

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Новосибирский государственный университет

Физический факультет
Кафедра Квантовой оптики

Л. В. Ильичёв

**ЭЛЕМЕНТЫ
КВАНТОВОЙ МЕТАФИЗИКИ**

Часть 2

(квантовые операции, критерий зацепленности,
согласованные истории и парадоксы пост-селекции)

Учебное пособие

Новосибирск
2011

УДК 539.1.01
ББК (В)22,314
И 468

Ильичёв Л. В. Элементы квантовой метафизики: Учеб. пособие / Новосибирский государственный университет; Институт автоматки и электрометрии СО РАН. Новосибирск, 2011. Ч. 2: квантовые операции, критерий зацепленности, согласованные истории и парадоксы пост-селекции. 84 с.

В настоящем учебном пособии представлен материал, основанный на курсе лекций, читаемых автором в Новосибирском государственном университете. Изложен современный взгляд на некоторые актуальные интерпретационные проблемы квантовой физики, слабо отражённые в отечественной литературе.

Пособие рассчитано на студентов и аспирантов, обучающихся по специальностям, связанным с квантовой физикой. Оно может быть полезным и для молодых специалистов, работающих в этой области.

Учебное пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009-2018 гг.

© Новосибирский государственный университет, 2011

© Ильичёв Л.В., 2011

Оглавление

Предисловие к Части 2	5
1 Как меняются квантовые состояния при измерениях	7
2 Вполне положительные преобразования квантовых состояний	12
3 "Распутывание" квантовой операции. Пример с резонансной флуоресценцией атома.*	21
4 Экстремальное распутывание квантовой операции.*	28
5 Критерий зацепленности Переса-Городецки	33
6 Зацепленность в состояниях Вернера	43
7 Согласованные (неинтерферирующие) квантовые истории	47
8 Квантовые системы с пост-селекцией. Правило AVL.	54
9 Нарушение неравенства Белла при пост-селекции.*	62
10 Проблема "трёх коробок".	66
11 Проблема "жестокоего короля".	71
12 Слабые измерения и "слабые значения".	74
Список рекомендуемой литературы	83
Список используемых сокращений	83

Предисловие к Части 2

Вторая часть "Элементов квантовой метафизики" является естественным продолжением первой части. В центре внимания снова оказываются проблемы основ квантовой физики. При отборе материала автор отдавал предпочтение вопросам, недостаточно отражённым в доступных толстых монографиях. Быстрый прогресс информационных технологий и их продвижение в квантовую область требуют глубокого понимания проблем, ещё недавно не выходящих за рамки философии. Примером может служить тематика неравенств Белла, обсуждаемая в Части 1. Трудно было ожидать ещё три десятка лет назад, что это сугубо "метафизическое" направление окажется столь важным для практических задач развивающейся квантовой информатики. Это в полной мере может касаться и других тем квантовой метафизики, не обещающих с сегодняшней точки зрения новых технологических прорывов, но обладающих недевальвируемой ценностью при обосновании самых глубоких основ нашего миропонимания.

Изложение начинается с феноменологии квантовых измерений. Материал в общем достаточно устоявшийся и используется как предпосылка и основа для менее известных обобщений, какими являются квантовые согласованные истории и физика квантовых систем с пре- и пост-селекцией. Кроме этого излагаемый формализм квантовых измерений необходим для введения понятия вполне положительных отображений квантовых состояний. Последние, в свою очередь, являются необходимым ингредиентом метода обнаружения зацепленности смешанных состояний. Это, пожалуй, наиболее яркий пример трансформации метафизической тематики в полноценную и актуальную физическую, т.к. зацепленность оказывается важнейшим ресурсом в протоколах квантовой

информатики (например, в квантовой телепортации).

Естественно, что и вторая часть пособия не исчерпывает всё множество фундаментальных и интерпретационных квантовых проблем. В частности, пока остаётся необсуждённой вершина квантовой метафизики – многомировая концепция Эверетта. Она теснейшим образом связана с центральной тематикой пособия, обозначенной ещё в Части 1. А именно, с содержанием понятия "квантовое состояние". Является ли квантовое состояние объективным атрибутом системы или это скорее состояние нашего знания? Первый взгляд (онтологический) склонен наделять понятия квантового состояния атрибутами физической реальности нового типа взамен привычной, но безвозвратно утраченной физической реальности классической механики. Второй взгляд – эпистемологический или реляционный – был намечен в конце Части 1 и получает дальнейшее развитие в Части 2 при обсуждении квантовой пост-селекции.

Параграфы, отмеченные звёздочкой *, содержат материал, не входивший ранее в учебные тексты и лишь частично представленный в научной литературе.

1 Как меняются квантовые состояния при измерениях

В квантовой механике состояние $|\psi_t\rangle$ изучаемой системы подвержено двум типам изменения. Изолированная система (т.е. система, не обменивающаяся с окружением ни энергией, ни информацией) эволюционирует непрерывно согласно известному уравнению Шредингера

$$\partial_t |\psi_t\rangle = -i\hat{H}|\psi_t\rangle. \quad (1)$$

Эволюцию определяет гамильтониан \hat{H} системы. Легко записать формальное решение уравнения (1):

$$|\psi_t\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi_{t_0}\rangle. \quad (2)$$

Здесь

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp[-i\hat{H}(t - t_0)]$$

унитарный оператор с очевидными свойствами

$$\hat{U}(t, t_0)^\dagger = \hat{U}(t_0, t); \quad \hat{U}(t, t')\hat{U}(t', t_0) = \hat{U}(t, t_0). \quad (3)$$

Если над системой осуществляется наблюдение, в процессе которого всегда генерируется новая информация, ситуация иная. Стандартный формализм для её описания разработан в своё время фон Нейманом и изложен в его несколько старомодной, но великолепной книге. Этот формализм в несколько различающихся вариантах представлен также во всех учебниках по квантовой механике и будет воспроизведён ниже с целью введения необходимых далее понятий и обозначений.

Полагаем, что измерение некоторой величины A , относящейся к нашей системе. Согласно постулатам квантовой механики измеряемой (наблюдаемой) величине A в формализме

сопоставляется самосопряжённый оператор \hat{A} , действующий в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_S состояний системы, которое для простоты будем считать конечномерным. В этом случае набор возможных исходов измерения также всегда конечен: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Эти исходы, как известно, являются собственными числами оператора \hat{A} , которым сопоставлены собственные вектора $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle$. Также для простоты мы предполагаем, что собственные числа наблюдаемой \hat{A} не вырождены, т.е. каждому собственному числу a_i сопоставлен единственный собственный вектор $|a_i\rangle$, ортогональный остальным собственным векторам:

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$$

В этом случае набор собственных векторов $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle\}$ образует некоторый базис пространства \mathcal{H}_S , $n = \dim \mathcal{H}_S$ и для оператора \hat{A} имеет место спектральное представление

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^n a_i \hat{P}_i, \quad (4)$$

где введены проекционные операторы

$$\hat{P}_i = |a_i\rangle \langle a_i|.$$

Они образуют "разбиение единицы"

$$\hat{1} = \sum_{i=1}^n \hat{P}_i. \quad (5)$$

Если система до измерения находилась в состоянии $|\Psi\rangle$ i -ый исход появляется, как известно, с вероятностью

$$p_i = |\langle a_i | \psi \rangle|^2 \equiv \langle \psi | \hat{P}_i | \psi \rangle. \quad (6)$$

При этом система оказывается в состоянии $|a_i\rangle$.

Легко заметить, что оба эти обстоятельства содержатся в следующем простом выражении, задающем изменение состояния при исходе i :

$$|\psi\rangle\langle\psi| \xrightarrow{i} \hat{P}_i|\psi\rangle\langle\psi|\hat{P}_i \equiv |a_i\rangle p_i \langle a_i|. \quad (7)$$

Оно записано для статистического оператора $|\psi\rangle\langle\psi|$, отвечающего изначальному нахождению системы в "чистом" состоянии $|\psi\rangle$. След оператора в правой части (7) равен вероятности p_i из (6) и пропорционален $|a_i\rangle\langle a_i|$ – статистическому оператору системы после измерения с i -ым исходом.

