АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1965

УДК 681.2.08

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. М. ЕФИМОВ
(Новосибирск)

ОБ ОДНОЙ МЕТОДИКЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛА ВРЕМЕНИ МЕЖДУ ОТСЧЕТАМИ ПРИ ЦИФРОВОМ ИЗМЕРЕНИИ

Одним из основных условий качественного выполнения процессов измерения величин, случайно изменяющихся во времени, является согласование быстродействия прибора со статистической динамикой измеряемой величины. В [1] предлагается производить выбор необходимой частоты измерений, исходя из минимума суммарного среднего квадрата погрешности, одна составляющая которого обусловлена изменением измеряемой величины за время между измерениями, а другая — квантованием измеряемой величины по уровню. При этом используется ступенчатая аппроксимация измеряемой величины со сдвигом аппроксимирующей ломаной на половину интервала времени между измерениями. Этот метод представляет несомненный интерес. Однако пользоваться расчетными формулами в виде, предложенном в [1], затруднительно, так как при подсчете первой составляющей погрешности необходимо выполнять численное интегрирование довольно громоздких выражений для каждого конкретного случая.

Ниже будет показано, что путем преобразований расчетные формулы [1] могут быть упрощены и уточнены, а в случае дифференцируемости измеряемой величины — приведены к элементарным расчетным соотношениям.

Приведем используемую в [1] расчетную формулу для определения среднего квадрата первой составляющей погрешности:

$$\overline{\overline{\varepsilon}}^2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} \left(1 - \frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}}\right)^2 S(\omega)\, d\omega + \int\limits_{|\omega| > \frac{\pi}{\Delta}} \left(\frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}}\right)^2 \times$$

$$\times \left[\sum_{\substack{-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} S\left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta} k\right)\right] d\omega, \qquad (1)$$

где $S(\omega)$ — спектральная плотность измеряемой величины;

Δ — интервал времени между измерениями.

Формула (1) после некоторых преобразований может быть приведена к более компактному виду. Для этого раскрываем квадрат в первом интеграле и объединяем соответствующие члены первого и второго интегралов:

$$\overline{\overline{\varepsilon}}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}}\right)^2 \left[\sum_{-\infty}^{\infty} S\left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta} k\right)\right] d\omega -$$

$$- 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} \frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}} S(\omega)\, d\omega + \int\limits_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} S(\omega)\, d\omega. \qquad (2)$$

Так как спектральная плотность измеряемой величины ограничена частотой $\frac{\pi}{\Delta}$, то последний член формулы (2) равен дисперсии измеряемой величины. Рассмотрим первый член. Для него справедливы следующие преобразования:

$$a=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}}\right)^2\left[\sum_{-\infty}^{\infty}S\left(\omega+\frac{2\pi}{\Delta}k\right)\right]d\omega=$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{\frac{2\pi}{\Delta}(2l-1)}^{\frac{2\pi}{\Delta}(2l+1)}\left(\frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}}\right)^2\left[\sum_{-\infty}^{\infty}S\left(\omega+\frac{2\pi}{\Delta}k\right)\right]d\omega=$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{2\pi}{\Delta}}^{\frac{2\pi}{\Delta}}\left(\frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}-2\pi l}\right)^2\left[\sum_{-\infty}^{\infty}S\left(\omega+\frac{2\pi}{\Delta}k\right)\right]d\omega=$$

$$=\int_{-\frac{2\pi}{\Delta}}^{\frac{2\pi}{\Delta}}\frac{1}{4\pi^2}\sin^2\frac{\omega\Delta}{2}\left[\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{\omega\Delta}{4\pi}-l\right)^2}\right]\left[\sum_{-\infty}^{\infty}S\left(\omega+\frac{2\pi}{\Delta}k\right)\right]d\omega.$$

Первая сумма в выражении равна ([2], формула 1.422.4):

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{\omega\Delta}{4\pi}-l\right)^2}=\operatorname{cosec}^2\frac{\omega\Delta}{4}.$$

Следовательно, указанный интеграл запишется как

$$a=\int_{-\frac{2\pi}{\Delta}}^{\frac{2\pi}{\Delta}}\cos^2\frac{\omega\Delta}{4}\left[\sum_{-\infty}^{\infty}S\left(\omega+\frac{2\pi}{\Delta}k\right)\right]d\omega=$$

$$=\int_{-\frac{2\pi}{\Delta}}^{\frac{2\pi}{\Delta}}\cos^2\frac{\omega\Delta}{4}\left[\sum_{-\infty}^{\infty}S\left(\omega+\frac{2\pi}{\Delta}2k\right)\right]d\omega+$$

$$+\int_{-\frac{2\pi}{\Delta}}^{\frac{2\pi}{\Delta}}\cos^2\frac{\omega\Delta}{4}\left[\sum_{-\infty}^{\infty}S\left(\omega+\frac{2\pi}{\Delta}(2k+1)\right)\right]d\omega=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 \frac{\omega \Delta}{4} S(\omega)\, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\omega \Delta}{4} S(\omega)\, d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega = \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} S(\omega)\, d\omega = \sigma^2.$$

Этого результата следовало ожидать, исходя из физических соображений, так как величина a равна дисперсии аппроксимирующей ломаной. Значит, окончательно

