k=1,2,\dots,n}$ может быть представлена в виде трех составляющих:

$$\tilde{v}_k(t)_{\text{А. вын}} = \tilde{\tilde{v}}_k(t) + \tilde{v}_k(t)_{\text{АП}} + \tilde{v}_k(t)_{\text{ИН}}, \tag{31}$$

где

$$\tilde{\tilde{v}}_k(t) = \frac{1(t)}{2\pi j} \oint\limits_{\Gamma_\gamma} \bar{d}_{kk}(0)\, e^{p\bar{\tau}}\, u_k(p)\, e^{pt}\, dp \tag{31а}$$

— требуемый характер преобразования;

$$\tilde{v}_k(t)_{\text{АП}} = \frac{1(t)}{2\pi j} \oint\limits_{\Gamma_\gamma} \left[d_{kk}(0)\, e^{\frac{d_{kk}^{(1)}(0)}{d_{kk}(0)}} - \bar{d}_{kk}(0)\, e^{p\bar{\tau}} \right] u_k(p)\, e^{pt}\, dp \tag{31б}$$

— асинхронизм преобразования;

$$\tilde{v}_k(t)_{\text{ИН}} = \frac{1(t)}{2\pi j} \oint\limits_{\Gamma_\gamma} \left[d_{kk}(p) - d_{kk}(0)\, e^{\frac{d_{kk}^{(1)}(0)}{d_{kk}(0)}} \right] u_k(p)\, e^{pt}\, dp \tag{31в}$$

— степень инвариантности преобразования к характеру изменения во времени функций $\left\{\tilde{u}_k(t) \in L_\gamma \doteq \rho_U\right\}_{k=1,2,\dots,n}$. Из приведенных соотношений следует, что составляющие $\left\{\tilde{v}_k(t)_{\text{АП}}\right\}_{k=1,2,\dots,n}$ и $\left\{\tilde{v}_k(t)_{\text{НИ}}\right\}_{k=1,2,\dots,n}$, могут рассматриваться как погрешности преобразования в чистом виде.

Естественно, что указанные погрешности будут минимальными в том случае, если

$$\bar{d}_{kk}(0)_{k=1,2,\ldots,n} = d_{kk}(0); \tag{32а}$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_{kk}^{(1)}(0)}{d_{kk}(0)}. \tag{32б}$$

Выполнение соотношений (32а) и (32б), именуемое в дальнейшем условием корректного использования МВС для целей простого преобразования, и составляет пятое необходимое условие качественного преобразования МВС простого преобразования входных сигналов.

Структура погрешностей преобразования и способы их минимизации. Примем, что МВС, предназначенная для выполнения цели преобразования (14) по отношению к $\left\{\tilde{u}_i(t) \in L_\gamma \div \rho_U\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$, удовлетворяет сформулированным выше пяти необходимым условиям качественного преобразования. В этом случае каждая из мгновенных погрешностей преобразования $\left\{\tilde{\Delta}_k(t)\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ (13) может быть представлена как сумма четырех составляющих

$$\tilde{\Delta}_k(t) = \tilde{v}_k(t)_{\text{св}} + \tilde{v}_k(t)_{\text{АП}} + \tilde{v}_k(t)_{\text{ИН}} + \tilde{v}_k(t)_{\text{НА}}. \tag{33}$$

Оценки предельных значений модулей каждой из указанных составляющих для заданного класса функций $\left\{\tilde{u}_i(t)\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$ в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant \infty$ могут быть произведены методами, используемыми при оценке предельных значений погрешности преобразования односвязных воспроизводящих систем [2, 7, 9, 10]. Анализ структуры составляющих функций $\left\{\tilde{\Delta}_k(t)\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ показывает, что необходимыми условиями минимизации предельных значений модулей этих составляющих являются: а) увеличение запаса устойчивости системы A (рис. 3) — для составляющих $\left\{\tilde{v}_k(t)_{\text{св}}\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$; б) минимальное значение модулей функций $\left\{\bar{d}_{kk}(p) - \bar{d}_{kk}(0)e^{p\bar{\tau}}\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ в круге $|p| \leqslant \rho > \rho_U$ — для составляющих $\left\{\tilde{v}_k(t)_{\text{АП}}\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ и $\left\{\tilde{v}_k(t)_{\text{ИН}}\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ и наконец, в) минимальное значение модулей функций $\{d_{kl}(p)\}_{\substack{l=1,2,\ldots,n\\k=1,2,\ldots,n\\l\neq k}}$ в круге $|p| \leqslant \rho > \rho_U$. Нетрудно убедиться, что если

