А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 2 1965

УДК 681.2.088.001.12 : 621.384.2

К. С. КЛЕМПНЕР,
И. М. ЧЕРЕДНИЧЕНКО, Н. Н. ШУМИЛОВСКИЙ

(Донецк, Фрунзе)

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ РАДИОИЗОТОПНЫХ ПРИБОРОВ С УЧЕТОМ АППАРАТУРНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ И СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВХОДНОГО СИГНАЛА

Рассматриваются вопросы точности при измерениях с помощью радиоизотопных приборов с учетом статистических характеристик входного сигнала и аппаратурных погрешностей всех видов. Производится учет аппаратурных погрешностей, зависящих и не зависящих от интенсивности измеряемого потока.

Выводится общее выражение, связывающее погрешность измерения Δx, чувствительность метода измерения α и отношение сигнал — шум z. Находятся условия измерения, при которых достигается максимум отношения сигнал-шум. Показывается, что одинаковая точность измерения может быть достигнута приборами, обладающими различной аппаратурной погрешностью, путем изменения чувствительности метода измерения.

Важнейшей специфической особенностью радиоизотопных приборов, основанных на эффектах взаимодействия ядерных излучений с веществом, является статистический характер сигнала, действующего на входе измерительного устройства. Если в измерительной технике обычно полагают, что статистическим является только результат измерения, а сама измеряемая величина не испытывает флюктуаций, то в рассматриваемом случае это не является правомерным. Статистический характер сигнала связан с самой природой распада радиоактивного излучателя и непосредственно влияет на метрологические характеристики устройства. Уже в ранних работах, посвященных радиоизотопным приборам [1, 2], делаются попытки провести учет статистических флюктуаций выходного сигнала. В более поздних исследованиях [3, 4, 5] учет статистических флюктуаций занимает центральное место в теории этих приборов. При этом учитываются и аппаратурные погрешности, но детально исследуются лишь те, величина которых зависит от параметров потока излучения (здесь и далее рассматриваются относительные погрешности).

В данной статье делается попытка учета всех видов аппаратурных погрешностей, включая и те, величина которых не зависит от параметров потока излучения.

В качестве обусловливающего признака при расчете радиоизотопных приборов обычно принимают активность источника излучения [4, 5, 6]. Поэтому при учете аппаратурных погрешностей необходимо знать зависимость величины аппаратурной флюктуации от интенсивности потока излучения.

В первом приближении аппаратурные флюктуации сигнала можно разбить на два вида, один из которых зависит, а другой не зависит от средней скорости счета детектора излучения.

Действительно, представим сигнал на выходе интенсиметрической ячейки измерительного устройства в виде

$$y_и = qn, \tag{1}$$

где q — заряд в импульсе, поступающем на интегратор;
n — средняя скорость счета детектора излучения.

Тогда для сигнала на выходе измерительного прибора справедливо

$$y = (qn + i_0)k, \tag{2}$$

где i_0 — постоянная составляющая выходного сигнала;
k — общий коэффициент усиления.

Дисперсия выходного сигнала в этом случае соответствует

$$D(y) = n^2k^2D(q) + q^2k^2D(n) + q^2n^2D(k) + k^2D(i_0) + i_0^2D(k). \tag{3}$$

Отношение абсолютной флюктуации выходного сигнала к полезному сигналу qnk будет равно

$$\varepsilon_y = \left[\frac{D(q)}{q^2} + \frac{D(n)}{n^2} + \frac{D(k)}{k^2} + \frac{D(i_0)}{n^2q^2} + \frac{i_0^2D(k)}{q^2n^2k^2}\right]^{1/2}, \tag{4}$$

где

$$\varepsilon_y = \frac{\sqrt{D(y)}}{qnk}.$$

Второй член в (4) представляет собой квадрат относительной флюктуации скорости счета, которая определяется статистическими характеристиками входного сигнала, а также «ложными» импульсами детектора, нестабильностью его счетной характеристики, конечным разрешающим временем детектора и всей электронной схемы.

Считая эти два вида погрешностей некоррелированными между собой и представляя статистическую флюктуацию в виде $\varepsilon_{ст}^2 = \frac{1}{2n\tau}$ [4], можно записать:

$$\frac{D(n)}{n^2} = \varepsilon_n^2 + \frac{1}{2n\tau}, \tag{5}$$

где τ — постоянная времени интегратора;
ε_n — относительная среднеквадратическая флюктуация скорости счета n, описывающая изменение скорости счета, вследствие несовершенства интенсиметрической части радиоизотопного прибора.

