АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1965

УДК 681. 2.08

В. М. ЕФИМОВ
(Новосибирск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛА ВРЕМЕНИ МЕЖДУ КОНТРОЛЬНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ ПО КРИТЕРИЮ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫХОДА КОНТРОЛИРУЕМОГО ПАРАМЕТРА ИЗ ЗОНЫ

Определяется необходимая величина интервала времени между контрольными операциями для двух способов организации процесса контроля. В качестве критерия достоверности результата контроля используется вероятность выхода контролируемого параметра из зоны за интервал времени между контрольными операциями.

При контроле параметров, являющихся случайными функциями времени, в ряде случаев возникает задача, насколько часто следует производить операции контроля. Решение этой задачи необходимо, например, при проектировании систем с последовательным контролем большого числа параметров. В системах подобного рода отсутствует непрерывная оценка параметров, и контрольные операции осуществляются в дискретные моменты времени. Это приводит к тому, что в промежутках времени между контрольными операциями достоверность результата контроля снижается. Следовательно, возникает необходимость в установлении соответствия между частотой контроля и заранее заданным значением критерия достоверности (качества) контроля.

Результатом контрольной операции является установление того, что контролируемый параметр находится в зоне S_i его возможных состояний. До проведения следующей контрольной операции результатом контроля, очевидно, будет являться суждение о том, что контролируемый параметр по-прежнему находится в той же зоне. Однако с течением времени достоверность этого суждения уменьшается в связи с возможным переходом контролируемого параметра в отличную от S_i зону состояний (например, в S_{i+1} или S_{i-1}).

Контролируемый параметр может остаться в зоне или выйти за ее пределы с некоторой вероятностью. Поэтому естественным критерием достоверности результата контроля является вероятность того, что контролируемый параметр до проведения следующей контрольной операции останется в зоне или выйдет за ее пределы.

Значение необходимого интервала времени между контрольными операциями при выбранном критерии достоверности зависит от способа организации процесса контроля, т. е. от способа получения и степени использования информации о поведении контролируемого параметра, собираемой в процессе контроля. Такую информацию, например, дает запоминание результатов предыдущих контрольных операций, измерение значений контролируемого параметра и запоминание результатов предыдущих измерений и т. п. Ниже при определении необходимого интервала времени рассматриваются два случая:

А. В момент времени t_0 произведен контроль параметра и установлена зона S_i его состояний. Более подробные данные, характеризующие положение значения параметра внутри зафиксированной зоны, отсутствуют. Запоминается результат только последней контрольной операции.

Б. В момент t_0 произведено измерение контролируемого параметра. Зона состояний S_i устанавливается по результатам этого измерения. Результаты предыдущих измерительных операций не запоминаются.

Рассматривая случаи А и Б, ограничимся ситуацией, когда контролируемый параметр является стационарной случайной функцией времени с нормальным распределением. В качестве критерия достоверности результата контроля будем использовать вероятность выхода контролируемого параметра из зоны S_i за время, равное интервалу времени между контрольными операциями.

Основные соотношения

Для уточнения математической формулировки задачи обратимся к рис. 1. Здесь a_i и b_i — границы зоны S_i; δ_i —интервал времени между контрольными операциями; t_0 — момент проведения последней контрольной операции. Предположим, что в момент времени t_0 реализация контролируемого параметра проходит через точку x_0. Нас интересует вероятность того, что реализация контролируемого параметра, начавшись в точке x_0, выйдет из зоны за время δ_i. Значение этой вероятности может быть вычислено следующим образом. Рассмотрим некоторый момент времени $t_0+\tau$ внутри интервала δ_i. Из всего множества реализаций контролируемого параметра отберем те реализации, которые от момента времени t_0 до момента времени $t_0+\tau$ ни разу не пересекли границ зоны, а в момент времени t_0 прошли через точку x_0. Допустим далее, что известна совместная плотность вероятности $f(\dot{x}, x/x_0)$ для значений параметра $x(t_0+\tau)$ и его производной $\dot{x}(t_0+\tau)$, принадлежащих указанным реализациям. Тогда вероятность того, что контролируемый параметр выйдет из зоны на отрезке времени от t_0 до $t_0+\delta_i$, будет равна (см., например, [1]):