Ценность выражения (7) в возможности его прямого обобщения на случай произвольного смешанного начального состояния системы:

$$\hat{\rho} = \sum_k \rho_k |\psi^{(k)}\rangle\langle\psi^{(k)}|,$$

когда известны вероятности ρ_k нахождения системы в одном из "чистых" состояний $|\psi^{(k)}\rangle$. Записывая (7) для операторов $|\psi^{(k)}\rangle\langle\psi^{(k)}|$ и суммируя обе части с весами ρ_k , получаем

$$\hat{\rho} \xrightarrow{i} \hat{P}_i \hat{\rho} \hat{P}_i. \quad (8)$$

При этом след правой части по-прежнему равен вероятности получить исход i :

$$p_i = \text{Tr} \hat{P}_i \hat{\rho} \hat{P}_i = \text{Tr} \hat{P}_i \hat{\rho}.$$

Здесь мы воспользовались возможностью циклически переставлять операторы при вычислении следа их произведения и тем, что $\hat{P}_i^2 = \hat{P}_i$ (свойство *идемпотентности*). Разделив

правую часть (8) на её след, мы получаем статистический оператор $\hat{\rho}_i$ системы после измерения с исходом i :

$$\hat{\rho}_i = \frac{\hat{P}_i \hat{\rho} \hat{P}_i}{\text{Tr} \hat{P}_i \hat{\rho} \hat{P}_i}. \quad (9)$$

Все приведённые выражения относятся к ситуации определённого i -ого исхода измерения величины A , т.е. имеет место *селекция* в множестве всех возможных исходов. Предположим теперь, что измерение имело место, но информация об исходе недоступна или по каким-то причинам не представляет интереса. Выписывая выражение для конечного состояния системы в такой ситуации необходимо провести усреднение статистического оператора вида (9) по вероятностям всех возможных исходов:

$$\hat{\rho} \mapsto \sum_{i=1}^n p_i \hat{\rho}_i = \sum_{i=1}^n \hat{P}_i \hat{\rho} \hat{P}_i. \quad (10)$$

Это *неселективное* описание акта измерения. Каждое слагаемое из правой части (10) отвечает селективному описанию конкретного i -ого исхода.

Выражение (10) подсказывает очевидный способ обобщения на случай цепочки последовательных измерений величин $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$ в моменты времени $t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Для каждой наблюдаемой имеет место спектральное представление

$$\hat{A}^{(s)} = \sum_{i=1}^n a_i^{(s)} \hat{P}_i^{(s)},$$

где $s = 1, 2, \dots, m$. Будем считать, что в промежутках между моментами измерений система изолирована и эволюционирует согласно унитарному закону (2), обобщённого на слу-

чай статистического оператора. В результате цепочки измерений мы имеем при неселективном описании следующий закон преобразования исходного состояния $\hat{\rho}_0$ при $t_0 < t_1$) в конечное состояние $\hat{\rho}_t$ при $t > t_m$:

$$\hat{\rho}_0 \mapsto \sum_{i_1} \dots \sum_{i_m} \hat{U}(t, t_m) \hat{P}_{i_m}^{(m)} \hat{U}(t_m, t_{m-1}) \dots \hat{U}(t_2, t_1) \hat{P}_{i_1}^{(1)} \hat{U}(t_1, t_0) \times \\ \hat{\rho}_0 \hat{U}(t_0, t_1) \hat{P}_{i_1}^{(1)} \hat{U}(t_1, t_2) \dots \hat{U}(t_{m-1}, t_m) \hat{P}_{i_m}^{(m)} \hat{U}(t_m, t). \quad (11)$$

В правой части этого выражения ясно видна структура эволюции – начальный статистический оператор $\hat{\rho}_0$ окаймлён цепочкой операторов, представляющих обратимую (унитарную) эволюцию на интервалах времени $(t_0, t_1), \dots, (t_m, t)$, прерываемую актами измерений со всеми возможными исходами. При записи выражения (11) использовалось первое из свойств (3) операторов унитарной эволюции. Заметим, что при этом возникла единообразная запись цепочек операторов, окаймляющих начальное состояние $\hat{\rho}_0$. Только время в левой цепочке возрастает справа налево а в правой – наоборот. Второе из свойств (3) позволяет записать выражение (11) более компактно. Для этого введём новые операторы проектирования зависящие от моментов проведения соответствующих измерений:

$$\hat{P}_{i_s}^{(s)}(t_s) \doteq \hat{U}(t_0, t_s) \hat{P}_{i_s}^{(s)} \hat{U}(t_s, t_0).$$

Нетрудно убедиться, что с их помощью (11) принимает вид

$$\hat{\rho}_0 \mapsto \hat{\rho}_t = \\ \sum_{i_1} \dots \sum_{i_m} \hat{U}(t, t_0) \hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m) \dots \hat{P}_{i_1}^{(1)}(t_1) \hat{\rho}_0 \hat{P}_{i_1}^{(1)}(t_1) \dots \hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m) \hat{U}(t_0, t). \quad (12)$$

Как и в случае одного измерения, каждое слагаемое в правой части (12) отвечает селективному описанию и задаёт конечное состояние для конкретной "истории"

$$\alpha = \{a_{i_1}^{(1)}, \dots, a_{i_m}^{(m)}\}. \quad (13)$$

Вероятность реализации этой истории, как и ранее, задаётся следом соответствующего слагаемого:

$$p_\alpha = \text{Tr} \hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m) \dots \hat{P}_{i_1}^{(1)}(t_1) \hat{\rho}_0 \hat{P}_{i_1}^{(1)}(t_1) \dots \hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m). \quad (14)$$

Заметим, что возможность циклической перестановки операторов при вычислении следа позволила избавиться от унитарных операторов $\hat{U}(t_0, t)$ и $\hat{U}(t, t_0)$, стоящих на флангах правой части выражения (12). В принципе мы можем циклически переставить также оператор $\hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m)$ и, воспользовавшись его идемпотентностью, записать вероятность в ещё чуть более коротком виде:

$$p_\alpha = \text{Tr} \hat{P}_{i_{m-1}}^{(m-1)}(t_{m-1}) \dots \hat{P}_{i_1}^{(1)}(t_1) \hat{\rho}_0 \hat{P}_{i_1}^{(1)}(t_1) \dots \hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m).$$

Важно, что следующий аналогичный шаг с проектором $\hat{P}_{i_{m-1}}^{(m-1)}(t_{m-1})$ уже не возможен, т.к. операторы $\hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m)$ и $\hat{P}_{i_{m-1}}^{(m-1)}(t_{m-1})$ в общем случае не коммутируют. Это обстоятельство оказывается весьма важным в формализме согласованных квантовых историй, о чём пойдёт речь далее.

2 Вполне положительные преобразования квантовых состояний

Как и ранее рассматривается квантовая система S с конечномерным пространством состояний \mathcal{H}_S . Будем искать

наиболее общее преобразование

$$\hat{\rho} \mapsto \Lambda[\hat{\rho}] \quad (15)$$

состояния $\hat{\rho}$ системы, допускаемое законами квантовой механики. Прежде всего это заставляет нас ограничиться линейными преобразованиями. Поэтому, выбрав некоторый ортонормированный базис $\{|i\rangle\}_{i=1}^n$ в \mathcal{H}_S , можно записать преобразование (15) для матричных компонент:

$$\rho_{ij} \mapsto \sum_{i',j'} \Lambda_{ii',jj'} \rho_{i'j'}. \quad (16)$$

По штрихованным и не штрихованным индексам i и j здесь и далее предполагается суммирование в пределах от 1 до n . Поскольку в выражении (16) элементы матрицы плотности выступают в роли векторных компонент, совокупность коэффициентов $\Lambda_{ii',jj'}$ называют иногда суперматрицей, чьи строки и столбцы нумеруются двойными символами ii' и jj' . Символ Λ из (15) называют, соответственно, супероператором.

После преобразования статистический оператор должен остаться эрмитовым. Из этого следует, как нетрудно проверить, что суперматрица Λ также эрмитова:

$$\Lambda_{ii',jj'}^* = \Lambda_{jj',ii'}.$$

Далее, из условия сохранения вероятности

$$Tr \Lambda[\hat{\rho}] = Tr \hat{\rho}$$

следует

$$\sum_k \Lambda_{ki',kj'} = \delta_{i'j'}.$$

Наконец, преобразованный статистический оператор $\Lambda[\hat{\rho}]$ должен быть положительным:

$$\langle \varphi | \Lambda[\hat{\rho}] | \varphi \rangle \geq 0$$

поскольку левая часть данного выражения есть вероятность обнаружить систему после преобразования в состоянии $|\varphi\rangle$. Ясно, что для определения свойств суперматрицы Λ , вытекающих из этого условия, достаточно исследовать случай чистого состояния: $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, т.к. любое смешанное состояние есть комбинация чистых состояний с положительными весами – вероятностями. Таким образом, для любых состояний $|\varphi\rangle$ и $|\psi\rangle$ из \mathcal{H}_S имеет место неравенство

$$\langle \varphi | \Lambda[|\psi\rangle\langle\psi|] | \varphi \rangle \geq 0. \quad (17)$$