Объединяя погрешности одного вида, окончательно (4) можно преобразовать так:

$$\varepsilon_y = \left[\varepsilon^2 + \frac{1}{2n\tau} + \left(\frac{D(i_0)}{q^2} + \frac{i_0^2D(k)}{k^2q^2}\right)\frac{1}{n^2}\right]^{1/2}, \tag{6}$$

где

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_n^2 + \frac{D(q)}{q^2} + \frac{D(k)}{k^2}.$$

Из (4), (5), (6) следует, что отношение абсолютной флюктуации выходного сигнала к полезному можно представить, как сумму квадратов относительной аппаратурной погрешности, не зависящей от скорости счета детектора, но зависящей от n и относительной статистической погрешности.

К первому виду аппаратурных погрешностей относятся погрешности, обусловленные флюктуацией заряда в импульсе, поступающем на интегратор, изменениями коэффициента усиления, а также погрешностями, вызванными изменением характеристик детектора излучения и некоторыми другими причинами. Второй вид аппаратурных погрешностей определяется дрейфом нуля усилителя постоянного тока, погрешностью преобразователя постоянного тока в переменный и т. д.

В общем случае выходной сигнал y можно представить в виде случайной функции $y=y(x)$ с плотностью распределения $\omega(y)$.

Задача измерения величины x с погрешностью Δx сводится к обеспечению достаточно большой вероятности:

$$p(\bar{y}-\Delta y<y<\bar{y}+\Delta y)=\int\limits_{\bar{y}-\Delta y}^{\bar{y}+\Delta y}\omega(y)\,dy. \tag{7}$$

Точный вид плотности распределения $\omega(y)$ выходного сигнала y для радиоизотопных приборов выражается довольно сложно [5, 6]. Однако для практических расчетов в большинстве случаев можно воспользоваться предельной теоремой Ляпунова [7], согласно которой результирующий закон распределения случайных величин (или случайных функций) при достаточно большом числе слагаемых будет близок к нормальному при произвольных законах распределения составляющих.

В этом случае

$$p(\bar{y}-\Delta y<y<\bar{y}+\Delta y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{\bar{y}-\Delta y}^{\bar{y}+\Delta y}e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\,dy. \tag{8}$$

Произведем в интеграле замену переменной: $\frac{y-\bar{y}}{\sigma}=z$.

Тогда

$$p(\bar{y}-\Delta y<y<\bar{y}+\Delta y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{y-\bar{y}}{\sigma}}^{\frac{y-\bar{y}}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=$$

$$=\Phi\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{y-\bar{y}}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\Delta y}{\sigma}\right). \tag{9}$$

Величина $z=\frac{\Delta y}{\sigma}$ показывает, во сколько раз отклонение сигнала от заданного значения превышает величину абсолютной среднеквадратичной флюктуации σ, и в этом смысле может быть названа кратностью стандартного отклонения. При $z=1$ $\Delta y=\sigma$, а погрешность измеряемой величины Δx приобретает смысл среднеквадратичной погрешности. При $z=3$ величину Δx можно рассматривать как максимальную погрешность, а z — как отношение приращения выходного сигнала, вызванного изменением x, к величине случайной составляющей этого сигнала.

Рассмотрим случай, когда используется параллельный пучок излучения и измеряемая величина x связана экспоненциально с интенсивностью излучения, а следовательно, со скоростью счета детектора излучения n:

$$n = n_0 e^{-\alpha x}, \tag{10}$$

где n_0 — скорость счета детектора излучения при отсутствии поглотителя;

α — коэффициент, характеризующий степень поглощения излучения веществом при измерении величины x.

Запишем величину z, используя (1), (2), (10):

$$z = \frac{qnk\,\alpha\Delta x}{[D(y)]^{1/2}}. \tag{11}$$

Разделив числитель и знаменатель (11) на величину полезного сигнала, получим

$$z = \frac{\alpha\Delta x}{\varepsilon y} = \frac{\alpha\Delta x}{\left[\varepsilon^2 + \frac{1}{2n\tau} + \left(\frac{D(i_0)}{q^2} + \frac{i_0^2 D(k)}{k^2 q^2}\right)\frac{1}{n^2}\right]^{1/2}}, \tag{12}$$

отсюда

$$\Delta x = \frac{z}{\alpha}\left[\varepsilon^2 + \frac{1}{2n\tau} + \left(\frac{D(i_0)}{q^2}\,\frac{i_0^2 D(k)}{k^2 q^2}\right)\frac{1}{n^2}\right]^{1/2}. \tag{13}$$

Из (13) следует, что погрешность измерения Δx не может быть сделана как угодно малой путем повышения скорости счета детектора излучения. В то же время увеличением значений α можно добиться сколь угодно малого значения погрешности измерения при фиксированном n.

