АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1965

УДК 681.2.08

В. М. ЕФИМОВ
(Новосибирск)

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИН ПРИ ДИСКРЕТНОМ ИЗМЕРЕНИИ И КОНТРОЛЕ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМА ЛАГРАНЖА

Рассматриваются предельные возможности полинома Лагранжа при дискретном измерении и контроле случайно изменяющихся величин. Предлагаются расчетные соотношения, облегчающие определение интервала времени и расстояний между датчиками при дискретном измерении и контроле.

При дискретном измерении и контроле случайно изменяющихся величин находит применение интерполирование полиномом Лагранжа [1, 2]. Как и при использовании любой другой интерполяционной формулы, при применении полинома Лагранжа необходимо определять интервал между измерениями, исходя из заданного максимального значения среднего квадрата погрешности интерполяции. При этом желательно, чтобы величина интервала между измерениями была наибольшей. Например, в случае контроля поля параметра увеличение интервала приводит к уменьшению необходимого числа датчиков [1].

Одним из возможных путей увеличения интервала Δ между измерениями является повышение степени n интерполирующего полинома. Однако может оказаться, что повышение степени полинома либо дает незначительный эффект в увеличении интервала, либо уменьшает его значение. Проверка же целесообразности повышения степени полинома связана с довольно трудоемкими расчетами.

В связи с этим ниже предлагаются предельные соотношения, которые, на наш взгляд, облегчают определение интервала между измерениями и выбор рациональной степени полинома Лагранжа.

При интерполяции полиномом Лагранжа $x_n^*(t)$ по равноотстоящим отсчетам максимумы среднего квадрата погрешности неодинаковы для всех интервалов между отсчетами. Рассмотрим, чему равно значение $\overline{\varepsilon_{\tilde{n}}^2}$ для среднего интервала (n — нечетно) при неограниченном возрастании n. Знание предельного значения максимума среднего квадрата погрешности весьма полезно при определении рациональной степени полинома, так как для другого крайнего случая ($n=1$) имеются простые расчетные соотношения [2]. Располагая этими величинами, уже можно судить об эффективности увеличения степени полинома.

Полагая измеряемую величину $x(t)$ стационарным случайным процессом, а отсчеты $x(k\Delta)$ центрированными и свободными от погрешностей, запишем выражение для математического ожидания среднего квадрата погрешности

$$\bar{\varepsilon}_n^2(t) = E[x(t) - x_n^*(t)]^2 = E\left[x(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, x(k\Delta)\right]^2, \tag{1}$$

где

$$a_k(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(t - i\Delta)}{(k - i)\Delta}. \tag{2}$$

Используя спектральное представление процесса [3]

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega t]\, dX(\omega), \tag{3}$$

формулу (1) можно преобразовать следующим образом:

$$\bar{\varepsilon}_n^2(t) = E\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\exp[j\omega t] - \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\exp[j\omega k\Delta]\right) dX(\omega)\right|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\left|\exp[j\omega t] - \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\exp[j\omega k\Delta]\right|^2 d\omega, \tag{4}$$

где $S(\omega)$ — спектральная плотность процесса.

При $t = \frac{n\Delta}{2}$ из (2) и (4) следует

$$\bar{\varepsilon}_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\left(1 - 2\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{(n!!)^2}{2^n\left(\frac{n+1}{2} - k\right)!\left(\frac{n-1}{2} + k\right)!} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} \cos(2k-1)\frac{\omega\Delta}{2}\right)^2 d\omega. \tag{5}$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n!!)^2}{2^n\left(\frac{n+1}{2} - k\right)!\left(\frac{n-1}{2} + k\right)!} = \frac{2}{\pi}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \bar{\varepsilon}_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\left(1 - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} \cos(2k-1)\frac{\omega\Delta}{2}\right)^2 d\omega. \tag{6}$$