В выбранном базисе это неравенство приобретает вид

$$\sum_{i,i'} \sum_{j,j'} \langle \varphi | i \rangle \langle i' | \psi \rangle \Lambda_{ii',jj'} \langle \psi | j' \rangle \langle j | \varphi \rangle \geq 0. \quad (18)$$

Обозначим

$$x_i = \langle i | \varphi \rangle, \quad y_i = \langle i | \psi \rangle.$$

Тогда выражение (18) можно переписать так:

$$\sum_{i,i'} \sum_{j,j'} x_i^* y_{i'} \Lambda_{ii',jj'} x_j y_{j'}^* \geq 0. \quad (19)$$

Здесь x_i и y_i ($i = 1, \dots, n$) можно считать любыми комплексными числами. Выражение (19) несколько напоминает условие неотрицательной определённости квадратичной формы, построенной на суперматрице Λ :

$$\sum_{i,i'} \sum_{j,j'} z_{ii'}^* \Lambda_{ii',jj'} z_{jj'} \geq 0. \quad (20)$$

Заметим, что неравенство (19), следующее из условия положительности преобразованного статистического оператора, является более слабым в сравнении с (20), где z_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) – набор произвольных комплексных чисел, которые в общем случае нельзя представить в виде $x_i y_j^*$. Если имеет место более сильное условие (20), преобразование Λ называют **вполне положительным**. Следует понимать, что в условии (19) *положительности* преобразования Λ прилагательное относится к матрице преобразованного статистического оператора, тогда как условие *полной положительности* характеризует суперматрицу $\Lambda_{ii',jj'}$. Далее будет показано, что физически реализуемые преобразования состояний в квантовой механике должны быть вполне положительными.

Система, которую мы исследуем, не исчерпывает всей Вселенной и имеет окружение. Будем считать, что расширение системы с включением в неё окружения, также не есть вся Вселенная. В частности, самих себя мы расположим вне расширенной системы. Выбор расширения системы допускает некоторый произвол. Мы воспользуемся им так, чтобы состояние расширенной системы оказалось чистым, т.е. считаем, что существует вектор

$$|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E,$$

где \mathcal{H}_E – гильбертово пространство окружения. Выбирая некоторый ортонормированный базис $\{|e_\kappa\rangle\}$ в \mathcal{H}_E , мы можем представить $|\Psi\rangle$ в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{\kappa=1}^K |\psi_\kappa\rangle \otimes |e_\kappa\rangle.$$

Число слагаемых K в сумме может быть произвольно большим (его можно отождествить с размерностью пространства

\mathcal{H}_E), но предполагается конечным. Вектора $|\psi_\kappa\rangle$ в общем случае не нормированы и не ортогональны. Статистический оператор исследуемой системы получается при взятии следа по состояниям окружения:

$$\hat{\rho} = Tr_E |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{\kappa=1}^K |\psi_\kappa\rangle\langle\psi_\kappa|.$$

Вероятность p_κ нахождения системы в том или ином состоянии $|\psi_\kappa\rangle$ определяется квадратом нормы этого вектора: $p_\kappa = \langle\psi_\kappa|\psi_\kappa\rangle$.

Применим преобразование Λ к нашей системе, рассматриваемой как подсистема расширенной системы, находящейся в состоянии $|\Psi\rangle$. Имеем

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{\kappa,\kappa'=1}^K |\psi_\kappa\rangle\langle\psi_{\kappa'}| \otimes |e_\kappa\rangle\langle e_{\kappa'}|. \quad (21)$$

Если в этом выражении элемент базиса $|e_\kappa\rangle$ записать как столбец высоты K из нулей на всех позициях кроме κ -ой, на которой стоит единица, то со статистическим оператором (21) можно связать матрицу размера $K \times K$, элементы которой являются операторы в пространстве \mathcal{H}_S :

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle\langle\psi_1| & \cdots & |\psi_1\rangle\langle\psi_K| \\ \vdots & & \vdots \\ |\psi_K\rangle\langle\psi_1| & \cdots & |\psi_K\rangle\langle\psi_K|. \end{pmatrix} \quad (22)$$

При действии Λ соответствующему преобразованию подвергается каждый элемент матрицы (22). В компактной записи имеем:

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| \mapsto \sum_{\kappa,\kappa'=1}^K \Lambda[|\psi_\kappa\rangle\langle\psi_{\kappa'}|] \otimes |e_\kappa\rangle\langle e_{\kappa'}|. \quad (23)$$

Естественно потребовать, чтобы преобразованное состояние расширенной системы из правой части выражения (23) было положительным, т.е. его матричный элемент по отношению к *любому* состоянию $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ должно быть положительным. Представляя $|\Phi\rangle$ в виде

$$|\Phi\rangle = \sum_{\kappa=1}^K |\varphi_\kappa\rangle \otimes |e_\kappa\rangle,$$

условие положительности можно записать в виде

$$\sum_{\kappa, \kappa'=1}^K \langle \varphi_\kappa | \Lambda [|\psi_\kappa\rangle \langle \psi_{\kappa'}|] | \varphi_{\kappa'} \rangle \geq 0. \quad (24)$$

Полезно сравнить это неравенство с выражением (17). Отметим, что фигурирующие в (24) наборы векторов $\{|\psi_\kappa\rangle\}_{\kappa=1}^K$ и $\{|\varphi_\kappa\rangle\}_{\kappa=1}^K$ из \mathcal{H}_S произвольны и неравенство (24) должно иметь место при любом $K = 1, 2, \dots$ Часто именно условие (24) делают определением полной положительности преобразования Λ .

Расписывая выражение (24) в выбранном фиксированном базисе пространства \mathcal{H}_S , получаем

$$\sum_{i, i'} \sum_{j, j'} \sum_{\kappa, \kappa'=1}^K \langle \varphi_\kappa | i \rangle \langle i' | \psi_\kappa \rangle \Lambda_{ii', jj'} \langle j | \varphi_{\kappa'} \rangle \langle \psi_{\kappa'} | j' \rangle \geq 0. \quad (25)$$

Если ввести следующее обозначение:

$$z_{jj'} = \sum_{\kappa=1}^K \langle j | \varphi_\kappa \rangle \langle \psi_\kappa | j' \rangle, \quad (26)$$

то неравенство (25) принимает вид выражения (20). Поэтому, если верно (20), то верно и (25). С другой стороны, для любой

совокупности комплексных чисел z_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) можно подобрать число K и наборы $\{|\psi_\kappa\rangle\}_{\kappa=1}^K$ и $\{|\varphi_\kappa\rangle\}_{\kappa=1}^K$ так, чтобы имело место соотношение (26). Действительно, возьмём $K = n$ (размерность пространства \mathcal{H}_S). Если положить

$$|\psi_j\rangle = |j\rangle \quad j = 1, \dots, n$$

и

$$|\varphi'_j\rangle = \sum_j z_{jj'} |j\rangle,$$

соотношение (26) окажется выполненным. Таким образом, условия (20) и (25) эквивалентны.

Найдём супероператор Λ вполне положительного отображения в виде, не зависящем от выбора базиса в \mathcal{H}_S . Заметим, что эрмитовость суперматрицы $\Lambda_{ii',jj'}$ позволяет поставить и решить задачу о её собственных (супер)векторах и собственных значениях:

$$\sum_{j,j'} \Lambda_{ii',jj'} Z_{jj'}^{(\lambda)} = q_\lambda Z_{ii'}^{(\lambda)}.$$

Здесь целочисленный индекс λ нумерует решения и пробегает значения от 1 до n^2 . Собственные числа q_λ действительны и, вследствие условия (20), неотрицательны. Набор собственных (супер)векторов можно считать полным и ортонормированным, как это имеет место для любой (супер)матрицы:

$$\sum_\lambda Z_{ii'}^{(\lambda)} Z_{jj'}^{(\lambda)*} = \delta_{ij} \delta_{i'j'}; \quad \sum_{i,i'} Z_{ii'}^{(\lambda)} Z_{ii'}^{(\lambda')*} = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (27)$$

Из второго соотношения (27) следует

$$\Lambda_{ii',jj'} = \sum_\lambda q_\lambda Z_{ii'}^{(\lambda)} Z_{jj'}^{(\lambda)*}.$$

Введём операторы

$$\hat{\mathcal{E}}^{(\lambda)} = \sum_{i,i'} |i\rangle \sqrt{q_\lambda} Z_{ii'}^{(\lambda)} \langle i'|.$$

Они позволяют, как легко проверить, выразить супероператор Λ :

$$\Lambda[\hat{\rho}] = \sum_{\lambda} \hat{\mathcal{E}}^{(\lambda)} \hat{\rho} \hat{\mathcal{E}}^{(\lambda)\dagger}. \quad (28)$$

Из первого условия (27) следует

$$\sum_{\lambda} \hat{\mathcal{E}}^{(\lambda)\dagger} \hat{\mathcal{E}}^{(\lambda)} = \hat{1}. \quad (29)$$

Это гарантирует сохранение вероятности – неизменность следа статистического оператора при преобразовании Λ . Такого рода преобразования называют также **операциями**.

