

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, А. А. НЕСТЕРОВ

(Новосибирск)

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ*

Рассмотрены оптимальные по быстродействию процессы в линейных измерительных системах на основе управления структурой измерительного устройства и формой входной величины. Дан алгоритм преобразования измеряемого сигнала и изменения структуры измерительной системы в переходном процессе. Показано, что специфика измерительных систем позволяет осуществить простую техническую реализацию предлагаемого алгоритма.

Развитие техники предъявляет повышенные требования к измерительным системам [1]. Одной из актуальных задач является разработка систем, обладающих повышенными динамическими показателями. Большие возможности в этом направлении открывает математическая теория оптимальных процессов [2]. Разработка последней интересна как с точки зрения синтеза оптимальных систем, так и с точки зрения оценки «потенциальных» возможностей существующих систем. В [3] показана возможность уменьшения времени переходных процессов в линейных измерительных системах за счет выбора только оптимальной формы входного сигнала. Возможность управления по структуре динамической системы на основе принципа максимума [1] рассмотрена в [4] для случая свободного движения динамической системы.

В данной работе рассматривается возможность уменьшения времени переходных процессов в линейных измерительных системах n -го порядка путем одновременного изменения структуры измерительной системы и формы входного сигнала. Методика базируется на принципе максимума.

Введем ограничения на измеряемую величину и измерительную систему:

- 1) измерительное устройство описывается системой n линейных дифференциальных уравнений первого порядка;
- 2) помехи в переходном процессе отсутствуют;
- 3) измеряемая величина кусочно-постоянная или медленно изменяющаяся. Под медленно изменяющейся величиной понимается такая, изменение которой за время каждого отдельного измерения не превышает погрешности измерений.

Прежде чем переходить к описанию работы измерительной системы, реализующей предлагаемый метод, рассмотрим вопросы определения

* Материал доложен на VI Всесоюзной конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений в сентябре 1964 г. в Новосибирске.

оптимальной формы входного сигнала и алгоритма изменения структуры измерительной системы в процессе измерения.

Обозначим измеряемую величину $y(t)$, а сигнал, поступающий на вход измерительного устройства, $u(t)$ (управление). Для этого преобразования примем ограничение $|u(t)| \leq |y(t)|k$, которое вытекает из специфики процесса измерения и технически неизбежно.

Тогда уравнение, описывающее переходный процесс в измерительном устройстве, в векторной форме имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad |u| \leq |y(t)|k, \quad (1)$$

где A и B — соответственно матрицы размерностей $\overline{n \times n}$ и $n \times 1$;

$x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор состояния динамической системы;

u — управление (скаляр);

k — коэффициент преобразования.

В процессе каждого отдельного измерения измеряемая величина считается постоянной, т. е. $y(t) = y(t_0) = y(T)$. Предположим далее, что коэффициенты a_{ij} матрицы A в (1) могут изменяться в некоторых пределах $\mu_{ij} \leq a_{ij} \leq \gamma_{ij}$. Последнее достигается, например, путем переключения обратных связей.

Согласно формализму принципа максимума, функция H может быть записана в виде скалярного произведения вектора $\psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ на вектор $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$H = (\psi, Ax) + (\psi, Bu) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \psi_i x_j + u \sum_{i=1}^n b_i \psi_i, \quad (2)$$

где ψ — вектор состояния сопряженной системы

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (3)$$

Функция H (2) достигает максимума по a_{ij} и $u(t)$, если выполняются условия:

$$a_{ij} = \begin{cases} \mu_{ij} & \text{при } \psi_i x_j < 0, \\ \gamma_{ij} & \text{при } \psi_i x_j > 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$u(t) = k |y(t)| \text{sign } B^* \Psi, \quad (5)$$

где B^* — транспонированная матрица B .

Введем обозначения:

$$\bar{a}_{ij} = \frac{\gamma_{ij} + \mu_{ij}}{2}; \quad \Delta a_{ij} = \frac{\gamma_{ij} - \mu_{ij}}{2}.$$

Тогда из (4) следует:

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \Delta a_{ij} \text{sign } \psi_i x_j. \quad (6)$$

Разобьем интервал (от 0 до T) на участки, в каждом из которых все коэффициенты a_{ij} и управление $u(t)$ постоянны. Границами этих участков будут моменты времени t_k , в которые скачком изменяется либо

какой-нибудь из коэффициентов a_{ji} либо управление $u(t)$. Если число этих участков m , то $t_m = T$.