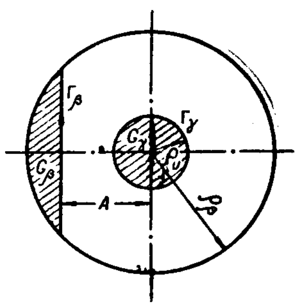

Рис. 3.

$$\operatorname{re}\left[\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{kl}(p)\, n_{lj}(p)\, m_{jk}(p)\right] \gg 1, \tag{34}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

то условия «б» и «в» выполняются при

$$R[p]M^{-1}[p]S[p] = \underset{\sim}{C}[0], \tag{35}$$

где $\underset{\sim}{C}[0]$ — диагональная матрица с вещественными элементами

$$c_{kk}(0) = \frac{\bar{d}_{kk}(0)}{1 - \left[\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{kl}(0)\,\frac{H_{jl}[0]\,R_{kj}[0]}{|H[0]|\,|R[0]|}\right]}, \tag{36}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

В дальнейшем равенство (35), рассматриваемое совместно с (34), будет именоваться условием оптимальной коррекции МВС простого преобразования, а МВС, реализованные в соответствии с (35) и (34),— оптимально корректированными МВС простого преобразования*.

Следует отметить, что условие оптимальной коррекции имеет смысл в том случае, если выполнение его не нарушает сформулированных выше необходимых условий качественного преобразования для МВС простого преобразования.

Конкретные схемы оптимально корректированных МВС *простого преобразования*. Рассмотрим некоторые конкретные схемы оптимально корректированных МВС, удовлетворяющих необходимым условиям качественного преобразования при простом преобразовании входных сигналов $\left\{\tilde{u}_i(t) \in L_\gamma \doteqdot \rho_U\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$.

1. Многосвязная измерительно-регистрирующая система (МИРС). Векторно-структурная схема МИРС приведена на рис. 4. Роль $КПК_1$ в МИРС выполняет комплекс первичных преобразователей (КПК), роль $КПК_2$ — комплекс сравнивающих устройств (КСУ), роль $КПК_3$ — комплекс усиливающих устройств (КУУ), роль $КПК_5$ — комплекс регистрирующих органов системы (КРО), роль $КПК_4$ — последовательно включенные структурные модели КПП и КРО, обозначенные символами МКПП и МКРО.

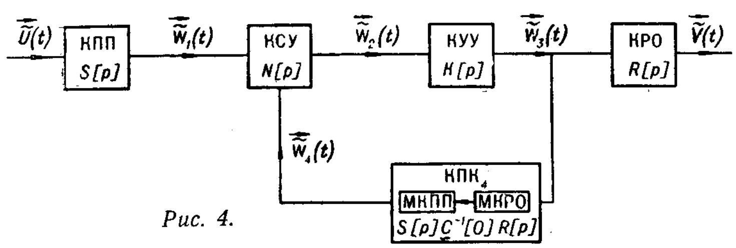

Рис. 4.

Воспроизводящие свойства $КПК_4$ в МИРС характеризуются матричным соотношением

$$M[p] = S[p]\underset{\sim}{C}^{-1}[0]R[p], \tag{37}$$

вытекающим из условия оптимальной коррекции (35).