С частными случаями характерной структурой (28) (окаймлением статистического оператора) мы уже встречались при рассмотрении одного измерения (10) или их последовательности (12). Запись унитарной эволюции также имеет аналогичную структуру, где множество $\{\hat{\mathcal{E}}^{(\lambda)}\}$ состоит из единственного оператора $\hat{U}(t, t_0)$. Заметим также, что для любого супероператора (28) с условием (29) вполне условие (24) с произвольным K . Поэтому он реализует вполне положительное (т.е. физически реализуемое) отображение самого общего вида.

Естественно задаться вопросом о существовании преобразований, не являющихся вполне положительными, но таких, что оператор $\Lambda[\hat{\rho}]$ положителен для любого статистического оператора $\hat{\rho}$ нашей системы. Такие преобразования действительно существуют. Рассмотрим транспонирование статисти-

ческого оператора системы в выбранном базисе. Преобразование (16) принимает в этом случае вид

$$\varrho_{ij} \mapsto \varrho_{ji}.$$

Это преобразование осуществляет супероператор

$$\Lambda[\hat{\rho}] = \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \hat{\rho} |i\rangle\langle j|, \quad (30)$$

и соответствующая суперматрица такова:

$$\Lambda_{ii',jj'} = \delta_{ij'} \delta_{i'j}. \quad (31)$$

Результат данного преобразования, применённого к статистическому оператору, является также некоторым статистическим оператором той же системы (эрмитовым, положительным, с единичным следом). Однако, это преобразование не вполне положительно. Действительно, правая часть неравенства (20) для суперматрицы (31) принимает вид

$$\sum_{i,j} z_{ij}^* z_{ji}.$$

Эта сумма может оказаться отрицательной как, например, в случае

$$z_{ij}^* = z_{ij} = -z_{ji}.$$

Таким образом, преобразование транспонирования не является "физическим". Оно, тем не менее, играет очень важную роль в квантовой теории информации, точнее, в критерии, позволяющем делать заключение о наличии зацепленности в данном смешанном состоянии составной квантовой системы. Об этом пойдёт речь далее в пятом параграфе, а сейчас рассмотрим некоторые интересные свойства квантовых операций.

3 "Распутывание" квантовой операции. Пример с резонансной флуоресценцией атома.*

Определение квантовой операции даётся выражениями (28) и (29). Последнее условие имеет достаточно прозрачный физический смысл. Это утверждение о единичной вероятности успешного осуществления операции. В общем случае встречаются ситуации (пример такой будет приведён в настоящем параграфе), когда вероятность p осуществления операции зависит от состояния системы:

$$p = \text{Tr} \left(\sum_{\lambda} \hat{\mathcal{E}}^{(\lambda)\dagger} \hat{\mathcal{E}}^{(\lambda)} \hat{\rho} \right).$$

Вернёмся теперь к определению (28). Заметим, что по набору $\{\hat{\mathcal{E}}^{(\lambda)}\}$ квантовая операция Λ определяется однозначно, но не наоборот. Действительно, пусть набор операторов $\hat{\mathcal{E}}$ конечен: $\{\hat{\mathcal{E}}_{\alpha}\}_{\alpha=1}^N$; перейдём к новому набору

$$\hat{\mathcal{E}}_{\alpha}(U) \doteq \sum_{\alpha'=1}^N U_{\alpha\alpha'} \hat{\mathcal{E}}_{\alpha'}, \quad (32)$$

где $U \in \mathcal{SU}(N)$ – произвольная унитарная матрица¹ N -ого порядка. Легко проверить, что

$$\sum_{\alpha=1}^N \hat{\mathcal{E}}_{\alpha} \hat{\rho} \hat{\mathcal{E}}_{\alpha}^{\dagger} = \sum_{\alpha=1}^N \hat{\mathcal{E}}_{\alpha}(U) \hat{\rho} \hat{\mathcal{E}}_{\alpha}(U)^{\dagger}.$$

¹Без ограничения общности определитель матрицы U можно считать единичным.

Вероятность успеха операции также инвариантна относительно замены $\hat{\mathcal{E}}_\alpha$ на $\hat{\mathcal{E}}_\alpha(U)$. Будем считать набор $\{\hat{\mathcal{E}}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ фиксированным (опорным). Тогда любой другой набор $\{\hat{\mathcal{E}}_\alpha(U)\}_{\alpha=1}^N$ будем называть "*распутыванием*" операции Λ . Выбор того или иного распутывания можно реализовать экспериментально, как в рассматриваемом ниже примере с резонансно флуоресцирующим атомом.

Имеющиеся в настоящее время технологии позволяют проводить эксперименты с единичными атомами. Такие эксперименты являются по-существу "инженерией" атомных квантовых состояний. Резонансно флуоресцирующий атом является открытой квантовой системой, обменивающейся с окружением энергией и информацией. Поле для квантовой инженерии в такой ситуации очень широко – можно тем или иным способом перестраивать окружение атома, меняя характер энергоинформационного обмена. Распутывание является одним из вариантов такой перестройки.

Введём необходимые понятия и обозначения. Рассматривается простейшая модель – двухуровневый атом с основным, $|g\rangle$, и возбуждённым, $|e\rangle$, состояниями, взаимодействующий с классическим монохроматическим электромагнитным полем. Мы сразу введём так называемые "одетые" состояния, диагонализующие гамильтониан атома:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \cos\theta|e\rangle + \sin\theta|g\rangle, \\ |2\rangle &= \cos\theta|g\rangle - \sin\theta|e\rangle, \end{aligned} \quad (33)$$

где угол смешения θ связан с частотой Раби Ω и отстройкой Δ частоты светового поля от резонанса с частотой перехода атома соотношением $\tan 2\theta = -\Omega/\Delta$. При этом гамильтониан атома $\hat{H} = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)/2$. Уравнение эволюции

атомной матрицы плотности имеет вид

$$\partial_t \hat{\rho} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \mathcal{D}[\hat{\rho}].$$

За спонтанные переходы отвечает слагаемое, которое мы запишем в так называемой форме Линдблада:

$$\mathcal{D}[\hat{\rho}] = \gamma \hat{L} \hat{\rho} \hat{L}^\dagger - \frac{1}{2} \gamma \{ \hat{L}^\dagger \hat{L}, \hat{\rho} \}_+, \quad (34)$$

где $\hat{L} = |g\rangle\langle e|$, а γ – скорость спонтанного распада возбуждённого состояния; фигурными скобками обозначен антикоммутатор. Первое слагаемое в структуре (34) имеет такой же "сэндвичный" вид как и квантовая операция. Это действительно пример квантовой операции с неединичной вероятностью осуществления

$$Tr(\hat{L}^\dagger \hat{L} \hat{\rho}) = \langle e | \hat{\rho} | e \rangle,$$

совпадающей с вероятностью атома находиться в возбуждённом состоянии. С такой точки зрения параметр γ задаёт частоту применения операции к атому. Структура Линдблада описывает процесс такого непрерывного применения. При этом слагаемые из антикоммутатора обеспечивают сохранение следа матрицы плотности $\hat{\rho}$. Оператор \hat{L} определяет то, что происходит с атомом при спонтанном распаде: он переходит из возбуждённого состояния в основное. Этот переход сопровождается испусканием и хорошо локализованным во времени событием регистрации спонтанного кванта. Естественно, что вопрос о его частоте в такой ситуации ставить некорректно. Единственность вида события эквивалентна единственности оператора \hat{L} , определяющего квантовую операцию.

Будучи выраженным через "одетые" состояния (33), оператор спонтанного распада представим как

$$\hat{L} = \sum_{\alpha} \hat{L}_{\alpha},$$

где $\alpha \in \{-, 0, +\}$ и

$$\hat{L}_0 = \sin \theta \cos \theta \left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| \right),$$

$$\hat{L}_- = -\sin^2 \theta |1\rangle\langle 2|, \quad \hat{L}_+ = \cos^2 \theta |2\rangle\langle 1|.$$

В так называемом секулярном приближении

$$\gamma \ll \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} \quad (35)$$

супероператор спонтанного распада \mathcal{D} (34) может быть заменён на

$$\sum_{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha},$$

где

$$\mathcal{D}_{\alpha}[\hat{\rho}] = \gamma \hat{L}_{\alpha} \hat{\rho} \hat{L}_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2} \gamma \{ \hat{L}_{\alpha}^{\dagger} \hat{L}_{\alpha}, \hat{\rho} \}_+.$$

Появление вместо одного оператора \hat{L} трёх очень важно для дальнейшего.