Однако увеличение α требует повышения активности источника для компенсации значительного ослабления пучка излучения. По-видимому, существуют оптимальные значения α при заданной погрешности Δx.

Перепишем (12), вводя следующие обозначения:

$$\frac{1}{2n_0\tau} = M; \quad \left(\frac{D(i_0)}{q^2} + \frac{i_0^2 D(k)}{k^2 q^2}\right)\frac{1}{n_0^2} = N.$$

Тогда

$$z = \frac{\alpha\Delta x}{\left[\varepsilon^2 + Me^{\alpha x} + Ne^{2\alpha x}\right]^{1/2}}. \tag{14}$$

Для определения оптимальных условий измерения найдем максимальное значение отношения сигнал — шум, для чего продифференцируем z по α и полученное выражение приравняем к нулю. После несложных преобразований получим

$$Ne^{2\alpha_0 x}(1 - \alpha_0 x) + M\left(1 - \frac{\alpha_0 x}{2}\right)e^{\alpha_0 x} + \varepsilon^2 = 0. \tag{15}$$

Соотношение (15) связывает оптимальные значения α_0 со всеми видами погрешностей и параметрами измерительного прибора. Первое слагаемое определяет величину аппаратурных погрешностей, зависящих от интенсивности излучения; второе слагаемое зависит от относительной статистической погрешности. Последнее слагаемое описывает величину аппаратурных погрешностей, не зависящих от скорости счета.

Рассмотрим графическое решение уравнения (15) относительно $\alpha_0 x$. На рис. 1 построены кривые *1* и *2*, определяемые соответственно 1 и 2-м членами выражения (15) при изменении $\alpha_0 x$ и фиксированных значениях коэффициентов N и M.

Решением уравнения (15) определится значение $\alpha_0 x$, при котором сумма ординат кривых *1* и *2* численно равняется величине ε^2 (прямая *3*), взятой с обратным знаком. Коэффициенты N, M и величина ε^2 могут выбираться достаточно произвольно. Очевидно, что в общем случае решение может существовать только в области значений $\alpha_0 x > 1$. Действительно, сумма ординат кривых *1* и *2* для $\alpha_0 x > 1$ всегда положительна, а величина ε^2 всегда больше нуля.

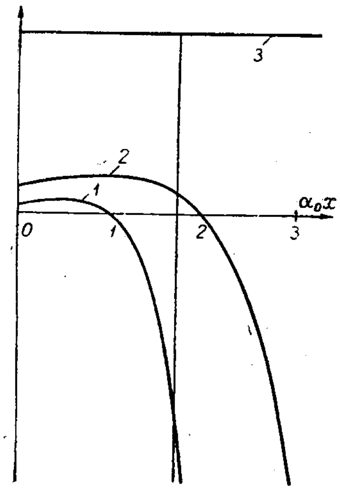

Рис. 1. Графическое определение величины $\alpha_0 x$ при наличии статистических флюктуаций и аппаратурных погрешностей, зависящих и не зависящих от скорости счета детектора.

Относительная аппаратурная погрешность, зависящая от n, выражается первым членом (15), причем кривая *1* пересекает ось абсцисс в точке $\alpha_0 x = 1$. Если аппаратурная погрешность преобладает, то нетрудно видеть, что оптимальное значение α_0 будет близко к единице. Кривая *2* (относительная статистическая погрешность) пересекает ось абсцисс при $\alpha_0 x = 2$. Прямая *3* (относительная аппаратурная погрешность, не зависящая от интенсивности потока излучения) параллельна оси абсцисс, т. е. этот вид погрешности сдвигает оптимальные значения $\alpha_0 x$ вправо (ограничивающим обстоятельством является только техническая целесообразность выбора достаточно больших $\alpha_0 x$). При одновременном действии всех видов погрешностей оптимальные значения $\alpha_0 x$ определяются соотношением между значениями величин отдельных погрешностей.

Проще всего уяснить влияние отдельных видов погрешностей при рассмотрении предельных случаев.

