А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 1 1965

УДК 621.398+519.92

Л. В. БУРЫЙ, Б. М. ПУШНОЙ
(Новосибирск)

О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕГО КОЭФФИЦИЕНТА СОКРАЩЕНИЯ ЧИСЛА ОТСЧЕТОВ НА ВЫХОДЕ РАЗНОСТНОДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

На основе общих теоретико-вероятностных соображений оценивается сверху коэффициент сжатия данных в измерительной системе, использующей метод разностнодискретной модуляции, для случая, когда измеряемая функция может быть представлена как нормальный стационарный случайный процесс.

Цифровые измерительные приборы со следящим уравновешиванием производят измерения функций времени в моменты перехода измеряемой функции через границы уровней квантования. Если измеряемая величина некоторое время находится в одном и том же шаге квантования, то измерение не производится до тех пор, пока она не перейдет в другой уровень квантования (рис. 1). На том же принципе основан метод передачи сообщений, который в телемеханике и связи получил название разностнодискретной модуляции (РДМ) [1]. Он позволяет разгрузить канал, связывающий источник информации с приемником. Очевидно, разностнодискретный метод представляет самостоятельный интерес применительно к измерительным системам как одно из возможных средств сокращения избыточности результатов измерения. Следует заметить, что теоретическим исследованиям этого метода в связи с задачами измерительных систем в литературе не уделяется пока должного внимания.

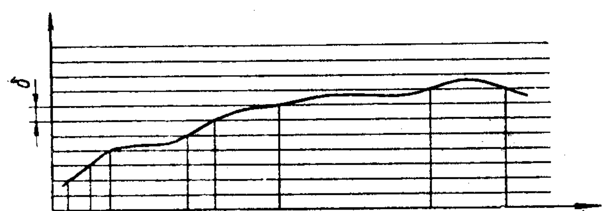

Рис. 1.

Представляется возможным оценить эффективность этого метода в измерительной системе, когда измеряемая величина рассматривается как стационарный случайных процесс.

Будем считать, что измеряемая величина представляет собой нормальный случайный процесс*, заданный n-мерным распределением вероятностей временных отсчетов, произведенных через интервал Δt.

Эффективность системы РДМ можно выразить коэффициентом,

* Изложенный ниже способ подсчета эффективности применим в принципе не только к нормальным случайным процессам, но и к процессам с другими распределениями.

показывающим, во сколько раз число отсчетов на выходе системы меньше числа отсчетов, поступивших на ее вход. Рассмотрим интервал времени, в течение которого на вход системы поступило n отсчетов. Допустим, что действие системы на этом интервале времени выразилось в том, что после передачи первого отсчета остальные $n-1$ отсчетов не передаются. Коэффициент сжатия K на этом интервале времени будет, очевидно, равен n. Рассматривая интервалы различной длительности, соответствующие значениям n, равным 1, 2, 3, ..., $n \to \infty$, мы можем получить совокупность коэффициентов сжатия

$$K_n = n \quad (\text{при } n = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \infty),$$

каждый из которых соответствует появлению на входе системы последовательности n отсчетов, лежащих в одном и том же шаге квантования. Чтобы ввести в рассмотрение средний коэффициент сжатия K, необходимо знать вероятности появления соответствующих последовательностей отсчетов p_i. Тогда можно записать

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = 1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots \tag{1}$$

Таким образом, подсчет среднего коэффициента сжатия сводится к вычислению вероятностей p_n, т. е. вероятностей того, что n последовательно поступивших на вход отсчетов лежит в одном и том же шаге квантования. Вероятности p_n можно оценить, рассматривая многомерную плотность распределения отсчетов.