Для пояснения этого снова обратимся к понятию событий – резких актов изменения состояния окружения, вызванных поглощением спонтанно испущенных фотонов. В случае экспериментально созданного окружения событием является щелчок детектора – фотоотсчёт. При этом в рамках секулярного приближения (35) грубая частотная селекция зарегистрированных спонтанных фотонов оказывается

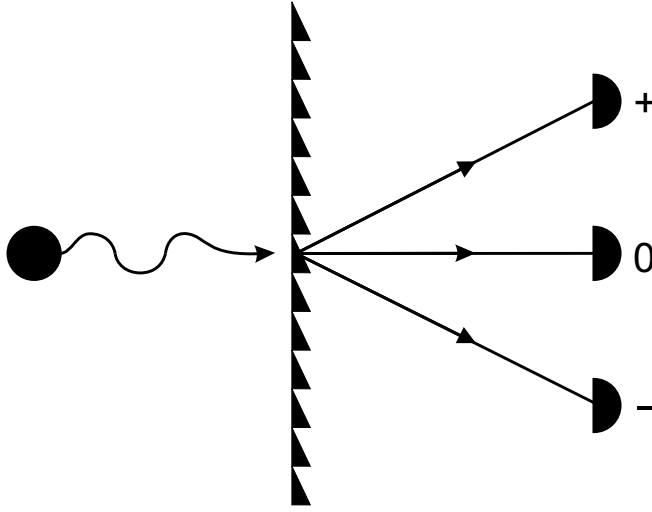


Рис. 1. Условная схема регистрации фотоиспусканий в компоненты триплета резонансной флуоресценции. Спектральный фильтр изображён в виде дифракционной решётки.

уже возможной – супероператоры \mathcal{D}_α отвечают, соответственно, за фотоиспускание в левую ($\alpha = \{-\}$), центральную ($\alpha = \{0\}$) и правую ($\alpha = \{+\}$) компоненты известного триплета Раутиана-Моллоу резонансной флуоресценции (Рис. 1). С операционной точки зрения сильное неравенство (35) позволяет поместить между атомом и окружением систему спектральных фильтров, каналирующую спонтанные фотоны в зависимости от их частоты на один из трёх детекторов, что показано на рисунке. Спектральная ширина фильтров f должна удовлетворять условию

$$\gamma \ll f \ll \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}.$$

Здесь правое неравенство обеспечивает надёжность спектрального селектирования спонтанных фотонов по компонен-

там триплета, а левое гарантирует, что фотоны не будут накапливаться в фильтрах. В противном случае в рассмотрение необходимо ввести поле спонтанно-испущенных фотонов, и неправомерно было бы отождествлять в едином понятии события акт фотоиспускания и регистрации фотона.

Появление трёх операторов Линдблада \hat{L}_α ($\alpha \in \{-, 0, +\}$) и ассоциированных с ними трёх типов событий приводит в свою очередь к появлению возможности разных распутываний операции

$$\sum_{\alpha} \hat{L}_\alpha \hat{\rho} \hat{L}_\alpha^\dagger.$$

Нас будет интересовать состояние $\hat{\rho}(\alpha, U)$, в котором оказывается атом сразу после регистрации события детектором α при распутывании U :

$$\hat{\rho}(\alpha, U) = \frac{\hat{L}_\alpha(U) \hat{\rho}^{(st)} \hat{L}_\alpha^\dagger(U)}{\text{Tr}(\hat{L}_\alpha^\dagger(U) \hat{L}_\alpha(U) \hat{\rho}^{(st)})}.$$

Матрица плотности до регистрации считается стационарной – диагональной в базисе "одетых" состояний с элементами $\rho_{11}^{(st)} = \sin^4 \theta / (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$ и $\rho_{22}^{(st)} = \cos^4 \theta / (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$. Этот выбор соответствует усреднению по всевозможным предшествующим историям атома. Предположим для определённости, что $\cos^2 \theta \geq \sin^2 \theta$. Заметим, что после регистрации события детектором $\alpha = \{-\}$ в условиях тривиального распутывания $U = id$ (т.е. после поглощения кванта из левой компоненты триплета), атом оказывается в состоянии $\hat{\rho}(\{-\}, id) = |1\rangle\langle 1|$. При этом найти атом в возбуждённом состоянии можно с вероятностью

$$\langle e | \hat{\rho}(\{-\}, id) | e \rangle = \cos^2 \theta. \quad (36)$$

Если перед нами стоит цель получить как можно более высокое значение ρ_{ee} при заданном θ , то (36) является предельным

для тривиального распутывания. Оказывается, однако, что организация нетривиального распутывания позволяет после регистрации определённого события "застать" атом в более инвертированном состоянии, чем в случае (36)². Покажем, как это происходит.

Рассмотрим распутывание вида (Рис. 2)

$$\begin{aligned}\hat{L}_+(U) &\equiv \hat{L}_+(\phi) = \cos \phi \hat{L}_+ + \sin \phi \hat{L}_0 \\ \hat{L}_0(U) &\equiv \hat{L}_0(\phi) = -\sin \phi \hat{L}_+ + \cos \phi \hat{L}_0 \\ \hat{L}_-(U) &\equiv \hat{L}_-(\phi) = \hat{L}_-\end{aligned}$$

Такое распутывание можно организовать с помощью подбора коэффициента отражения пластинки из схемы. После реги-

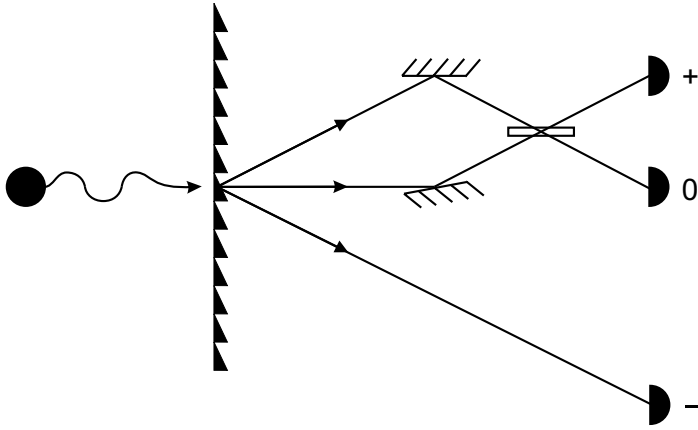


Рис. 2. Распутывание с организацией суперпозиции испусканий в правую и центральную компоненты триплета резонансной флуоресценции.

страции события детектором $\alpha = \{+\}$ атом оказывается в

²Естественно, что за это приходится платить пониженной частотой появления таких событий

состоянии $\hat{\rho}(\{+\}, U) \equiv \hat{\rho}(\{+\}, \phi)$, для которого

$$\begin{aligned} \langle e | \hat{\rho}(\{+\}, \phi) | e \rangle &= \\ &= \frac{(1 - 2 \sin 2\phi) \cos^2 \theta \sin^4 \theta + \sin^2 \phi \cos^4 \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^2 \phi (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Правая часть (37) достигает максимума при $\phi = \phi_{max}$:

$$\begin{aligned} \tan \phi_{max} &= \\ &= \frac{1}{2(2 - \sin^2 2\theta)} \left((\cos 2\theta - 1) \cos 2\theta - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(\cos 2\theta - 1)^2 \cos^2 2\theta + 2 \sin^2 2\theta (2 - \sin^2 2\theta)} \right). \end{aligned}$$

При $\theta = \pm\pi/4$, когда в согласно (36) инверсия при тривиальном распутывании вообще не достижима, мы имеем $\tan \phi_{max} = -1/\sqrt{2}$ и $\langle e | \hat{\rho}(\{+\}, \phi_{max}) | e \rangle = (2 + \sqrt{2})/4 \simeq 0.854$. При увеличении $\cos^2 \theta$ значение $\langle e | \hat{\rho}(\{+\}, \phi_{max}) | e \rangle$ начинает уменьшаться, и выигрыш по сравнению со значением (36) для тривиального распутывания исчезает при $\cos^2 \theta \simeq 0.637$.