Обратимся сначала к случаю, когда величина аппаратурной погрешности, зависящей от параметров потока излучения, достаточно мала по сравнению с другими видами погрешностей, т. е.

$$Me^{\alpha_0 x}\left(1 - \frac{\alpha_0 x}{2}\right) + \varepsilon^2 \gg Ne^{2\alpha_0 x}(1 - \alpha_0 x). \qquad (16)$$

Это может иметь место при проектировании схем прямого измерения. Тогда (15) приобретает вид

$$\frac{1}{2n_0 \tau} e^{\alpha_0 x}\left(1 - \frac{\alpha_0 x}{2}\right) + \varepsilon^2 = 0. \qquad (17)$$

Решая совместно (17) и (14) при условии (16), получим уравнение для определения оптимальных значений α_0:

$$\alpha_0^2 - \frac{2}{x}\alpha_0 - \frac{z^2 \varepsilon^2}{\Delta x^2} = 0, \qquad (18)$$

откуда

$$\alpha_0 = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{z^2\,\varepsilon^2}{\Delta\, x^2}\right)^{1/2}. \qquad (19)$$

Как видно из (19), оптимальные значения α_0 зависят от условий измерения. Величина α_0 возрастает при уменьшении допустимой погрешности измерения Δx и при использовании измерительной аппаратуры, обладающей большой погрешностью.

Формула (19) может иметь двоякое использование. Если тип излучателя задан (метрологические характеристики измерения должны задаваться всегда), то (19) может служить для расчета допустимой аппаратурной погрешности прибора

$$\varepsilon = \frac{\Delta\, x}{z}\left[\left(\alpha_0 - \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x^2}\right]^{1/2}. \qquad (20)$$

Если по (19) производится выбор излучателя, необходимо сделать предположение о величине допустимой аппаратурной погрешности. Таким образом, (20) связывает метрологические характеристики измерительного прибора с его аппаратурными погрешностями. При $\varepsilon=0$ получаем $\alpha_0 x=2$ (см. рис. 1).

Задавшись определенными значениями x и Δx, можно убедиться, что оптимальная величина $\alpha_0 x$ в значительной степени зависит от величины аппаратурной погрешности. Так, например, при $x=1$ *см*, $\Delta x=0{,}01$ *см* и изменении ε в пределах от 1 до 10% $\alpha_0 x$ оказывается значительно больше 2 (табл. 1).

Таблица 1

ε, %	1	2	5	7	9	10
$\alpha_0\ x$	2,41	3,24	6,10	8,07	10,05	11,05

На рис. 2 приведено отношение сигнал — шум z как функция переменных αx и $n_0\tau$ при фиксированных значения Δx и ε. Возрастание z достигается только при одновременном увеличении активности источника и величины α.

При фиксированном значении αx и увеличении $n_0\tau$ при прочих равных условиях отношение сигнал — шум сначала возрастает, а затем практически не изменяется.

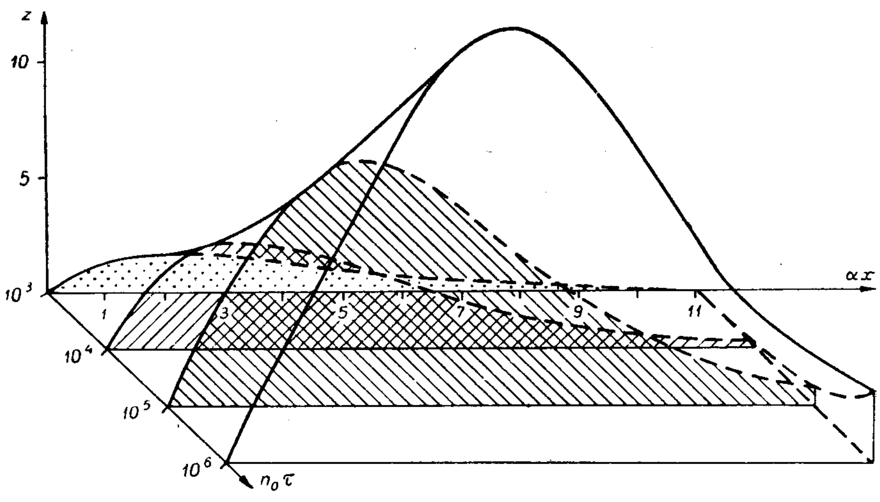

Рис. 2. Зависимость отношения сигнал-шум z от величины αx и $n_0\tau$.

Большой интерес представляет рассмотрение соотношений между аппаратурными и статистическими погрешностями при всех практически возможных оптимальных значениях $\alpha_0 x$.