Плотность n-мерного нормального распределения описывается следующим выражением [2]:

$$w(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \exp \frac{-1}{2 \det B} \times$$
$$\times \sum_{g=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} R_{gh}\, x_g\, x_h, \tag{2}$$

где $\det B$ — определитель матрицы моментов n-го порядка

$$B = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \ldots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \ldots & r_{nn} \end{vmatrix}, \quad r_{gh} = r_{hg};$$

R_{gh} — алгебраическое дополнение элемента r_{gh} в матрице B.

При некоррелированных отсчетах матрица диагональна

$$B = \begin{vmatrix} r_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r_{nn} \end{vmatrix}$$

и n-мерная плотность распределения выражается следующим образом:

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \exp - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}. \qquad (3)$$

При независимых отсчетах совместная n-мерная функция распределения обладает тем свойством, что точки равной вероятности располагаются на сферической n-мерной поверхности так, что плотность вероятности имеет центральную симметрию.

Чтобы определить вероятность p_n, необходимо рассмотреть n-мерную шкалу квантования, которая может быть построена следующим образом. Каждая из n взаимно ортогональных координатных осей разбивается на одинаковые отрезки, длина которых равна шагу квантования δ. Из каждой точки, соответствующей границе шага квантования, восстанавливается перпендикулярная к оси n — 1-мерная гиперплоскость. Пересекаясь в n-мерном пространстве, гиперплоскости разделяют его на области, имеющие форму n-мерных кубов со стороной δ. Любую совокупность n отсчетов можно рассматривать как ортогональные координаты некоторой точки в n-мерном пространстве, так что любая точка n-мерного пространства соответствует вполне определенному набору отсчетов. Кубические области квантования, центры которых располагаются на биссектрисе многомерного телесного угла, образованного координатными гиперплоскостями, замечательны тем, что соответствующие им отрезки функций на всем протяжении интервала $n \cdot \Delta t$ не пересекают границ одномерных областей квантования (точнее — отсчеты, которыми заданы отрезки функций, не выходят за пределы одной одномерной области квантования). Из сказанного выше ясно, что вероятность p_n может быть выражена интегралом n-мерной плотности распределения отсчетов по n-мерным областям квантования, расположенным на биссектрисе n-мерного координатного угла. На рис. 2, соответствующем случаю $n=2$, область интегрирования обозначена штриховкой.

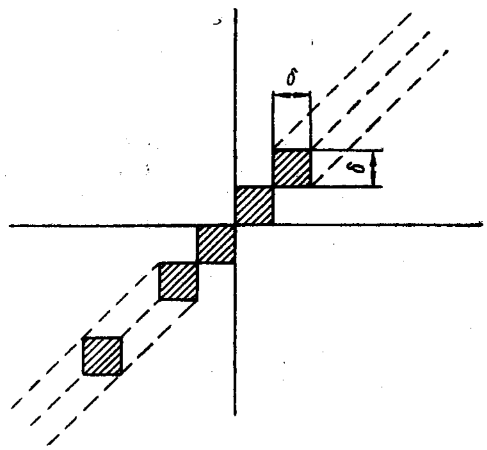

Рис 2.

Для удобства интегрирования можно заменить кубические области квантования параллелепипедами, объем которых равен объему кубов. Основанием параллелепипеда является куб размерности $n-1$ со стороной q, а высота параллелепипеда равна диагонали куба. Рис. 3 поясняет способ преобразования области интегрирования для случая $n=3$. Нетрудно показать, что q в общем случае связано с δ следующим соотношением:

$$q = \frac{\delta}{\sqrt[2n-2]{n}}.$$

При $n \gg 1$ можно принять

$$q = \delta. \qquad (4)$$

Используя такое упрощение области интегрирования, мы получим верхнюю оценку p_n. Как отмечалось выше, плотность распределения некоррелированных отсчетов имеет сферическую структуру. Это обстоятельство позволяет без каких-либо преобразований использовать выражение (3) в новой системе координат, оси которой перпендикулярны граням области интегрирования. В этой системе координат n-кратный интеграл выражается в виде произведения однократных интегралов

$$p_n \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} dx_1 \int\limits_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}} dx_2 \ldots \int\limits_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{x_n^2}{2\sigma^2}} dx_n,$$