4 Экстремальное распутывание квантовой операции.*

Обобщая результаты предыдущего параграфа на ситуацию, мы можем считать, что набору $\{\hat{\mathcal{E}}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, осуществляющему опорное распутывание квантовой операции Λ , соответствует набор из того же числа опорных событий с "именами" $\alpha_1 = 1, \dots, \alpha_N = N$. Любому другому распутыванию (32) соответствует набор событий с теми же именами, но являющимися в некотором смысле суперпозиционными по отношению

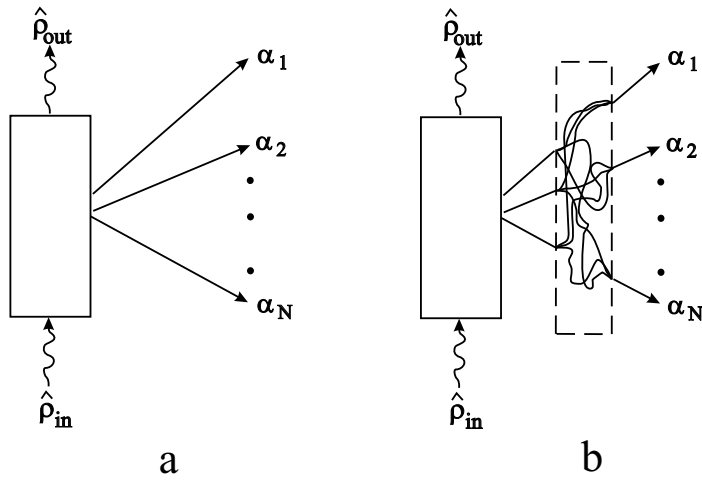


Рис. 3. а) – действие квантовой операции при опорном распутывании; $\hat{\rho}_{in}$ – состояние системы до операции, $\hat{\rho}_{out}$ – усреднённое состояния после операции. В окружение поступает информация о свершении того или иного события. б) – та же самая операция при распутывании, отличающемся от опорного. Область с пунктирной границей соответствует системе с делителями световых пучков из примера с резонансной флуоресценцией атома.

к событиям из опорного набора (Рис. 3). Как показано выше, такую суперпозицию нетрудно организовать, если идентификаторами событий служат кванты электромагнитного поля. При осуществлении операции Λ в рамках определённого распутывания U реализуется то или иное событие α с вероятно-

стью

$$\begin{aligned} P(\alpha; U) &= Tr \left(\hat{\mathcal{E}}_\alpha(U) \hat{\rho} \hat{\mathcal{E}}_\alpha^\dagger(U) \right) = \\ &= \sum_{\beta, \beta'=1}^N M_{\beta\beta'} U_{\alpha\beta'} \bar{U}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$M_{\beta\beta'} = Tr \left(\hat{\mathcal{E}}_\beta^\dagger \hat{\mathcal{E}}_{\beta'} \hat{\rho} \right) \quad (39)$$

– матрица с единичным следом, отвечающая некоторой эрмитовой положительно-определённой квадратичной форме. Черта над символом в (38) означает комплексное сопряжение. С фиксацией события (т.е. при осуществлении операции) в окружении записывается объём информации

$$S(U) = - \sum_{\alpha} P(\alpha; U) \ln P(\alpha; U).$$

Можно сказать, что $S(U)$ есть также средний объём информации, необходимой для описания конечного состояния окружающего мира после регистрации одного конкретного события. Нашей задачей в настоящем параграфе является нахождение распутывания, т.е. матрицы $U^{(ex)}$, для которой $S(U)$ *экстремально*. Одновременно мы покажем, что найденный экстремум является минимумом. Заметим, что в частном случае, когда операция представляет собой идеальное неселективное измерение некоторой квантовомеханической наблюдаемой (см. первый параграф), набор $\{\hat{\mathcal{E}}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ сводится к совокупности ортогональных проекторов, реализующих некоторое разложение единичного оператора. Матрица M при этом всегда диагональна, как следует из (39), и ниже-следующий поиск экстремального распутывания становится тривиальным и не зависящим от состояния окружения.

Для нахождения экстремума воспользуемся методом неопределённых множителей Лагранжа, фиксируя условие унитарности $U U^* = 1$. С пока неопределённой матрицей коэффициентов Лагранжа должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial \bar{U}_{\alpha\beta}} \left(S(U) + \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \beta'} \lambda_{\alpha_1 \alpha_2} \bar{U}_{\alpha_1 \beta'} U_{\alpha_2 \beta'} \right) \Big|_{U=U^{(ex)}} = 0, \quad (40)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} [\ln P(\alpha, U^{(ex)}) + 1] \sum_{\beta'} M_{\beta\beta'} U_{\alpha\beta'}^{(ex)} &= \\ &= \sum_{\alpha'} \lambda_{\alpha\alpha'} U_{\alpha'\beta}^{(ex)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Заметим, что в силу унитарности матрицы U мы можем без изменения варьировать величины в (40) всегда произвести замену

$$\lambda_{\alpha\alpha'} \rightarrow \delta_{\alpha\alpha'} \lambda_{\alpha\alpha}.$$

Если эту замену осуществить в выражении (41), то оно сразу превращается в следующее условие на $U^{(ex)}$: *строки матрицы $U^{(ex)}$ оказываются собственными векторами матрицы M* . Одновременно конкретизируются величины $\lambda_{\alpha\alpha}$. Полученный результат можно записать так же следующим образом:

$$M_{\beta\beta'} = \sum_{\alpha'} \mu_{\alpha'} U_{\alpha'\beta}^{(ex)} \bar{U}_{\alpha'\beta'}^{(ex)}.$$

Выражение (38) можно теперь представить в виде

$$P(\alpha; U) = \sum_{\alpha'} (U \cdot U^{(ex)*})_{\alpha\alpha'} \mu_{\alpha'} (U^{(ex)} \cdot U^*)_{\alpha'\alpha},$$

и μ_{α} оказывается вероятностью зафиксировать событие α при экстремальном распутывании.

Демонстрация того, что найденный экстремум является минимумом, элементарна. Для этого рассмотрим билинейный по dU и dU^* член в разложении разности

$$\delta S(U^{(ex)}) = S(U^{(ex)} + dU) - S(U^{(ex)}). \quad (42)$$

Предварительно заметим, что из условия унитарности следует

$$\sum_{\beta} \left(U_{\alpha\beta}^{(ex)} d\bar{U}_{\alpha'\beta} + dU_{\alpha\beta} \bar{U}_{\alpha'\beta}^{(ex)} + dU_{\alpha\beta} d\bar{U}_{\alpha'\beta} \right) = 0 \quad \forall \alpha, \alpha'. \quad (43)$$

С помощью этого соотношения билинейная по dU и dU^* вариация вероятности представима в виде

$$\begin{aligned} \delta P(\alpha; U^{(ex)}) &= \\ &= \sum_{\alpha'} (\mu_{\alpha'} - \mu_{\alpha}) K_{\alpha'\alpha}. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь

$$K_{\alpha'\alpha} = \sum_{\beta, \beta'} \bar{U}_{\alpha'\beta'}^{(ex)} U_{\alpha'\beta}^{(ex)} dU_{\alpha\beta'} d\bar{U}_{\alpha\beta}.$$

Нетрудно убедиться, что в силу (43) $K_{\alpha'\alpha} = K_{\alpha\alpha'}$. Кроме того очевидно, что $K_{\alpha'\alpha} \geq 0 \quad \forall \alpha, \alpha'$. С помощью выражения (44) вариация энтропии $\delta S(U^{(ex)})$ представима в виде

$$\delta S(U^{(ex)}) = - \sum_{\alpha, \alpha'} \ln \mu_{\alpha} (\mu_{\alpha'} - \mu_{\alpha}) K_{\alpha'\alpha}.$$

Путём перестановки $\alpha \leftrightarrow \alpha'$ и взятия полусуммы исходного и полученного выражений, имеем результат

$$\delta S(U^{(ex)}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha'} \ln \frac{\mu_{\alpha'}}{\mu_{\alpha}} (\mu_{\alpha'} - \mu_{\alpha}) K_{\alpha'\alpha},$$

положительность которого очевидна. Таким образом, доказана минимальность информации, поступающей в окружение системы при экстремальном распутывании.

5 Критерий зацепленности Переса-Городецки

Как было показано в предыдущем параграфе, условие полной положительности физически реализуемых преобразований заключается в сохранении положительности при преобразовании (23) состояния *расширенной* системы. В это расширение исследуемая система входит как подсистема. Исходное состояние расширенной системы при этом предполагается чистым и содержит квантовые корреляции (зацепленность) между исследуемой системой и некоторым её окружением. Использование преобразования без свойства полной положительности не гарантирует сохранения положительности зацепленного состояния расширенной системы. Следовательно, проверка результатов такого преобразования на предмет их положительности позволяет "почувствовать" зацепленность, присутствующую в исходном состоянии. Эта задача весьма актуальна, поскольку зацепленность образует важный ресурс для процессов обработки и передачи квантовой информации, т.е. информации, записанной в состояниях различных квантовых систем. Следует иметь ввиду, что обсуждаемый далее метод обнаружения зацепленности является исключительно теоретическим инструментом, поскольку использует "нефизические" преобразования без свойства полной положительности. Он ни коим образом не может служить моделью действия "детектора зацепленности" и предполагает работу с карандашом, бумагой и, возможно, ком-

пьютером.