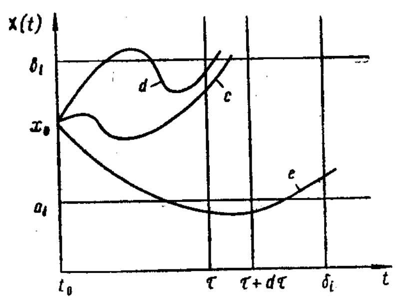

Рис. 1.

$$P(\delta_i, x_0) = \int_0^{\delta_i} d\tau \left[\int_0^{\infty} \dot{x} f(\dot{x}, b_i/x_0)\, d\dot{x} + \int_{-\infty}^{0} |\dot{x}| f(\dot{x}, a_i/x_0)\, d\dot{x}\right].$$

Искомая плотность вероятности в принципе может быть найдена, если рассматривать контролируемый параметр и его производную как компоненты многомерного процесса Маркова и решать систему дифференциальных уравнений в частных производных при соответствующих начальных и граничных условиях (о порядке составления уравнений см., например, в [2], [3], [4]). Ввиду сложности решения этой задачи нами в дальнейшем будут использоваться оценки вероятности выхода.

Рассмотрим две величины:

$$P^*(\delta_i, x_0) = \int\limits_0^{\delta_i} d\tau \left[\int\limits_0^{\infty} \dot{x} f^*(\dot{x}, b_i/x_0)\, d\dot{x} + \int\limits_{-\infty}^{0} |\dot{x}| f^*(\dot{x}, a_i/x_0)\, d\dot{x} \right],$$

$$P_*(\delta_i, x_0) = \int\limits_{-\infty}^{a_i} f_*(x/x_0)\, dx + \int\limits_{b_i}^{\infty} f_*(x/x_0)\, dx,$$

где плотности вероятности $f^*(\dot{x}, x/x_0)$ и $f_*(x/x_0)$ отличаются от рассмотренной выше тем, что справедливы для всего ансамбля реализаций, проходящих через точку x_0. Из рис. 1 видно, что величина $P^*(\delta_i, x_0)$ больше, чем $P(\delta_i, x_0)$, так как, кроме реализаций типа c, ею учитываются реализации типа d, а величина $P_*(\delta_i, x_0)$ меньше, нежели $P(\delta_i, x_0)$, так как она не учитывает вероятности реализаций типа e.

Плотности вероятности $f^*(\dot{x}, x/x_0)$ и $f_*(x/x_0)$ могут быть получены из соответствующей корреляционной матрицы*

$$A = \left\| \begin{matrix} \rho''(0) & 0 & \rho'(\tau) \\ 0 & 1 & \rho(\tau) \\ \rho'(\tau) & \rho(\tau) & 1 \end{matrix} \right\|,$$

и имеют следующий вид:

$$f^*(\dot{x}, x/x_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_1 D_2}} \exp\left[-\frac{(\dot{x}-m_1)^2}{2D_1} - \frac{(x-m_2)^2}{2D_2} \right],$$

$$f_*(x/x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{D_2}} \exp\left[-\frac{(x-m_2)^2}{2D_2} \right],$$

где $m_1 = m(\dot{x}/x, x_0) = \frac{\rho'(\tau)}{1-\rho^2(\tau)}[x_0 - x\rho(\tau)]$ — условное математическое ожидание производной контролируемого параметра $\dot{x}(t_0+\tau)$;

$D_1 = D(\dot{x}/x, x_0) = \sigma^2 \frac{\rho''(0)[1-\rho^2(\tau)] - \rho'^2(\tau)}{1-\rho^2(\tau)}$ — условная дисперсия $\dot{x}(t_0+\tau)$;