Сумма, стоящая под знаком интеграла, является рядом Фурье для функции $\operatorname{sign}\cos\frac{\omega\Delta}{2}$ («прямоугольной» косинусоиды). Поэтому

$$\bar{\varepsilon}_\infty^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\left(1 - \operatorname{sign}\cos\frac{\omega\Delta}{2}\right)^2 d\omega =$$

$$=2\int\limits_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}}\left[\sum_{-\infty}^{\infty}S\left(\omega+\frac{2\pi}{\Delta}k\right)(1-(-1)^{k})\right]d\omega<4\int\limits_{|\omega|>\frac{\pi}{\Delta}}S(\omega d)\,\omega. \tag{7}$$

Из (7) следует, что если спектральная плотность процесса ограничена частотой $\omega_c \leqslant \frac{\pi}{\Delta}$, то максимум среднего квадрата погрешности для центрального интервала равен нулю. Для процессов с неограниченной по частоте спектральной плотностью при малом значении $\overline{\varepsilon^2_\infty}$ величина этого максимума не превышает ее учетверенной энергии на частотах $|\omega|>\frac{\pi}{\Delta}$. Несложно показать, что при $n\to\infty$ аналогичный результат будет получен, если в качестве коэффициентов интерполяционной формулы в (4) использовать

$$a_k=\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)},$$

т. е. коэффициенты ряда Котельникова. Из этого следует, что в рассматриваемом случае коэффициенты полинома Лагранжа сходятся к коэффициентам ряда Котельникова (см. также [4]).

Формула (7) позволяет определить предельное значение интервала между измерениями при интерполировании на середину (при «скользящем» интерполировании), т. е. для $t=\frac{n\Delta}{2}$. При малых значениях максимума среднего квадрата погрешности можно использовать

$$\overline{\varepsilon^2_\infty}\cong 8\int\limits_{\frac{\pi}{\Delta}}^{\infty}S(\omega)\,d\omega. \tag{8}$$

Следует отметить, что в общем случае предельное значение интервала не является максимальным, т. е. при «скользящем» интерполировании может существовать такая степень полинома n_0, которой при фиксированном Δ соответствует минимальное значение максимума среднего квадрата погрешности. Ниже, например, показано, что для процесса с корреляционной функцией $R(\tau)=\sigma^2\exp[-\alpha|\tau|]$ $n_0=1$. Для более «гладких» процессов предельное значение интервала близко к максимальному.

Рассмотрим, далее, чему равно значение максимума среднего квадрата погрешности в крайнем интервале при $n\to\infty$. Для этого запишем полином Лагранжа в форме Ньютона:

$$x_n^*(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,\Delta^k}\left(\prod_{i=0}^{k}(t-i\Delta)\right)f^k_{\frac{k}{2}}, \tag{9}$$

где

$$f^k_{\frac{k}{2}}=\sum_{l=0}^{k}x(k\Delta-l\Delta)(-1)^l\binom{k}{l} \tag{10}$$

— конечная разность k-го порядка. Для конечной разности k-го порядка из (3) и (10) следует спектральное представление

$$f^{k}_{\frac{k}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} (\exp[j\omega\Delta] - 1)^{k} dX(\omega). \tag{11}$$

После подстановки (11) и (9) в (1) получим соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\varepsilon}_n^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left| \exp[j\omega t] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{k}(t - i\Delta)}{\Delta^k k!} \times \right.$$
$$\left. \times (\exp[j\omega\Delta] - 1)^k \right|^2 d\omega. \tag{12}$$

Сумма в (12) представляет собой степенной ряд для величины $(1+z)^{\frac{t}{\Delta}}$, где $z = \exp[j\omega\Delta] - 1$. Ряд такого типа расходится при $|z| > 1$ и сходится абсолютно при $|z| \leqslant 1$ [5], т. е. в данном случае при $\omega_c \leqslant \frac{\pi}{3\Delta}$. Таким образом, максимум среднего квадрата погрешности в крайнем интервале при $n \to \infty$ равен нулю, если спектральная плотность ограничена частотой $\omega_c \leqslant \frac{\pi}{3\Delta}$, и принимает неограниченное значение в противном случае. Из этого следует, что в общем случае при фиксированном Δ максимум среднего квадрата погрешности в крайнем интервале убывает при увеличении степени полинома до некоторого числа n_0. При дальнейшем увеличении степени полинома $\bar{\varepsilon}_n^2$ начинает возрастать, если не выполняется условие $\omega_c \leqslant \frac{\pi}{3\Delta}$.