Проверка зацепленности чистого состояния $|\Psi_{AB}\rangle$ объединения подсистем A и B не представляет проблемы. Действительно, состояние $|\Psi_{AB}\rangle$ по определению зацепленно, если оно не факторизуется, т.е. если

$$|\Psi_{AB}\rangle \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle.$$

Проверка этого факта состоит в вычислении статистического оператора одной из подсистем, например, подсистемы A :

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B |\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}|.$$

В случае факторизуемости состояния $|\Psi_{AB}\rangle$ и только в этом случае оператор $\hat{\rho}_A$ соответствует чистому состоянию:

$$\hat{\rho}_A = |\psi_A\rangle \langle \psi_A|. \quad (45)$$

Поэтому проверка зацепленности состояния $|\Psi_{AB}\rangle$ сводится к проверке факта смешанности состояния $\hat{\rho}_A$. А это задача не сложная, хотя одного взгляда на структуру оператора $\hat{\rho}_A$ может порой оказаться мало для вердикта о представимости или непредставимости его в виде (45). Действительно, смешанность состояния системы A означает, что при диагонализации оператора $\hat{\rho}_A$,

$$\hat{\rho}_A = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} |\psi_A^{(\alpha)}\rangle \langle \psi_A^{(\alpha)}|, \quad (46)$$

возникает более чем одно слагаемое. Здесь ρ_{α} имеет смысл вероятности обнаружить систему A в состоянии $|\psi_A^{(\alpha)}\rangle$, принадлежащем некоторому полному ортонормированному набору:

$$\hat{1}_A = \sum_{\alpha} |\psi_A^{(\alpha)}\rangle \langle \psi_A^{(\alpha)}|; \quad \langle \psi_A^{(\alpha)} | \psi_A^{(\alpha')} \rangle = \delta_{\alpha\alpha'}.$$

Последнее свойство позволяет легко вычислить квадрат статистического оператора:

$$\hat{\varrho}_A^2 = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}^2 |\psi_A^{(\alpha)}\rangle \langle \psi_A^{(\alpha)}|. \quad (47)$$

Если сумма в (46) содержит более одного слагаемого, правая часть (47) обязательно будет отличаться от $\hat{\varrho}_A$. Следовательно,

$$\left(\text{Состояние } |\Psi_{AB}\rangle \text{ зацеплено} \right) \Leftrightarrow \left(\hat{\varrho}_A^2 \neq \hat{\varrho}_A \right).$$

Гораздо более сложной задачей, не решённой в полной мере до настоящего времени, является обнаружение зацепленности смешанного состояния $\hat{\varrho}_{AB}$ объединённой системы. Удобнее работать со свойством, противоположным зацепленности – установить сепарабельность (незацепленность) или несепарабельность (зацепленность), т.е. возможность или невозможность представить $\hat{\varrho}_{AB}$ в виде, обсуждавшемся ещё в первой части (§4):

$$\hat{\varrho}_{AB} = \sum_{\kappa} p(\kappa) \hat{\varrho}_A^{(\kappa)} \otimes \hat{\varrho}_B^{(\kappa)}. \quad (48)$$

Здесь сумма описывает смесь ситуаций, когда системы A и B не скоррелированы и находятся в некоторых состояниях $\hat{\varrho}_A^{(\kappa)}$ и $\hat{\varrho}_B^{(\kappa)}$. Корреляции в сепарабельном состоянии (48) возникают как следствие *классического* усреднения по вероятностями $p(\kappa)$ реализации различных ситуаций³.

³Сепарабельность (факторизуемость) чистого состояния $|\Psi_{AB}\rangle$ естественным образом также подпадает под приведённое общее определение (48). В этом случае $\hat{\varrho}_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}| = |\psi_A\rangle \langle \psi_A| \otimes |\psi_B\rangle \langle \psi_B|$, т.е. сумма в (48) сводится к единственному слагаемому.

Заметим, что определение сепарабельного состояния представляет собой позитивное утверждение о возможности представить $\hat{\rho}_{AB}$ в виде (48). Соответственно, определение зацепленности, как невозможности найти такое представление, негативно. Это обстоятельство позволяет подойти к идее Ашера Переса⁴ (Asher Peres, фото на рис. 4) необходимого критерия сепарабельности или, что эквивалентно, достаточного критерия зацепленности.



Рис. 4. Ашер Перес

Пусть мы имеем некоторое (смешанное) состояние $\hat{\rho}_{AB}$

⁴1934-2005. Израильский физик-теоретик. Родился в Белью (Beaulieu-Dordogne) на юге Франции. Образование получил в Технионе. Ученик Натана Розена – одного из известной тройки ЭПР.

подсистем A и B с конечномерными пространствами состояний \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B ($\dim \mathcal{H}_A = d_A$, $\dim \mathcal{H}_B = d_B$). Выбрав в этих пространствах некоторые ортонормированные базисы $\{|\psi_{Ai}\rangle\}_{i=1}^{d_A}$ и $\{|\psi_{B\mu}\rangle\}_{\mu=1}^{d_B}$, мы можем представить статистический оператор $\hat{\rho}_{AB}$ в виде

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_{i,j=1}^{d_A} \sum_{\mu,\nu=1}^{d_B} \rho_{ij,\mu\nu} |\psi_{Ai}\rangle \langle \psi_{Aj}| \otimes |\psi_{B\mu}\rangle \langle \psi_{B\nu}|.$$

Если это состояние сепарабельно, т.е. представимо в виде (48), оно должно благополучно выдержать воздействие на подсистему A преобразования Ξ , сохраняющим след и эрмитовость, являющимся положительным, но не вполне положительным:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AB} \mapsto \sum_{i,j} \sum_{\mu,\nu} \rho_{ij,\mu\nu} \Xi[|\psi_{Ai}\rangle \langle \psi_{Aj}|] \otimes |\psi_{B\mu}\rangle \langle \psi_{B\nu}| &= \quad (49) \\ &= \sum_{\kappa} p(\kappa) \Xi[\hat{\rho}_A^{(\kappa)}] \otimes \hat{\rho}_B^{(\kappa)}. \end{aligned}$$

"Благополучно выдержать" означает остаться квантовым состоянием составной системы, т.е. иметь единичный след, быть эрмитовым и *положительным*. Из последней строки в (49) видно, что для сепарабельных состояний это действительно будет так, поскольку $\Xi[\hat{\rho}_A^{(\kappa)}]$ являются некоторыми статистическими операторами подсистемы A и, следовательно, вторая строка (49) в свою очередь есть некоторое легитимное состояние (сепарабельное) составной системы. Этот факт является *необходимым* следствием сепарабельности $\hat{\rho}_{AB}$. Поэтому, если после преобразования окажется утрачена положительность, можно утверждать, что состояние $\hat{\rho}_{AB}$ было зацепленным.

В предыдущем параграфе был указан пример не вполне положительного отображения – транспонирование. Представим результат этого преобразования в форме, аналогичной (30):

$$\hat{\varrho}_{AB} \mapsto \hat{\varrho}_{AB}^{T_A(\psi)} \doteq \sum_{i,j} (|\psi_{Ai}\rangle\langle\psi_{Aj}| \otimes \hat{1}_B) \hat{\varrho}_{AB} (|\psi_{Ai}\rangle\langle\psi_{Aj}| \otimes \hat{1}_B)$$

Транспонирование здесь осуществлено в базисе $\{|\psi_{Ai}\rangle\}_{i=1}^{d_A}$, что отмечено в символе транспонирования $T_A(\psi)$. Убедимся, что выбор базиса не влияет на результат: *если оператор $\hat{\varrho}_{AB}^{T_A(\psi)}$ положителен, то также положительным окажется оператор $\hat{\varrho}_{AB}^{T_A(\phi)}$, где $\{|\phi_{Ai}\rangle\}_{i=1}^{d_A}$ – любой другой ортонормированный базис в \mathcal{H}_A .*

Доказательство: положительность оператора $\hat{\varrho}_{AB}^{T_A(\psi)}$ означает, что

$$\langle\Phi_{AB}|\hat{\varrho}_{AB}^{T_A(\psi)}|\Phi_{AB}\rangle \geq 0 \quad (50)$$

для любого вектора $|\Phi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Можно разложить $|\Phi_{AB}\rangle$ по произведению выбранных выше базисов:

$$|\Phi_{AB}\rangle = \sum_{i,\mu} f_{i\mu} |\psi_{Ai}\rangle \otimes |\psi_{B\mu}\rangle.$$