$m_2 = m(x/x_0) = x_0\rho(\tau)$ — условное математическое ожидание $x(t_0+\tau)$;

$D_2 = D(x/x_0) = \sigma^2[1-\rho^2(\tau)]$ — условная дисперсия $x(t_0+\tau)$;

$\rho(\tau)$ — коэффициент корреляции контролируемого параметра;

σ^2 — дисперсия контролируемого параметра;

$$\rho''(0) = -\left[\frac{d^2\rho(\tau)}{d\tau^2}\right]_{\tau=0}, \quad \rho'(\tau) = \frac{d\rho(\tau)}{d\tau}.$$

При этом значения контролируемого параметра, не теряя общности, будем полагать центрированными. Тогда из выражений для $P^*(\delta_i, x_0)$,

---

* Матрица A может быть составлена, согласно методике, изложенной, например, в [2], [5].

$P_*(\delta_i, x_0)$, $f^*(\dot{x}, x/x_0)$ и $f_*(x/x_0)$ получим основные расчетные соотношения для оценок вероятности выхода:

$$P^*(\delta_i, x_0) = \int_0^{\delta_i} \frac{d\tau}{\sqrt{2\pi D_2}} \left\langle \exp\left[-\frac{(b_i - m_2)^2}{2D_2}\right] \times \right.$$

$$\times \left\{ m_1(b_i)\left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_1(b_i)}{\sqrt{D_1}}\right)\right] + \frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{m_1^2(b_i)}{2D_1}\right]\right\} +$$

$$+ \exp\left[-\frac{(a_i - m_2)^2}{2D_2}\right]\left\{m_1(a_i)\left[\Phi\left(\frac{m_1(a_i)}{\sqrt{D_1}}\right) - \frac{1}{2}\right] + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{m_1^2(a_i)}{2D_1}\right]\right\}\right\rangle; \tag{1}$$

$$P_*(\delta_i, x_0) = 1 - \Phi\left(\frac{b_i - m_2}{\sqrt{D_2}}\right) + \Phi\left(\frac{a_i - m^\circ}{\sqrt{D_2}}\right). \tag{2}$$

Итак, в дальнейшем будут использоваться приближенные оценки (1) и (2). При малых значениях вероятности выхода оценки практически совпадают. Отметим, что именно этот участок наиболее важен для рассматриваемой задачи, так как он соответствует контролю с высокой достоверностью. Оценки были получены в предположении, что в момент времени t_0 значение контролируемого параметра было равно x_0. В более общем случае после проведения контрольной или измерительной операции положение контролируемого параметра внутри зоны характезируется некоторой апостериорной плотностью вероятности и полученные оценки необходимо усреднить по x_0 в пределах зоны.

А. Контроль

Вначале предположим, что погрешность контрольной аппаратуры пренебрежимо мала. В этом случае апостериорная плотность вероятности значений контролируемого параметра равна

$$f(x_0/a_i \leqslant x_0 \leqslant b_i) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{b_i}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_i}{\sigma}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right).$$

Для получения значения вероятности выхода из зоны необходимо вычислить математическое ожидание величин (1) и (2). Для практических приложений, как уже отмечалось выше, наиболее интересен начальный участок зависимости $P(\delta_i)$, где с достаточной точностью можно использовать разложение вероятности выхода в ряд Тейлора

$$P(\delta_i) = P(0) + P'(0)\,\delta_i + P''(0)\,\frac{\delta_i^2}{2!} + \ldots \tag{3}$$

Для рассматриваемого случая $P(0) = 0$, а вычисление трех первых производных для оценок вероятности выхода показывает, что

$$P^{*\prime}(0) = P_*'(0) = \sqrt{\rho''(0)}\; \frac{\exp\left(-\frac{b_i^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{a_i^2}{2\sigma^2}\right)}{2\pi\left[\Phi\left(\frac{b_i}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_i}{\sigma}\right)\right]},$$