Таким образом, при интерполировании полиномом Лагранжа в поведении максимумов среднего квадрата погрешности для среднего и крайнего интервалов существует различие. Это подтверждается и поведением среднего квадрата полинома в точке интерполяции при увеличении интервала времени между измерениями:

$$\lim_{\Delta \to \tau_k} E[x_n^*(t)]^2 = \sigma^2 \sum_{k=0}^{n} a_k^2(t).$$

Здесь τ_k — интервал времени между измерениями, при достижении которого корреляцией между двумя ближайшими измерениями можно пренебречь.

В среднем интервале при увеличении n

$$\lim_{\substack{\Delta \to \tau_k \\ n \to \infty}} E\left[x_n^*\left(\frac{n\Delta}{2}\right)\right]^2 = \lim_{n\to\infty} \sigma^2 2 \sum_{1}^{\frac{n+1}{2}} \left[\frac{(n!!)^2}{2^n\left(\frac{n+1}{2} - k\right)!\left(\frac{n-1}{2} + k\right)!}\right]^2 \times$$
$$\times \frac{1}{(2k-1)^2} = \sigma^2.$$

Для крайнего интервала из (2) при $t=\frac{1}{2}\Delta$ следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta\to\tau_k\\ n\to\infty}} E\left[x_n^*\left(\frac{1}{2}\Delta\right)\right]^2=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\frac{1}{(2k-1)^2}=\infty.$$

Рассмотрим, далее, экстраполяционные возможности полинома Лагранжа. Ряд в формуле (12) сходится абсолютно к величине $\exp[j\omega t]$ при любом значении t для $\omega_c<\frac{\pi}{3\Delta}$. Для отрицательных значений t формула (12) будет определять средний квадрат погрешности экстраполяции. Из условия сходимости суммы в (12) вытекает, что максимальная степень полинома Лагранжа при экстраполировании не ограничена, если $\omega_c<\frac{\pi}{3\Delta}$, и средний квадрат погрешности экстраполяции при этом равен нулю. Рассмотрим экстраполяцию на один интервал Δ. Для этого, полагая верхний предел суммы в (12) равным n, при $t=(n+1)\Delta$ получим следующее выражение:

$$\bar{\varepsilon}_n^2=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\left|\exp[j\omega(n+1)\Delta]-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(\exp[j\omega\Delta]-1)^k\right|^2 d\omega. \quad (13)$$

По формуле бинома Ньютона

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(\exp[j\omega\Delta]-1)^n=\exp[j\omega(n+1)\Delta],$$

поэтому выражение (13) можно привести к виду*:

$$\bar{\varepsilon}_n^2=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\,|\exp[j\omega\Delta]-1|^{2(n+1)}d\omega=$$

$$=2^{2(n+1)}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\left[\sin\frac{\omega\Delta}{2}\right]^{2(n+1)}d\omega. \quad (14)$$

В общем случае поведение $\bar{\varepsilon}_n^2$ таково, что при фиксированном Δ и возрастании n значение $\bar{\varepsilon}_n^2$ вначале уменьшается, а затем начинает увеличиваться. Таким образом, максимальная степень полинома ограничена некоторым числом n_0. Значение n_0 можно найти из условия равенства максимума среднего квадрата погрешности при экстраполяции полиномом степени n_0 и n_0+1:

$$\bar{\varepsilon}_{n_0}^2-\bar{\varepsilon}_{n_0+1}^2=2^{2(n_0+1)}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\left[\sin\frac{\omega\Delta}{2}\right]^{2(n_0+1)}\left[1-4\sin^2\frac{\omega\Delta}{2}\right]d\omega=0. \quad (15)$$

---

* Условие $\omega_c<\frac{\pi}{3\Delta}$ можно найти из (14) при $n\to\infty$. Оно также вытекает как частный случай из соотношения, полученного в [6] для экстраполяционной формулы более общего вида.