Вводя обозначение $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ст}} = k$ из (17), получим

$$k = \left(\frac{\alpha_0 x - 2}{2}\right)^{1/2}. \tag{21}$$

В табл. 2 представлены значения k при изменении $\alpha_0 x$ в пределах от 2,5 до 10. Как видно, аппаратурные и статистические погрешности по порядку величины взаимно близки при всех возможных оптимальных значениях $\alpha_0 x$.

Таблица 2

$\alpha_0 x$	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
k	0,500	0,707	1,00	1,0	1,41	1,58	1,73	1,87	2,0

Рассмотрим случай, когда аппаратурные погрешности много больше статистических. Это соответствует большим потокам излучения:

$$Ne^{2\alpha_0 x}(1 - \alpha_0 x) + \varepsilon^2 \gg Me^{\alpha_0 x}\left(1 - \frac{\alpha_0 x}{2}\right).$$

При этом условии выражение (15) приобретает вид

$$Ne^{2\alpha_0 x}(1 - \alpha_0 x) + \varepsilon^2 = 0. \tag{22}$$

Из (22) и (14) находим

$$\alpha_0^2 - \frac{\alpha_0}{x} - \frac{z^2 \varepsilon^2}{\Delta x^2} = 0. \tag{23}$$

Решение уравнения (23) будет выглядеть так:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2x} + \left(\frac{1}{4x^2} + \frac{z^2 \varepsilon^2}{\Delta x^2}\right). \tag{24}$$

При $\varepsilon = 0$ $\alpha_0 x = 1$, что совпадает с результатом, полученным в [3]. Значения $\alpha_0 x$, найденные по (24) и (19), отличаются на единицу. Учет погрешностей, не зависящих от интенсивности потока излучения, во всех случаях приводит к сдвигу оптимальных значений α_0 в сторону увеличения.

Проведенное выше рассмотрение позволяет рекомендовать схему расчета и выражения для выбора основных параметров радиоизотопных приборов.

Выражение (15) позволяет производить расчет приборов в самом общем случае. Однако выбор параметров N, M, ε предполагает наличие конкретной схемы измерения.

Для примера рассмотрим схему расчета приборов прямого измерения без вычитания постоянной составляющей. Могут иметь место 2 случая: величина α задана техническими условиями на проектирование и величина α выбирается. В первом случае рассчитывается величина ε

по (20). Это позволяет выбрать основные схемные решения, а также обосновать степень стабилизации различных параметров схемы.

Величина n_0, а следовательно, и активность источника излучения может быть рассчитана по сравнительно простой формуле, непосредственно следующей из (17) и (14):

$$n_0 = \frac{z^2 x e^{\alpha_0 x}}{4\Delta\, x^2 \alpha_0 \tau}. \qquad (25)$$

Если α_0 не выбрано, то необходимо рассчитывать α_0, задаваясь значениями ε. При этом большие значения ε приводят к увеличению α_0, а следовательно, и к увеличению активности источника излучения. Здесь проявляется «цена точности». Для измерения с помощью менее точной аппаратуры необходимо «платить» увеличением активности источника излучения.

Полученные значения α_0 можно обеспечить технически либо выбором типа излучателя при измерении толщины ($\alpha=\mu p$), либо подбором излучателя и базы измерения при измерении плотности ($\alpha=\mu d$).

В заключение пользуемся возможностью принести благодарность Л. В. Мельтцеру и Б. И. Верховскому за ценные замечания, которыми мы воспользовались при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. J. Shiff, R. D. Evans. Statistical Analisis of the Counting Rate Meter. Rev. Scient. Instrument, 1936, v. 7, № 12.
2. О. Н. Вавилов, И. М. Франк. Измерение разностенности труб с помощью гамма-лучей радиоактивных препаратов.— В сб. «Новые методы измерения толщины». М., Изд-во АН СССР, 1946.
3. А. М. Богачев, Б. И. Верховский, А. Н. Макаров. Измерение толщины и плотности при помощи радиоактивных изотопов.— Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии (июль 1955 г.). М., Изд-во АН СССР, 1955.
4. Н. Н. Шумиловский, Л. В. Мельтцер. Основы теории устройств автоматического регулирования с использованием радиоактивных изотопов. М., Изд-во АН СССР, 1959.
5. Л. К. Таточенко. Радиоактивные изотопы в измерительной технике. М., Атомиздат, 1960.
6. А. Г. Васильев, К. С. Клемпнер. Релейные устройства с источниками ядерного излучения. М., Машгиз, 1963.
7. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., Гостехиздат, 1957.

*Поступила в редакцию
2 ноября 1964 г.*