МИРС, реализованные в соответствии с (37), при выполнении необходимых условий качественного преобразования и достаточно высоких значениях коэффициентов усиления преобразующих элементов, входящих в КСУ, КУУ и $КПК_4$, обеспечивают: а) динамическую коррекцию всех преобразующих элементов системы, б) коррекцию несе-

* Условие оптимальной коррекции односвязных воспроизводящих систем простого преобразования сформулировано нами ранее [11].

лективности (неизбирательности, неавтономности) действия всех преобразующих элементов системы и в) коррекцию нестабильности действия преобразующих элементов, входящих в КСУ и КУУ.

Характерно, что МИРС рассматриваемого типа удается использовать (за счет повышения порядка корректных преобразующих комплексов) для выделения и регистрации возмущений, действующих на комплекс первичных преобразователей системы.

В том случае, если регистрирующие органы МИРС малоинерционны и селективны, оптимальная коррекция МИРС достигается за счет использования в качестве $КПК_4$ структурной модели МКПП.

Требуемый характер преобразующих свойств $КПК_4$ в этом случае выражается

$$M[p]=S[p]\underset{\sim}{C}^{-1}[0]\underset{\sim}{R}[0], \tag{38}$$

где $\underset{\sim}{R}[0]$ — диагональная матрица с вещественными элементами, характеризующая преобразующие свойства $КПК_5$.

2. *Многосвязная система автоматического управления* (МСАУ). Векторно-структурная схема МСАУ приведена на рис. 5. Роль $КПК_1$ в МСАУ выполняет комплекс органов управления системы (КОУ), роль

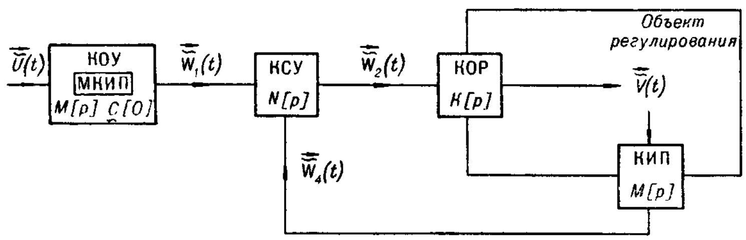

Рис. 5.

$КПК_2$ — комплекс сравнивающих устройств (КСУ), роль $КПК_3$ — комплекс органов регулирования объекта регулирования (КОР) и роль $КПК_4$ — комплекс измерительных преобразователей системы (КИП). Функции $\{\tilde{u}_i(t)\}_{i=1,2,\dots,n}$ в рассматриваемом случае описывают управляющие воздействия, а функции $\{\tilde{v}_k(t)\}_{k=1,2,\dots,n}$ — физические процессы, характеризующие состояние объекта регулирования. Векторно-структурная схема МСАУ может рассматриваться как вариант векторно-структурной схемы (см. рис. 1) для случая, когда характеризующая матрица $КПК_5$ удовлетворяет тождеству

$$R[p]\equiv E. \tag{39}$$

Из этого следует, что для МСАУ сохраняют свое значение аналитические результаты, полученные для МВС простого преобразования, в том числе и сформулированные пять условий качественного преобразования, отсутствующие в известных нам работах по теории МСАУ (например, [12, 13]).

Применительно к МСАУ условие оптимальной коррекции (35) имеет вид

$$S[p]=M[p]\underset{\sim}{C}[0]. \tag{40}$$

Из (40) следует целесообразность использования в МСАУ в качестве КОУ структурной модели КИП — МКИП [14].

Построенная таким образом МСАУ при выполнении необходимых условий качественного преобразования и соотношений (34) обеспечивает реакцию на управляющие сигналы $\left\{\tilde{u}_i(t) \in L_\gamma \dotdiv \rho_U\right\}_{i=1,\ 2,\dots,\ n}$ при минимальных отклонениях от режима автономного [15, 16] синхронного управления физическими процессами $\left\{\widetilde{v}_k(t)\right\}_{k=1,\ 2,\ \dots,\ n}$, характеризующими состояние объекта регулирования.