$P^{*''}(0) = P_*''(0) = 0$, $P^{*'''}(0) > P_*(0)$, т. е. различие между оценками проявляется, начиная только с четвертого члена разложения (3), и для контроля с высокой достоверностью оценки практически совпадают. Существенное различие между оценками наблюдается лишь тогда, когда величина второго члена оценок близка к установившемуся значению оценки снизу, так как в этом случае оценка снизу дает чересчур заниженное значение для вероятности выхода. Поэтому использование оценки сверху в большинстве случаев приводит к небольшому завышению значения вероятности выхода. Расчеты показывают, что для определения интервала δ_i при высокой достоверности контроля в разложении (3) достаточно ограничиться только вторым членом. Поэтому величину интервала времени между контрольными операциями можно определить по следующей формуле:

$$\delta_i = 2\pi \frac{P_{0i}\left[\Phi\left(\frac{b_i}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_i}{\sigma}\right)\right]}{\sqrt{\rho''(0)}\left[\exp\left(-\frac{b_i^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{a_i^2}{2\sigma^2}\right)\right]}, \qquad (4)$$

где P_{0i} — заданное значение вероятности выхода из зоны S_i.

Весьма интересна физическая интерпретация формулы (4). Рассмотрим зону такой ширины $l_i = b_i - a_i$, для которой

$$\alpha_i = \frac{\Phi\left(\frac{b_i}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_i}{\sigma}\right)}{\frac{l_i}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left[\exp\left(-\frac{b_i^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{a_i^2}{2\tau^2}\right)\right]} \cong 1,$$

т. е. зону шириной порядка σ. Учтем при этом, что

$$2\frac{\sigma\sqrt{\rho''(0)}}{\sqrt{2\pi}} = \overline{|\dot{x}|},$$

где $\overline{|\dot{x}|}$ — среднеарифметическое отклонение производной контролируемого параметра.

Тогда

$$\delta_i = P_{0i}\frac{l_i}{\overline{|\dot{x}|}}.$$

Итак, интервал δ_i между контрольными операциями пропорционален времени, за которое контролируемый параметр, изменяясь со скоростью, равной среднеарифметическому отклонению производной, проходит зону. Зависимость (4) определяет алгоритм работы устройства управления моментами проведения контрольных операций. Как следует из (4), интервал времени δ_i для различных зон различен. Его величина зависит не только от положения зоны на шкале контролируемого параметра, но и от задаваемого значения вероятности выхода, которое в общем случае может быть различным для различных зон. Вследствие этого в процессе контроля необходимо либо менять интервал времени δ_i либо производить операции контроля через минимальный из всех δ_i промежуток времени. Если величина вероятности выхода задана одинаковой для всех зон, а сами зоны достаточно узки и примерно одинаковы по ширине, то величина интервала примерно одинакова для всех зон.

Рассмотрим далее случай, когда погрешность y контрольной аппаратуры распределена нормально, не коррелирована с контролируемым параметром и его производной и достаточно мала $(\sigma_y \ll \sigma;\ \sigma_y \ll l_i)$. Тогда для интервала δ_i можно найти следующую оценку:*

$$\delta_i \cong 2\pi \frac{P_{0i}\left[\Phi\left(\frac{b_i}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_i}{\sigma}\right)\right]}{\sqrt{\rho''(0)}\left[\exp\left(-\frac{b_i^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{a_i^2}{2\sigma^2}\right)\right]} - \frac{\sigma_y}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho''(0)}}, \qquad (5)$$

где второй член в правой части равенства учитывает начальную вероятность выхода при $t=t_0$.

Итак, при контроле интервал δ_i может быть определен по формулам (4) и (5). Из них следует, что вместо корреляционной функции достаточно задания дисперсии первой производной контролируемого параметра, так как величина $\rho''(0)$ связана с ней соотношением $\rho''(0) = \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}$.