Пусть $x^k(t)$ — вектор, характеризующий состояние системы на k -м участке времени. Тогда на основании (1), (5) и (6)

$$\frac{dx^k}{dt} = A_k x^k + Bk |y(t_0)| \text{sign } B^* \psi^k. \quad (7)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x^k(t) = e^{A_k t} x^{k-1}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t (e^{A_k(t-\tau)} Bk |y(t_0)| \text{sign } B^* \psi^k) d\tau.$$

Последовательно учитывая аналогичные зависимости для $x^{k-1}(t_{k-1})$, $x^{k-2}(t_{k-2})$ и т. д., получим

$$x^k(t) = e^{A_k t} \left[e^{\sum_{j=1}^{k-1} A_j t_j} x^0(t_0) + \sum_{s=1}^{k-1} e^{\sum_{j=s}^{k-1} A_j t_j} \int_{t_{s-1}}^{t_s} (e^{-A_s \tau} Bk |y(t_0)| \text{sign } B^* \psi^s) d\tau + \int_{t_{k-1}}^t (e^{-A_k \tau} Bk |y(t_0)| \text{sign } B^* \psi^k) d\tau \right].$$

Полагая $t_m = T$, найдем

$$x(T) = e^{\sum_{j=1}^m A_j t_j} x^0(t_0) + k |y(t_0)| \sum_{s=1}^m e^{\sum_{j=s}^m A_j t_j} \int_{t_{s-1}}^{t_s} (e^{-A_s \tau} B \text{sign } B^* \psi^s) d\tau, \quad (8)$$

Для процесса измерения характерно специфическое расположение точек на фазовой плоскости:

$$x^0(t_0) = 0, \quad x(T) = -A_0^{-1} B y(T) = -A_0^{-1} B y(t_0).$$

Учитывая эти равенства, из (8) получим

$$-A_0^{-1} B y(t_0) = k |y(t_0)| \sum_{s=1}^m e^{\sum_{j=s}^m A_j t_j} \int_{t_{s-1}}^{t_s} (e^{-A_s \tau} B \text{sign } B^* \psi^s) d\tau. \quad (9)$$

Отсюда при $y(t_0) > 0$

$$-A_0^{-1} B = k \sum_{s=1}^m e^{\sum_{j=s}^m A_j t_j} \int_{t_{s-1}}^{t_s} (e^{-A_s \tau} B \text{sign } B^* \psi^s) d\tau. \quad (10)$$

Таким образом, при $y(t) > 0$ моменты переключения t_i управляющих параметров a_{ij} , и $u(t)$ и их число m не зависят от измеряемой величины, а определяются лишь динамическими свойствами измерительного устройства. При $y(t) < 0$ моменты переключения остаются такими же ввиду симметричности картины переключений для левой полуплоскости. Поэтому, зная порядок дифференциального уравнения, можно представить качественно картину переключения управляющих параметров.

На рис. 1 последняя приведена для управления $u(t)$ в системах 2, 3, 4-го порядков при коэффициенте преобразования k , равном единице.

Из соотношения (6) видно, что коэффициенты a_{ij} дифференциального уравнения (1) изменяются тоже скачкообразно и моменты их переключения не зависят от измеряемой величины, постоянны и определяются лишь динамическими свойствами измерительного устройства (10).

Практически моменты переключения управления $u(t)$ и коэффициентов a_{ij} определяются путем совместного решения систем уравнений (1) и (3) с учетом условий (4) и (6).

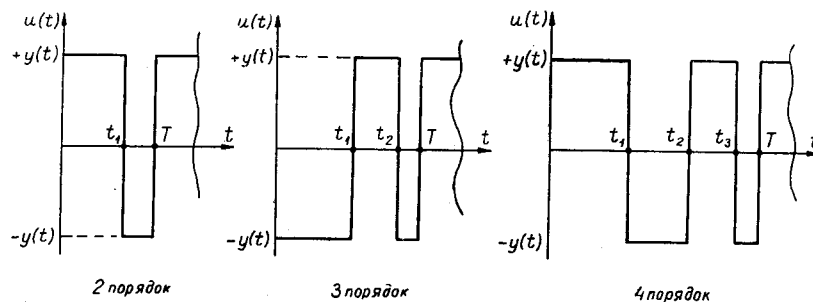


Рис. 1.

Начальные условия для (3) выбираются так, чтобы для (1) были выполнены граничные условия: $x^o(t_0) = 0$, $x(T) = -A^{-1}By(t_0)$, где $y(t_0)$ — любая заранее известная величина. Так как начальные условия $\psi(0)$ ($\psi_1(0)$, ..., $\psi_n(0)$) постоянны для данного измерительного устройства, то нет необходимости в определении эффективного алгоритма их нахождения. Значения $\psi(0)$ могут быть найдены простым перебором. Следует отметить также, что от выбора $y(t_0)$ моменты переключения не зависят, а поэтому $y(t_0)$ — любая фиксированная величина.