Линейные МВС сложного преобразования

Определение. Линейной МВС сложного преобразования мы будем именовать МВС, цель преобразования которых существенно отличается от цели преобразования МВС простого преобразования.

К подобным МВС могут быть отнесены: линейные МИРС, выполняющие наряду с измерительными функциями вычислительные, линейные МСАУ, управляющие объектом регулирования в направлении, обеспечивающем определенное соответствие между физическими процессами $\left\{\widetilde{v}_k(t)\right\}_{k=1,\ 2,\ \dots,\ n}$, и, наконец, линейные многосвязные аналоговые вычислительные устройства (МАВУ) различного назначения.

Рассмотрим возможность использования МВС, реализованных в соответствии с векторно-структурной схемой, приведенной на рис. 1, для выполнения функций линейных МВС сложного воспроизведения, а именно линейного МАВУ с целью преобразования

$$\vec{\overline{V}}(p) = [E + \overline{P}[p]]^{-1}\,\vec{U}(p) \quad \text{(тип А)} \tag{41}$$

и линейного МАВУ с целью преобразования

$$\vec{\overline{V}}(p) = \overline{Q}^{-1}[p]\vec{U}(p) \quad \text{(тип Б)}. \tag{42}$$

Линейные МАВУ *типа* А. Из (41) следует, что устройства рассматриваемого типа предназначены для решения систем интегральных уравнений Вольтерра II рода с разностными ядрами [17]:

$$\tilde{u}_i(t) = \overline{\widetilde{\widetilde{v}}}_i(t) + \sum_{k=1}^{n}\int_0^t \overline{\tilde{p}}_{ik}(t-\xi)\,\overline{\widetilde{\widetilde{v}}}_k(\xi)\,d\xi, \tag{43}$$

$$i = 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

относительно функций $\left\{\overline{\widetilde{\widetilde{v}}}_k(t)\right\}_{k=1,\ 2,\dots,\ n}$. Сопоставляя (41) с (10), нетрудно прийти к выводу, что МВС (см. рис. 1) может быть использована в качестве МАВУ типа А лишь в том случае, если характеризующие матрицы преобразующих комплексов этой МВС удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} K[p] &\equiv N[p] \equiv S[p] \equiv R[p] \equiv E; \\ M[p] &\equiv \overline{P}[p]. \end{aligned} \tag{44}$$

Из (44) также следует то, что линейная МВС, векторно-структурная схема которой приведена на рис. 6, может быть использована в качестве МАВУ типа А, обеспечивающей решение системы интегральных уравнений (44) относительно функций $\left\{\tilde{\tilde{v}}_k(t)\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ с точностью, определяемой точностью реализации преобразующего комплекса КПК с характеризующей квадратной невырожденной [4] матрицей $\bar{P}[p]$ n-го порядка*.

Линейные МАВУ *типа* Б. Из (42) следует, что устройства типа Б предназначены для решения систем интегральных уравнений

$$\tilde{u}_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \tilde{\bar{q}}_{ik}(t-\xi)\, \tilde{\tilde{v}}_k(\xi)\, d\xi, \tag{45}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

относительно функций $\left\{\tilde{\tilde{v}}_k(t)\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$.

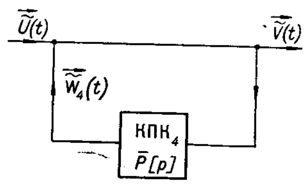

Рис. 6.

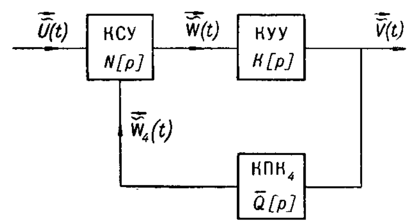

Рис. 7.