Б. Контроль с измерением

Вначале предположим, что погрешностью измерения значения параметра можно пренебречь. В этом случае оценки вероятности выхода совпадают с (1) и (2). Величина вероятности выхода существенным образом зависит от того, какое значение имеет контролируемый параметр внутри зоны. Если исходить из одной и той же вероятности выхода из зоны, то чем дальше от границ зоны находится измеренное значение параметра, тем через больший интервал времени следует проводить следующую контрольную операцию. При этом величина интервала и значение контролируемого параметра связаны некоторой функциональной зависимостью $\delta_i = \varphi(x_0)$ (она может быть получена, если выражения для оценок разрешить относительно δ_i), которая должна быть положена в основу работы устройства, управляющего моментами проведения контрольных операций. На рис. 2 показан примерный характер функции $\varphi(x_0)$ для оценок сверху и снизу. Кривая $\varphi(x_0)$ имеет выпуклую форму и может быть аппроксимирована двумя отрезками прямых, соединяющих ее максимум с границами зоны. При этом практическая реализация управляющего устройства получается весьма простой.

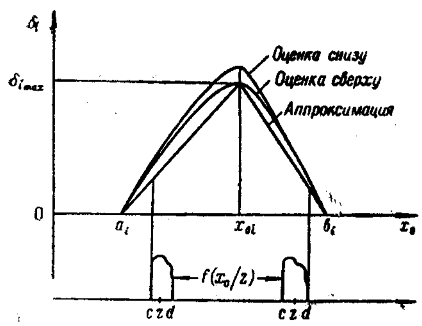

Рис. 2.

Для осуществления аппроксимации найдем координаты максимума x_{0i} и $\delta_{i\,max}$. Обычно вероятность выхода меньше установившегося значения оценки снизу. Как уже отмечалось, в этом случае разница между оценками невелика. Поэтому для нахождения координат максимума воспользуемся оценкой снизу. Несложно показать, что при этом

---

* Формула (5) следует из того факта, что вблизи границ зоны $f(x_0/a_i \leqslant x_0 \leqslant b_i) > f(x_0/a_i \leqslant x_0 + y \leqslant b_i)$, а в остальных точках зоны $f(x_0/a_i \leqslant x_0 \leqslant b_i) \cong f(x_0/a_i \leqslant x_0 + y \leqslant b_i)$.

величины x_{0i} и $\delta_{i\,\max}$ определяются следующей системой уравнений:

$$x_{0i} = \frac{b_i + a_i}{2\rho\,(\delta_{i\,\max})}, \qquad \frac{b_i - a_i}{2\sigma\sqrt{1 - \rho^2\,(\delta_{i\,\max})}} = k\left(\frac{1 - P_{0i}}{2}\right),$$

где $k\left(\frac{1 - P_{0i}}{2}\right)$ — функция, обратная интегралу ошибок. Значение P_{0i} удобно задать в виде интеграла ошибок следующим образом: $P_{0i} = 1 - 2\Phi(k_i)$. Этот переход при расчетах не вызывает затруднений, так как интеграл ошибок табулирован. Тогда окончательно получим следующие уравнения для нахождения координат максимума:

$$x_{0i} = \frac{b_i + a_i}{2\sqrt{1 - \frac{(b_i - a_i)^2}{4k_i^2\,\sigma^2}}}, \quad \rho\,(\delta_{i\,\max}) = \sqrt{1 - \frac{(b_i - a_i)^2}{4k_i^2\,\sigma^2}}. \qquad (6)$$

Уравнение для $\delta_{i\,\max}$ часто бывает трансцедентным. Кроме того, не всегда известна корреляционная функция. Поэтому определенный интерес представляет нахождение верхней границы корня $\delta_{i\,\max}$. Она может быть найдена, если воспользоваться разложением корреляционной функции в ряд по степеням τ^2 и ограничиться его первыми членами:

$$\delta_{i\,\max} > \frac{b_i - a_i}{2k_i\,\sigma\sqrt{\rho''\,(0)}}. \qquad (7)$$