Так как мы интересуемся верхней оценкой p_n, то первый интеграл берется в бесконечных пределах. Он равен единице. Что касается остальных интегралов, то они равны друг другу. В соответствии с этим можно записать

$$p_n \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \right)^{n-1}. \tag{5}$$

Случай коррелированных отсчетов более сложен. Области равной вероятности при этом имеют вид многомерных эллипсоидов, в чем можно убедиться, приравняв квадратичную форму, стоящую в показателе степени выражения (2), некоторой постоянной величине и рассматривая полученное равенство как уравнение некоторой поверхности. Интегрирование в данном случае сильно затрудняется тем, что главные оси эллипсоидов равной вероятности не совпадают с координатными осями пространства. Можно осуществить переход к новой системе координат, оси которой совпадали бы с главными осями эллипсоида.

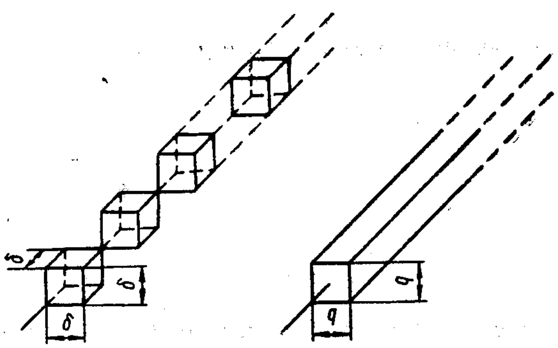

Рис. 3.

Это преобразование должно привести матрицу B, входящую в выражение (2), к диагональному виду [3]. В матричной форме многомерная плотность вероятности выражается так:

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} e^{-\frac{1}{2} x' B^{-1} x},$$

где $\det B$ — определитель матрицы моментов;
B^{-1} — матрица, обратная матрице B;
x — матрица-столбец;
x' — транспонированная матрица x, т. е. матрица-строка.

Так как B — действительная симметрическая матрица, то всегда можно найти ортогональное преобразование ($Q \cdot Q' = I$, где I — единичная матрица), которое диагонализирует B и приводит квадратичную форму $x'Bx$ к сумме квадратов. Действительно, если ввести преобразование $y = Q'x$ так, что $x = Qy$, то $x'Bx$ переходит в $y'Q'BQy = y'Q^{-1}BQy$, так как здесь $Q' = Q^{-1}$, но Q выбрано таким образом, что оно диагонализирует B, т. е.

$$Q^{-1}BQ = \Lambda.$$

Таким образом, квадратичная форма $x'Bx$ может быть записана в виде $y'\Lambda y$, где Λ — диагональная матрица вида

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix},$$

λ_i — собственные значения матрицы B).
Собственные значения λ_i являются корнями характеристического уравнения $\det[B - \lambda I] = 0$.
Следует заметить, что характеристическое уравнение является уравнением n-й степени.

Определитель матрицы при ортогональных преобразователях не изменяется. Следовательно,

$$\det B = \det \Lambda = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Теперь можно записать в матричной форме выражение плотности распределения в новых координатах

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}} e^{-\frac{1}{2}[y' \Lambda^{-1} y]}.$$

Так как квадратичная форма

$$y' \Lambda y$$

имеет канонический вид, т. е. представляет собой сумму квадратов, то обычная форма записи плотности (2) в новой системе координат будет такова:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} e^{-\frac{y_i^2}{2\lambda_i}}. \tag{6}$$