Сопоставляя (42) с (10), нетрудно прийти к выводу, что если функции $\left\{\tilde{u}_i(t)\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$ относятся к классу L, то в качестве линейной МАВУ типа Б может быть использована линейная МВС (см. рис. 1), удовлетворяющая условию однозначности действия (17) и условиям:

$$R[p] \equiv S[p] \equiv E; \tag{46а}$$

$$M[p] \equiv \bar{Q}[p]. \tag{46б}$$

Векторно-структурная схема такой МВС приведена на рис. 7. Для этой схемы взаимосвязь между $\vec{V}(p)$ и $\vec{U}(p)$ выражается матричным соотношением

$$\vec{V}(p) = \{\bar{Q}^{-1}[p] - [E + K[p]N[p]\bar{Q}[p]]^{-1}\bar{Q}^{-1}[p]\}\vec{U}(p). \tag{47}$$

Сопоставляя (47) с (42), замечаем, что для рассматриваемой МВС погрешности вычисления функций $\left\{\tilde{\tilde{v}}_k(t)\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ — функции $\left\{\tilde{\Delta}_k(t)\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ (13) — определяются по формулам

$$\tilde{\Delta}_k(t) = -\frac{1}{2\pi j} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{H_{jk}[p]\,\bar{Q}_{ij}[p]}{|H[p]|\,|\bar{Q}[p]|}\, u_i(p)\, e^{pt}\, dp, \tag{48}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

---

* Устройство рассматриваемого типа для $n=1$ описано нами ранее [18].

Анализ (48) показывает, что необходимым условием минимизации модулей $\left\{\left|\tilde{\Delta}_k(t)\right|\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ является устойчивый характер работы рассматриваемой МВС, обеспечиваемый выполнением соотношений:

$$|H[p]| \equiv |E + K[p] N[p] \overline{Q}[p]| \neq 0; \qquad (49а)$$

$$|\overline{Q}[p]| \neq 0 \qquad (49б)$$

при $\operatorname{re}(p) \geqslant 0$.

При $t \to \infty$ существенное уменьшение предельных значений модулей $\left\{\left|\tilde{\Delta}_k(t)\right|\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ обеспечивается, кроме того, ограничением возможных вариаций функций $\left\{\tilde{u}_i(t)\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$ классом L_α, т. е. исключением возможности возникновения явления обобщенного резонанса.

Если $\left\{\tilde{u}_i(t)\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$ принадлежит к классу $L_\alpha \dotplus G_\alpha$, каждая из функций $\left\{\tilde{\Delta}_k(t)\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ может быть представлена в виде двух составляющих

$$\tilde{\Delta}_k(t) = \tilde{\Delta}_k(t)_{\text{св}} + \tilde{\Delta}_k(t)_{\text{вын}}, \qquad (50)$$

где

$$\tilde{\Delta}_k(t)_{\text{св}} = -\frac{1}{2\pi j} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \oint_{\Gamma_\beta} \frac{H_{jk}[p]\, \overline{Q}_{ij}[p]}{|H[p]|\, |\overline{Q}[p]|}\, u_i(p)\, e^{pt}\, dp; \qquad (50а)$$

$$\tilde{\Delta}_k(t)_{\text{вын}} = -\frac{1}{2\pi j} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \oint_{\Gamma_\alpha} \frac{H_{jk}[p]\, \overline{Q}_{ij}[p]}{|H[p]|\, |\overline{Q}[p]|}\, u_i(p)\, e^{pt}\, dp. \qquad (50б)$$

Для устойчивых МВС выполняются соотношения (27). Из этого следует, что при $t \to \infty$ достаточным условием минимизации модулей $\left\{\left|\tilde{\Delta}_k(t)\right|\right\}_{k=1,2,\ldots,n}$ при $\left\{\tilde{u}_i(t) \in L_\alpha \dotplus G_\alpha\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$ является минимизация модулей функций $\left\{\dfrac{H_{jk}[p]\, \overline{Q}_{ij}[p]}{|H[p]|\, |\overline{Q}[p]|}\right\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,n\\ k=1,2,\ldots,n}}$ в области G_α, обеспечиваемая при выполнении (17), (49) и (49б) увеличением «долевых» коэффициентов усиления КСУ и КУУ.