Если значение вероятности выхода близко к установившемуся значению оценки снизу, то (6) слишком завышает величину $\delta_{i\,\max}$. В этом случае найденное из (6) значение следует уточнить. Используя два первых члена асимптотического разложения для $\left[\frac{1}{2} - \Phi\,(z)\right]$ при больших значениях [6], запишем разность между производными оценок

$$P^{*\prime}\,(\tau,\ x_0) - P_*'\,(\tau,\ x_0) < \frac{D_1}{2\pi}\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left\{\frac{1}{m_1^2\,(b_i)} \times \right.$$

$$\times \exp\left[-\frac{(b_i - m_2)^2}{2D_2} - \frac{m_1^2\,(b_i)}{2D_1}\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{m_1^2\,(a_i)} \exp\left[-\frac{(a_i - m_2)^2}{2D_2} - \frac{m_1^2\,(a_i)}{2D_1}\right]\right\}.$$

На начальном участке производная разности возрастает, поэтому

$$\Delta P\,(\delta_i,\ x_0) < [P^{*\prime}\,(\delta_i,\ x_0) - P_*'\,(\delta_i,\ x_0)]\,\frac{\delta_i}{2}. \qquad (8)$$

Располагая (6) и (8), можно уточнить значение методом последовательных приближений.

Если значение вероятности выхода равно или превышает установившееся значение оценки снизу, то для определения $\delta_{i\,\max}$ приходится выполнять численное интегрирование (1) или использовать (8), а затем находить $\delta_{i\,\max}$ методом последовательных приближений.

Устройство, управляющее моментами проведения контрольных операций, должно вычислять значение интервала δ_i по зависимости $\delta_i = \varphi\,(x_0)$.

Рассмотрим случай измерения с независимой погрешностью. Предположим, что условная плотность вероятности $f(x_0/z)$ (z — результат измерения) определена на некотором отрезке $[c,\ d]$ внутри зоны (см. рис. 2). Для определения зависимости $\delta_i = \varphi\,(z)$ необходимо усреднить в пределах указанного отрезка значение вероятности выхода, полученное для случая отсутствия погрешности. Однако обычно величина отрезка много меньше ширины зоны, и поэтому можно использовать приближенный способ для нахождения интервала, несколько занизив его величину. Для этого достаточно: 1) при попадании отрезка между x_{0i} и верхней границей зоны определять значение интервала по значению верхней границы отрезка; 2) при попадании отрезка между x_{0i} и нижней границей зоны — по значению нижней границы отрезка.

Для того, чтобы оценить выигрыш в величине интервала времени от применения измерения контролируемого параметра, сопоставим рассмотренные случаи А и Б и сравним их с непрерывным контролем.

Сравнительная оценка случаев А и Б

Из предыдущего ясно, что величина интервала времени между контрольными операциями существенным образом зависит от способа организации процесса контроля. Для «контроля» она меняется в зависимости от попадания контролируемого параметра в ту или иную зону состояний. Для «контроля с измерением» величина интервала времени

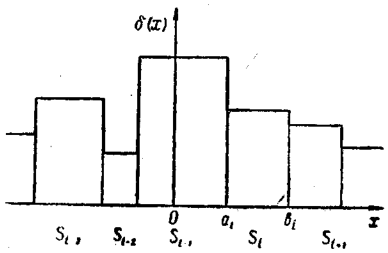

Рис. 3.

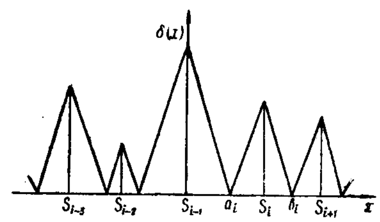

Рис 4.