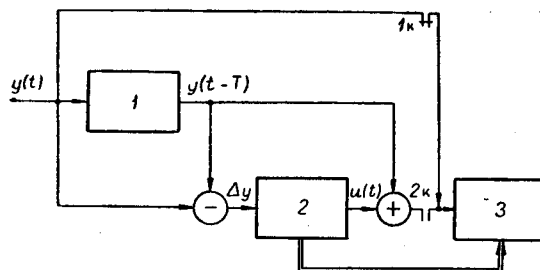


Рис. 2.

Перейдем к описанию работы системы, реализующей предлагаемый способ измерения. На рис. 2 приведена блок-схема реализации процесса измерения. Измеряемая величина $y(t)$ поступает на вход блока запаздывания 1 и одновременно в схему вычитания,

на выходе которой имеем $\Delta y = y(t) - y(t - T)$. Если Δy превышает некоторое пороговое значение процесса ϵ_0 , то начинает функционировать коммутатор 2, т. е. устройство, обеспечивающее преобразование $\Delta y(t)$ в $u(t)$ и переключение коэффициентов a_{ij} измерительного устройства 3.

Так как моменты переключения управления и коэффициентов не зависят от значения Δy , то коммутатор представляет собой переключающее устройство, обеспечивающее переключения $u(t)$ и a_{ij} в фиксированные (с момента запуска) моменты времени. Через время T $\Delta y = 0$, так как $y(t) = \text{const}$ в течение отдельного измерения $0 \leq t \leq T$ и измеряемая величина $y(t)$ подается непосредственно на измерительное устройство. Это исключает влияние такого устройства преобразования на точность процесса измерения. Контакты (ключи) 1к и 2к служат со-

ответственно для отключения измеряемой величины $y(t)$ и подключения всего преобразующего устройства ко входу измерительного устройства на время работы коммутатора. На рис. 2 двойной линией показана связь между коммутатором и параметрами измерительного устройства.

На рис. 3 представлена реализация на элементах вычислительных устройств непрерывного действия для случая, когда управление осуществляется не по всей матрице коэффициентов, а только по одному коэффициенту успокоения a_{22} для измерительного устройства второго порядка. Рассмотрим работу системы. Измеряемая величина $y(t)$ поступает на вход суммирующего усилителя и одновременно на блок запаздыва-

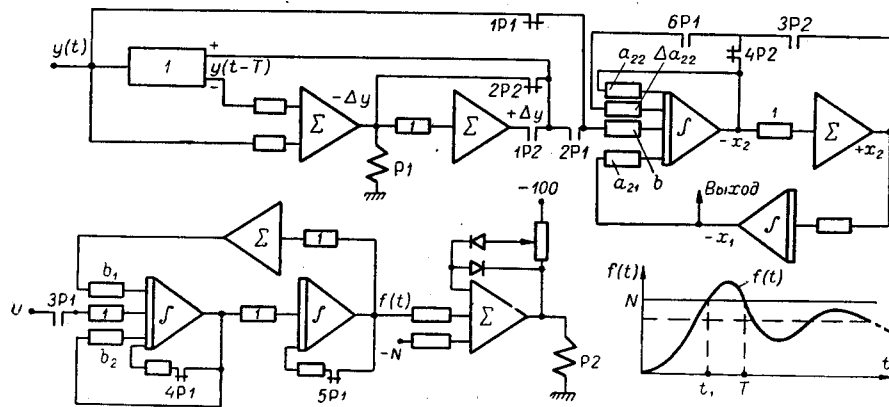


Рис. 3.

вания. На вход сумматора с блока запаздывания поступает задержанное на время T значение измеряемой величины (с обратным знаком). На выходе сумматора получаем приращение измеряемой величины $\Delta y = y(t) - y(t - T)$. При $|\Delta y| > \epsilon_0$ срабатывает реле $P1$, которое производит несколько одновременных переключений в схеме: отключает ($1P1$) непосредственную подачу измеряемой величины $y(t)$ на вход измерительного устройства и подключает ($2P1$) значение $y(t - T) + u(t)$ на время переходного процесса (от 0 до T); включает ($3P1$) генератор, управляющий работой реле $P2$; замыкает ($6P1$) цепь управления структурой измерительного устройства. Генератор, управляющий работой реле $P2$, представляет собой линейную динамическую систему второго порядка, корни характеристического уравнения которой комплексные. В момент срабатывания реле $P2$ на вход этой системы поступает некоторое постоянное напряжение U ; на выходе ее получаем решение $f(t)$ дифференциального уравнения второго порядка (см. рис. 3, кривая $f(t)$). Значения параметров b_1 , b_2 и напряжение U выбираются такими, чтобы до момента t_1 ($f(t) - N$) < 0 , с момента t_1 до T ($f(t) - N$) > 0 , с момента $t \geq T$ ($f(t) - N$) < 0 .