Уравнение (15) совместно с (14) связывает максимальную степень полинома n_0, величину интервала времени между измерениями Δ и максимум среднего квадрата погрешности экстраполяции.

Максимальная и рациональная степени полинома Лагранжа зависят от «гладкости» (дифференцируемости в среднеквадратичном) измеряемой величины. Рассмотрим для примера две спектральные плотности:

$$S_1(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad R_1(\tau) = \sigma^2 \exp[-\alpha|\tau|];$$

$$S_2(\omega) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\,\alpha} \exp\left[-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}\right], \quad R_2(\tau) = \sigma^2 \exp\left[-\frac{(\alpha\tau)^2}{2}\right].$$

Первая спектральная плотность соответствует недифференцируемой величине, вторая — величине, имеющей производную любого порядка.

Зафиксируем максимум среднего квадрата погрешности и сопоставим значение интервала между измерениями при интерполировании полиномом первой степени с предельным значением интервала (7). Для $S_1(\omega)$ из (6) при $n=1$ (см. также [2]) и из (7) получим

$$\bar{\varepsilon}_1^2 \cong \sigma^2 \frac{\alpha\Delta_1}{2}; \quad \bar{\varepsilon}_\infty^2 = \frac{8}{\pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha\Delta}{(2k-1)\pi}\right] \cong \sigma^2 \frac{2\alpha\Delta_\infty}{\pi}. \quad (16)$$

Из (16) следует, что $\frac{\Delta_\infty}{\Delta_1} \cong \frac{\pi}{4}$, т. е. $\Delta_1 > \Delta_\infty$ и для спектральной плотности $S_1(\omega)$ максимальная степень полинома равна единице. Для $S_2(\omega)$ найдем из тех же формул

$$\bar{\varepsilon}_1^2 \cong \sigma^2 \frac{3}{64} \alpha^4 \Delta_1^4; \quad \bar{\varepsilon}_\infty^2 \cong 8\left[\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\pi}{\alpha\Delta_\infty}\right)\right], \quad (17)$$

где $\Phi\left(\frac{\pi}{\alpha\Delta}\right)$ — интеграл вероятности.

В таблице приведены результаты расчета интервала Δ по (17) для различных значений максимума среднего квадрата погрешности. Целесообразность увеличения степени полинома возрастает по мере уменьшения заданного значения максимума среднего квадрата погрешности. Естественно предположить, что для спектральных плотностей, занимающих промежуточное положение между $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$, значения $\frac{\Delta_\infty}{\Delta_1}$ будут меньше тех, что даны в таблице. В связи с этим можно ожидать, что при разумных требованиях к точности в ряде случаев первая степень полинома будет близка к рациональной. При экстраполяции справедливы аналогичные соображения. Например, для $S_1(\omega)$ максимальная степень полинома при экстраполяции равна нулю (см., например, [1]). Для $S_2(\omega)$ значения $\frac{\Delta_{n_0}}{\Delta_1}$ близки к значениям, приведенным в таблице. Заметим, что понижению рациональной степени полинома способствует наличие по-

$\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\sigma^2}$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{\Delta_\infty}{\Delta_1}$	1,2	1,5	2,2	3,5

грешностей измерения, так как обычно спектральная плотность погрешности шире спектральной плотности измеряемой величины.

В заключение автор считает своим долгом поблагодарить д-ра техн. наук М. П. Цапенко, замечания которого способствовали улучшению работы.

тематических наук, 1952, т. 7, № 4.

4. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М., Физматгиз, 1962.
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
6. Ю. Г. Полляк. Об экстраполяции (предсказании) функции с ограниченным спектром по ее дискретным значениям.— Радиотехника, 1962, № 11.

Поступила в редакцию 15 февраля 1965 г.,
после переработки — 25 февраля 1965 г.