зависит, кроме того, от положения значений контролируемого параметра внутри зоны. На рис. 3 и 4 показан характер зависимости $\delta(x)$ для случаев А и Б.

Сопоставим случаи А и Б без погрешностей по средней величине интервала времени между контрольными операциями. Для «контроля» средняя величина интервала времени определяется выражением

$$\bar{\delta}_{А} = \sum_i \delta_i P_i = \sum_i P_{0i} \frac{l_i}{|\dot{x}|} \alpha_i P_i,$$

для «контроля с измерением» —

$$\bar{\delta}_{Б} = \int \delta(x) f(x)\, dx = \sum_i \delta_{i\,\max} \beta_i,$$

где
$$\beta_i = \int_{a_i}^{x_{0i}} \frac{x - a_i}{x_{0i} - a_i} f(x)\, dx + \int_{x_{0i}}^{b_i} \frac{b_i - x}{b_i - x_{0i}} f(x)\, dx.$$

Остановимся на случае, когда шкала контролируемого параметра разбита на узкие зоны равной ширины, и примем одинаковой для всех зон вероятность выхода. Тогда для «контроля» получим

$$\bar{\delta}_{А} = P_0 \frac{l}{|\dot{x}|} \sum_i \alpha_i P_i .$$

Для зон шириной $l=(1\div2)\sigma$ сумма в этой формуле примерно равна единице. Следовательно,

$$\bar{\delta}_А \cong P_0 \frac{l}{\overline{|\dot{x}|}}.$$

Для «контроля с измерением» используем неравенство (7). Тогда

$$\bar{\delta}_Б = \frac{l}{k\sqrt{2\pi}\;\overline{|\dot{x}|}} \sum_i \beta_i.$$

В рассматриваемом случае $\sum_i \beta_i \cong 0{,}5$, т. е.

$$\bar{\delta}_Б \cong \frac{l}{k2\sqrt{2\pi}\;\overline{|\dot{x}|}}.$$

Теперь оценим среднюю величину интервала при непрерывном контроле. Случай непрерывного контроля интересен тем, что при таком контроле средняя величина интервала времени между контрольными операциями совпадает со средней продолжительностью пребывания контролируемого параметра в зоне.

Из рис. 5 и [7] следует, что величина интервала времени между контрольными операциями при непрерывном контроле определяется формулой

$$\bar{\delta}_i = \frac{\sum_i \delta_{ij}}{N_{ср}} = 2\pi \frac{\Phi\left(\frac{b_i}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_i}{\sigma}\right)}{\sqrt{\rho''(0)}\left[\exp\left(-\frac{b_i^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{a_i^2}{2\sigma^2}\right)\right]},$$

где $N_{ср}$ — среднее число пересечений границы b_i снизу вверх и границы a_i сверху вниз.

Усредняя величину δ_i по шкале параметра, получим среднюю величину интервала времени между операциями при непрерывном контроле

$$\bar{\delta}_н = \sum_i \frac{l_i}{\overline{|\dot{x}|}} \alpha_i P_i.$$

Для случая, когда шкала контролируемого параметра разбита на узкие зоны равной ширины, имеем

$$\bar{\delta}_н \cong \frac{l}{\overline{|\dot{x}|}}.$$

Из сопоставления средних величин интервала времени между операциями для «контроля», «контроля с измерением» и непрерывного контроля следует, что для сравнительно узких зон средняя величина интервала времени между контрольными операциями определяется первым абсолютным моментом производной контролируемого параметра $\overline{|\dot{x}|}$. Не располагая данными об этой характеристике производной, можно сравнить рассмотренные выше способы организации процесса контроля, сопоставив средние величины интервала.

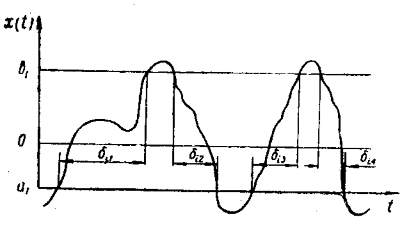

Рис. 5.