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^2 = 2 \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} S(\omega) \left[1 - \frac{\sin \frac{\omega \Delta}{2}}{\frac{\omega \Delta}{2}} \right] d\omega. \tag{3}$$

Из непосредственного сопоставления (1) и (3) видно, что (3) компактнее. Дальнейшее упрощение (3) становится возможным, если исходить из предположения малости величины $\bar{\bar{\varepsilon}}^2 \left(\frac{\bar{\bar{\varepsilon}}^2}{\sigma^2} < 0{,}1 \right)$. Разлагая $\sin \frac{\omega \Delta}{2}$ в ряд по степеням ω и ограничиваясь первыми двумя членами этого разложения, получим

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^2 \cong \frac{\Delta^2}{12} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} S(\omega)\, \omega^2\, d\omega = \frac{\Delta^2}{12} \sigma^2 \rho''(0), \tag{4}$$

где $\sigma^2 \rho''(0)$ — дисперсия первой производной измеряемой величины; $\rho''(0) = -\left[\frac{d^2 \rho(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=0}$; $\rho(\tau)$ — нормированная корреляционная функция.

Формула (4) дает возможность решать поставленную в [1] задачу определения рациональной частоты измерений в общем виде, не прибегая к численному интегрированию в каждом частном случае.

Для процессов с неограниченной спектральной плотностью формула для определения $\bar{\bar{\varepsilon}}^2$ по предлагаемой в [1] методике совпадает с (1). Различие заключается лишь в том, что спектральная плотность не ограничена частотой $\frac{\pi}{\Delta}$. При этом величина $\bar{\bar{\varepsilon}}^2$ определяется с ошибкой, обусловленной отбрасыванием части спектральной плотности при $|\omega| > \frac{\pi}{\Delta}$. Найдем точную формулу для этого случая.

Запишем формулу для подсчета среднего по множеству квадрата ступенчатой экстраполяции [3]:

$$\bar{\varepsilon}^2(\tau) = 2\sigma^2 [1 - \rho(\tau)]. \tag{5}$$

Если произвести сдвиг, как это делается в [1], экстраполирующей ломаной на половину интервала времени между измерениями и усреднить средний квадрат погрешности по времени, то

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^2 = \frac{2\sigma^2}{\Delta} \int_0^{\Delta} \left[1 - \rho\left(\frac{\Delta}{2} - \tau \right) \right] d\tau = 2\sigma^2 \left[1 - \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \rho(\tau)\, d\tau \right]. \tag{6}$$

Заменяя в (6) член $\sigma^2\rho(\tau)$ его преобразованием Фурье и меняя порядок интегрирования, получим

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^2 = 2\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\left[1-\frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}}\right]d\omega. \qquad (7)$$

Формула (7), отличаясь от (3) только пределами интегрирования, является более общей, так как из нее вытекает (3), если спектральная плотность ограничена частотой $\frac{\pi}{\Delta}$. Для дифференцируемых процессов из (7) следует соотношение

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^2 \cong \frac{\Delta^2}{12}\sigma^2\rho''(0), \qquad (8)$$

позволяющее решить задачу выбора рациональной частоты измерений в общем виде.

Таким образом, предлагаемая в [1] методика расчета может быть упрощена. Методика [1] может быть обобщена и на случай, если средний квадрат первой составляющей погрешности определяется формулой (5) при $\tau=\Delta$, т. е. равен максимальному значению среднего квадрата погрешности ступенчатой экстраполяции:

$$\bar{\varepsilon}^2 = 2\sigma^2[1-\rho(\Delta)] \cong \Delta^2\sigma^2\rho''(0).$$

В заключение отметим, что численное интегрирование по формуле (1), особенно для малых значений среднего квадрата погрешности, может дать неточные результаты. Для примера рассмотрим процесс с корреляционной функцией $R(\tau)=\sigma^2\exp[-\alpha|\tau|]$. Для такого процесса из (7) следует простое решение

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^2 = 2\sigma^2\left[1-\frac{2}{\Delta}\int_0^{\frac{\Delta}{2}}\exp[-\alpha\tau]\,d\tau = 2\sigma^2\left[1-\frac{2}{\alpha\Delta}\left(1-\exp\left[-\frac{\alpha\Delta}{2}\right]\right)\right.\right.$$

Отсюда при малых $\bar{\bar{\varepsilon}}^2$, разлагая $\exp\left[-\frac{\alpha\Delta}{2}\right]$ в ряд Тейлора, получим в первом приближении $\frac{\bar{\bar{\varepsilon}}^2}{\sigma^2}=\frac{\alpha\Delta}{2}$. В [1] для этого же примера путем численного интегрирования получено $\frac{\bar{\bar{\varepsilon}}^2}{\sigma^2}=\frac{0,64}{\pi}\cdot\frac{\alpha\Delta}{2}$, т. е. значение $\bar{\bar{\varepsilon}}^2$ в этом случае занижено примерно в 5 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. А. Купершмидт. Оптимальный выбор частоты отсчетов при цифровых измерениях.— Измерительная техника, 1962, № 10.
2. И. С. Градштейн, И. Н. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
3. Э. Л. Ицкович. Статистические методы при автоматизации производства. М.—Л., Изд-во «Энергия», 1964.

Поступила в редакцию 9 февраля 1965 г.