В заключение отметим, что в том случае, если в качестве матрицы $\overline{Q}[p]$ принята квадратная невырожденная матрица $\overline{Q}$ с вещественными элементами $\{q_{ki}\}_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ k=1,2,\ldots,n}}$, рассматриваемая МВС при $t \to \infty$ обеспечивает возможность решения системы алгебраических уравнений

$$\tilde{u}_i(t) = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} \tilde{\tilde{v}}_k(t),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

относительно функций $\{\tilde{\tilde{v}}_k(t)\}_{k=1,2,\ldots,n}$ при принадлежности функций $\{\tilde{u}_i(t)\}_{i=1,2,\ldots,n}$ к классу $L_\alpha \dotplus G_\alpha$. При этом, если функции

$\{\tilde{u}_i(t)\}_{i=1,2,\ldots,n}$ могут быть преобразованы в изменения омических сопротивлений в качестве МАВУ типа Б, обеспечивающего решение системы алгебраических уравнений, может быть использована система механически связанных, автоматически компенсируемых мостов [19].

Таким образом, в работе получены аналитические выражения для необходимых и достаточных условий качественной работы многосвязных воспроизводящих систем простого и сложного преобразования, реализованных на базе линейных инерционных преобразующих элементов неселективного действия.

Результаты работы свидетельствуют о целесообразности включения многосвязных воспроизводящих систем в арсенал современной измерительной техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин. Теория и расчет воспроизводящих систем. (Автореф. канд. дисс.). М., 1946.
2. В. Г. Васильев. Об оценке точности воспроизведения линейных следящих и регистрирующих систем.— Автоматика и телемеханика, 1958, т. XIX, № 1.
3. А. И. Лурье. Операционное исчисление. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
4. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М.—Л., Гостехиздат, 1953.
5. М. М. Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
6. А. Н. Тихонов. Об устойчивости обратных задач.— Докл. АН СССР, 1944, № 39.
7. В. Г. Васильев. Работа электрических фильтров при негармонических воздействиях.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 3.
8. С. П. Стрелков. К общей теории линейных усилителей.— Автоматика и телемеханика, 1948, т. IX, № 3; 1949, т. X, № 4.
9. В. Г. Васильев. Задача инвариантности для линейных воспроизводящих систем.— В сб. «Теория инвариантности». Киев, Изд-во АН УССР, 1959.
10. В. Г. Васильев. Об одном методе исследования динамической точности магнитоэлектрических осциллографов.— Электромеханика и автоматика, 1959, № 1.
11. В. Г. Васильев. Устройство для корректирования динамических характеристик электромеханических систем. Авт. свидетельство № 120264, приоритет от 20 декабря 1957 г.
12. П. И. Чинаев. Многомерные автоматические системы. Киев, Гостехиздат, УССР, 1963.
13. В. Т. Морозовский. Синтез автономных многомерных систем автоматического регулирования.— В сб. «Теория инвариантности». М., Изд-во «Наука», 1964.
14. В. Г. Васильев. Устройство связанного регулирования многомерного объекта. Авт. свидетельство № 162196, приоритет от 2 января 1963 г.
15. Н. И. Вознесенский. О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров.— Автоматика и телемеханика, 1938, № 4—5.
16. М. В. Мееров. Многосвязные системы автоматического регулирования.— Труды I Всесоюзного совещания по многосвязным системам автоматического регулирования. М., Изд-во «Наука», 1964.
17. У. В. Ловит. Линейные интегральные уравнения. М., Гостехиздат, 1957.
18. В. Г. Васильев. Автоматическое устройство для решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода с ядром типа $k(t-x)$.— Электромеханика и автоматика, 1958, № 4.
19. В. Г. Васильев. Автоматическое электромеханическое устройство для решения систем уравнений. Авт. свидетельство № 143564, приоритет от 8 сентября 1960 г.

Поступила в редакцию 16 декабря 1964 г.,
после переработки — 9 февраля 1965 г.