В табл. 1 приведены данные сопоставления для различных значений вероятности выхода. Из таблицы видно, что применение измерения позволяет увеличить среднюю величину интервала времени между операциями по сравнению с «контролем». Величина выигрыша зависит от значения вероятности выхода. Чем меньше вероятность выхода, тем более существенным оказывается выигрыш. Для больших значений вероятности выхода величина выигрыша оказывается несущественной. Величина среднего интервала времени между операциями при «контроле с измерением» значительно меньше, чем средняя продолжительность времени пребывания контролируемого параметра в зоне.

Таблица 1

P_0	0,0027	0,01	0,05	0,1
k	3	2,57	2	1,65
$\frac{\bar{\delta}_Б}{\bar{\delta}_А}$	25	7,8	2	1,2
$\frac{\bar{\delta}_н}{\bar{\delta}_А}$	370	100	20	10
$\frac{\bar{\delta}_н}{\bar{\delta}_Б}$	15	12,8	10	8,2

Данные табл. 1 справедливы для сравнительно узких зон контроля. Для широких зон при «контроле с измерением» достаточно простых соотношений получить не удается, так как в этом случае величина интервала времени оказывается соизмеримой с интервалом корреляции контролируемого параметра, и при расчетах, необходимых для сравнения, требуется оперировать конкретными корреляционными функциями. Результаты таких расчетов для широкой центральной зоны и корреляционной функции, имеющей вид гауссовой кривой, даны в табл. 2. Выигрыш в величине интервала при применении измерения наиболее значителен для малых значений вероятности выхода. Для больших значений вероятности выхода оба способа организации процесса контроля практически равноценны и, следовательно, предпочтителен более простой из них.

Таким образом, применение измерения при контроле параметров, являющихся случайными функциями времени, позволяет снизить среднюю величину интервала между контрольными операциями. Естественно, что это достигается путем усложнения контрольной аппаратуры (в ней должно быть более сложное устройство, управляющее моментами проведения контрольных операций, и измерительный прибор). Однако в системе контроля большого числа параметров такое усложнение, по-видимому, является целесообразным.

Таблица 2

P_0		0,0027	0,01	0,05	0,1
k		3	2,57	2	1,65
$b-a=2\sigma$		6,1	2,6	1,05	~ 1
		390	105	21	10,5
		64	40	20	10,5
$b-a=3\sigma$		1,5	~ 1	~ 1	~ 1
		370	100	20	10
		250	100	20	10

Дальнейшим возможным путем понижения средней величины интервала времени между контрольными операциями является получение и использование в процессе контроля дополнительной информации о текущем изменении контролируемого параметра (например, запоминание и использование результатов предыдущих контрольных и измерительных операций, измерение производных контролируемого параметра и т. п.). При этом функциональные зависимости, описывающие работу устройства, управляющего моментами проведения контрольных операций, могут быть также получены из оценок вероятности выхода после предварительного составления соответствующей корреляционной матрицы.

В заключение автор выражает глубокую благодарность д-ру техн. наук М. П. Цапенко и В. И. Рабиновичу, беседы с которыми оказали автору большую помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Райс. Теория флюктуационных шумов.— В сб. переводов: «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех». Под ред. Н. А. Железнова. М.—Л., Изд-во иностр. лит., 1953.
2. Р. Л. Стратонович. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М., Изд-во «Советское радио», 1961.
3. Д. Миддлтон. Введение в статистическую теорию связи, т. I. М., Изд-во «Советское радио», 1961.
4. М. С. Бартлетт. Введение в теорию случайных процессов. М.—Л., Изд-во иностр. лит., 1958.
5. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. М.—Л., Физматгиз, 1962.
6. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М.—Л., Физматгиз, 1963.
7. Б. Р. Левин. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М., Изд-во «Советское радио», 1960.

Поступила в редакцию
10 сентября 1964 г.