Таким образом, с помощью напряжения N и $f(t)$ реализуются моменты переключения управления $u(t)$ и коэффициента a_{22} . До момента t_1 $u(t) = \Delta y$, $\Delta a_{22} > 0$, в интервале с t_1 до T $u(t) = -\Delta y$, $\Delta a_{22} < 0$.

С момента $t \geq T$ $\Delta y(t) = 0$, управления по $u(t)$ и Δa_{22} отключаются, а измеряемая величина подается непосредственно в измерительное устройство. С помощью контактов $4P1$ и $5P1$ генератор возвращается в исходное положение. Схема готова к измерению следующего значения кусочно-постоянной величины $y(t)$. Схема, представленная на рис. 4, является принципиальной и при необходимости может быть легко реализована на бесконтактных элементах.

Изменение структуры измерительной системы в процессе каждого отдельного измерения позволяет по-новому осуществлять выбор исходных значений параметров измерительной системы. При «классическом» подходе к вопросу выбора исходных значений параметров a_{ij} необходимо найти компромиссное решение между противоречивыми требованиями к статической точности, устойчивости и быстродействию. При подходе к конструированию измерительных устройств с позиций теории оптимальных процессов эти требования становятся «независимыми» и нет необходимости в поиске компромиссного решения. Коэффициент усиления выбирается из условия статической точности. Остальные параметры выбираются так, чтобы исходная система была устойчивой, а вариация

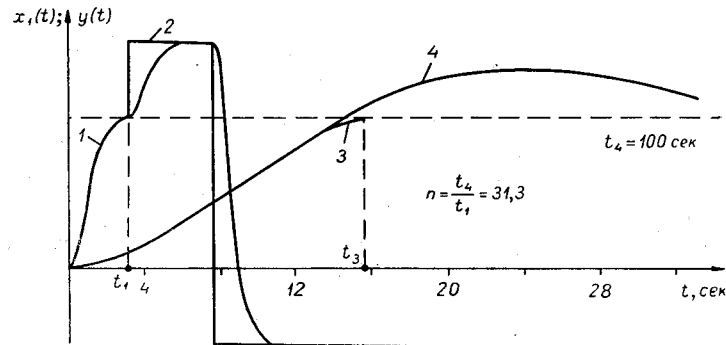


Рис. 4.

этих параметров в переходном процессе — максимальной. За счет оптимальной формы входного сигнала $u(t)$ и изменения структуры в переходном процессе получаем минимальное время переходного процесса.

На рис. 4 приведены кривые переходных процессов для выходной координаты измерительного устройства $x_1(t)$ при использовании управления по форме входного сигнала и структуре (кривая 1) для измерения кусочно-постоянной величины $y(t)$ (кривая 2). Одновременно приведены кривые переходных процессов для случая применения только оптимальной формы входного сигнала $u(t)$ без изменения структуры измерительного устройства в переходном процессе (кривая 3) и вообще без управления при скачкообразном сигнале $y(t)$ (кривая 4). За время установившегося значения ($t_4 = 100$ сек). Экспериментальные кривые снимались (с учетом масштабного преобразования времени) при следующих численных значениях параметров (см. рис. 4):

$$\bar{a}_{22} = -0,1; \Delta a_{22} = 2; \bar{a}_{21} = -0,02; b = 0,02.$$

Как видно из экспериментальных кривых переходных процессов, введение двойного управления по форме и структуре уменьшило время переходного процесса в $n = \frac{t_4}{t_1} = 31,3$ раза.

ВЫВОДЫ

Для уменьшения времени установления показаний можно использовать методы теории оптимальных процессов с целью формирования входного сигнала и управления структурой измерительной системы.

обладающей максимально возможным при данных ограничениях бысродействием.

Моменты переключения управляющих параметров и время установления показаний оказываются не зависящими от значения измеряемой величины, что способствует простой технической реализации.

Управление структурой системы в переходном процессе позволяет разграничить вопросы статической точности измерительной системы и ее динамических показателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Б. Карандеев. Измерительные информационные системы и автоматика. Вестник АН СССР, 1961, № 10.
2. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
3. В. М. Александров, Б. Г. Матиенко, А. А. Нестеров. Уменьшение времени установления показаний для линейных измерительных систем n -го порядка. Изв. Сиб. отд. АН СССР, серия техн. наук, 1964, вып. 1, № 2.
4. Б. Г. Питтель. О некоторых задачах оптимального управления. Автоматика и телемеханика, 1963, 24, № 11.

*Поступила в редакцию
12 октября 1964 г.*