Прежде чем переходить к интегрированию полученной плотности по областям квантования, необходимо сделать одно замечание. Можно показать, что при сильной корреляции между отсчетами наибольшая главная ось эллипсоида приближается к биссектрисе координатного угла, на которой располагаются интересующие нас области квантования. Это обстоятельство позволяет поставить задачу о вычислении верхней оценки p_n следующим образом. Будем считать верхней оценкой p_n интеграл плотности (6) по области, расположенной вдоль наибольшей главной оси эллипсоида/таким образом, что главная ось эллипсоида совпадает с осью области интегрирования, а грани области перпендикулярны остальным главным осям эллипсоида. Учитывая, что наибольшая главная ось эллипсоида соответствует наибольшему собственному значению λ_n матрицы B, можно P_n выразить следующим образом:

$$p_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y_n^2}{2\lambda_n}} dy_n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_{n-1}}} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{y_{n-1}^2}{2\lambda_{n-1}}} dy_{n-1} \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_1}} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{y_1^2}{2\lambda_1}} dy_1,$$

или

$$p_n \leqslant \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{y_i^2}{2\lambda_i}} dy_i.$$

Полученное выражение можно упростить, усилив неравенство, если воспользоваться следующим соотношением:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{y_i^2}{2\lambda_i}} dy_i \leqslant \frac{q}{\sqrt{2\pi\lambda_i}}.$$

Таким образом,

$$p_n \leqslant \frac{q^{n-1}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i}}. \qquad (7)$$

Но так как

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det B,$$

то

$$\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \frac{\det B}{\lambda_n}. \qquad (8)$$

В свою очередь λ_n можно оценить [4]

$$\lambda_n \leqslant \sqrt{S - \sqrt[n]{S^n - n (\det B)^2 (n-1)^{n-1}}}, \qquad (9)$$

где S — след матрицы $B \cdot B'$.

Выражение (7) с учетом (8) и (9) примет вид

$$p_n \leqslant \frac{q^{n-1}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\det B}} \sqrt[4]{S - \sqrt[n]{S^n - n (\det B)^2 (n-1)^{n-1}}}. \qquad (10)$$

Рассматривая выражение (1) как конечную сумму, можно оценить средний коэффициент сжатия K, располагая результатами вычислений по формуле (10) для $n=2, 3 \ldots$.

В заключение необходимо отметить, что выражение (10) соответствует случаю, когда область интегрирования окружает наибольшую главную ось эллипсоида равных вероятностей. При таком расположении области интегрирования вероятность p_n получается наибольшей. Так как наибольшая главная ось эллипсоида с биссектрисой координатного угла в общем случае не совпадает, то можно полагать, что результат (10) соответствует не системе разностнодискретной модуляции РДМ, а некоторой другой системе. Можно получить представление о том, что эта система отличается от обычной системы РДМ, если рассматривать систему РДМ как систему с предсказанием. Действительно, работу системы РДМ можно описать так. Передав очередной отсчет, система генерирует как на передающем, так и на приемном конце функцию, которая представляет собой не что иное, как предсказанный ход передаваемой функции. До тех пор, пока результат предсказания удовлетворителен, отсчеты функции не передаются. Как только разность между предсказанным и фактическим ходом функции перестает удовлетворять некоторому заранее заданному критерию, в системе передается новый отсчет передаваемой функции, что свидетельствует о том, что предсказание исчерпало себя и что необходимо приступить к новому этапу предсказания, производимому в соответствии с последним переданным отсчетом. В системе РДМ предсказание производится крайне просто: предполагается, что функция сохраняет постоянное значение. Совершенно очевидно, что эффективность системы с предсказанием определяется качеством предсказания. Система, к которой относится выражение (10), должна использовать в качестве предсказанного хода функции не постоянную величину, как это делается в системе РДМ, а некоторую более сложную функцию, выражающую наиболее вероятный ход передаваемой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Байковский. Разностнодискретный метод передачи информации в телеизмерительных системах.— В сб. «Автоматическое управление». М., Изд-во АН СССР, 1960.
2. Б. Р. Левин. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М., Изд-во «Советское радио», 1960.
3. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
4. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. II. М., Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию
5 сентября 1964 г.