Тогда неравенство (50) можно записать в виде

$$\sum_{i,j} \sum_{\mu,\nu} f_{i\mu}^* (\langle\psi_{Aj}|\otimes\langle\psi_{B\mu}|) \hat{\varrho}_{AB} (|\psi_{Ai}\rangle \otimes |\psi_{B\nu}\rangle) f_{j\nu} \geq 0. \quad (51)$$

Важно, что это неравенство верно для *всех* наборов комплексных чисел $\{f_{i\mu}\}$. Определим теперь знак величины $\langle\Phi_{AB}|\hat{\varrho}_{AB}^{T_A(\phi)}|\Phi_{AB}\rangle$. Заметим, что состояние $|\Phi_{AB}\rangle$ можно разложить, используя базис $\{|\phi_{Ai}\rangle\}$ вместо базиса $\{|\psi_{Ai}\rangle\}$:

$$|\Phi_{AB}\rangle = \sum_{i,\mu} \tilde{f}_{i\mu} |\phi_{Ai}\rangle \otimes |\psi_{B\mu}\rangle.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_{AB} | \hat{\varrho}_{AB}^{T_A(\phi)} | \Phi_{AB} \rangle = \\ & = \sum_{i',j'} \sum_{\mu,\nu} \tilde{f}_{i'\mu}^* (\langle \phi_{Aj'} | \otimes \langle \psi_{B\mu} |) \hat{\varrho}_{AB} (| \phi_{Ai'} \rangle \otimes | \psi_{B\nu} \rangle) \tilde{f}_{j'\nu}. \end{aligned}$$

Перейдём в этом выражении к базису $\{ | \psi_{Ai} \rangle \}$:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{AB} | \hat{\varrho}_{AB}^{T_A(\phi)} | \Phi_{AB} \rangle & = \sum_{i,j} \sum_{i',j'} \sum_{\mu,\nu} \tilde{f}_{i'\mu}^* \langle \phi_{Aj'} | \psi_{Aj} \rangle \times \\ & \times (\langle \psi_{Aj} | \otimes \langle \psi_{B\mu} |) \hat{\varrho}_{AB} (| \psi_{Ai} \rangle \otimes | \psi_{B\nu} \rangle) \langle \psi_{Ai} | \phi_{Ai'} \rangle \tilde{f}_{j'\nu} \quad (52) \end{aligned}$$

и введём величины

$$f'_{i\mu} \doteq \sum_{i'} \tilde{f}_{i'\mu} \langle \phi_{Ai'} | \psi_{Ai} \rangle.$$

В результате правая часть равенства (52) примет вид, отличающийся от левой части (51) появлением штрихов у коэффициентов f . Упомянутая свобода выбора этих коэффициентов позволяет сделать заключение о положительности величины $\langle \Phi_{AB} | \hat{\varrho}_{AB}^{T_A(\phi)} | \Phi_{AB} \rangle$ и, как следствие, о положительности оператора $\hat{\varrho}_{AB}^{T_A(\phi)}$. Доказательство завершено.

Итогом сказанного выше служит следующая краткая форма предложенного А.Пересом *достаточного* критерия зацепленности смешанного состояния двух подсистем:

$$\begin{aligned} & \text{Оператор } \hat{\varrho}_{AB}^{T_A} \text{ неположителен} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \text{Состояние } \hat{\varrho}_{AB} \text{ зацеплено.} \quad (53) \end{aligned}$$

Удобство критерия Переса заключается в простоте проверки – поиске отрицательных собственных значений оператора $\hat{\varrho}_{AB}^{T_A}$ (здесь, как и в (53), ввиду доказанного выше, излишне

уточнять базис, в котором осуществляется транспонирование). Желательно было бы иметь столь же простой *необходимый* критерий зацепленности смешанного состояния $\hat{\rho}_{AB}$. Как было показано членами польского семейства Городецки (Horodecki), для размерностей $d_A \times d_B$, равных 2×2 и 2×3 , отсутствие положительности оператора $\hat{\rho}_{AB}^{T_A}$ является также *необходимым* условием зацепленности состояния $\hat{\rho}_{AB}$, т.е. стрелку импликации в критерий Переса (53) можно в этих случаях направить в обе стороны. Значительная математическая сложность соответствующих аргументов не позволяет нам изложить их в общей форме. В следующем параграфе будет продемонстрирована необходимость и достаточность критерия Переса-Городеки для частного, но важного семейства состояний двух подсистем с $d_A = d_B = 2$.

В оставшейся части настоящего параграфа, оставаясь в рамках введённых выше понятий и обозначений, мы получим интересный результат – покажем, что любое зацепленное состояние $\hat{\rho}_{AB}$ может быть представлено в виде (48), если допустить возможность отрицательных весовых коэффициентов p_k . Достаточно доказать это для случая чистого зацепленного состояния $|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|$. Действительно, любое зацепленное состояние $\hat{\rho}_{AB}$ есть смесь чистых состояний, среди которых обязательно должно быть хотя бы одно зацепленное. Имея вектор $|\Psi_{AB}\rangle$, выберем фигурировавший выше ортонормированный базис $\{|\psi_{Ai}\rangle\}_{i=1}^{d_A}$ так, чтобы в нём статистический оператор $\hat{\rho}_A$ оказался диагональным:

$$\hat{\rho}_A = Tr |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| = \sum_i \rho_i |\psi_{Ai}\rangle\langle\psi_{Ai}|. \quad (54)$$

Если число вероятностей ρ_i (ранг оператора $\hat{\rho}_A$) меньше, чем d_A , элементы базиса, отвечающие номерам i с $\rho_i = 0$ могут быть выбраны разными способами. Используем этот базис

для разложения состояния $|\Psi_{AB}\rangle$:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_i \sqrt{\rho_i} |\psi_{Ai}\rangle \otimes |\psi_{Bi}\rangle. \quad (55)$$

Фактически это выражение представляет собой определение векторов $|\psi_{Bi}\rangle \in \mathcal{H}_B$, как тензорных сомножителей при $\sqrt{\rho_i} |\psi_{Ai}\rangle$. Эти вектора оказываются ортонормированными (и их всегда можно дополнить до базиса в \mathcal{H}_B). Действительно, только в этом случае вычисление следа $Tr |\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}|$ даст правую часть выражения (54). Столь удобное представление (55) называют *представлением Шмидта*. Оно широко используется в квантовой теории информации. Из представления Шмидта следует, в частности, что статистический оператор подсистемы B диагонален в базисе $\{|\psi_{Bi}\rangle\}_{i=1}^{d_B}$ и представляет собой смесь с теми же весами, что и состояние $\hat{\rho}_A$ из (54):

$$\hat{\rho}_B = Tr |\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}| = \sum_i \rho_i |\psi_{Bi}\rangle \langle \psi_{Bi}|.$$

Пользуясь представлением Шмидта, получаем

$$\begin{aligned} |\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}| &= \sum_i \rho_i |\psi_{Ai}\rangle \langle \psi_{Ai}| \otimes |\psi_{Bi}\rangle \langle \psi_{Bi}| + \\ &+ \sum_{i \neq j} \sqrt{\rho_i \rho_j} |\psi_{Ai}\rangle \langle \psi_{Aj}| \otimes |\psi_{Bi}\rangle \langle \psi_{Bj}|. \end{aligned} \quad (56)$$

Для $i \neq j$ введём новые состояния (индекс, обозначающий подсистему, опущен для краткости):

$$|\psi_{ij}(k)\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_i\rangle + i^k |\psi_j\rangle \right).$$

Здесь степень k пробегает целочисленные значения от 0 до 3. Нетрудно проверить справедливость следующих равенств:

$$|\psi_{ij}(0)\rangle\langle\psi_{ij}(0)| - |\psi_{ij}(2)\rangle\langle\psi_{ij}(2)| = |\psi_j\rangle\langle\psi_i| + |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \quad (57)$$

и

$$|\psi_{ij}(1)\rangle\langle\psi_{ij}(1)| - |\psi_{ij}(3)\rangle\langle\psi_{ij}(3)| = \imath|\psi_j\rangle\langle\psi_i| - \imath|\psi_i\rangle\langle\psi_j|. \quad (58)$$

Пользуясь этими соотношениями, вычислим комбинацию тензорных произведений состояний из левых частей (57) и (58):

$$\begin{aligned} & \left(|\psi_{Aij}(0)\rangle\langle\psi_{Aij}(0)| - |\psi_{Aij}(2)\rangle\langle\psi_{Aij}(2)| \right) \otimes \left(|\psi_{Bij}(0)\rangle\langle\psi_{Bij}(0)| - \right. \\ & \quad \left. - |\psi_{Bij}(2)\rangle\langle\psi_{Bij}(2)| \right) - \left(|\psi_{Aij}(1)\rangle\langle\psi_{Aij}(1)| - \right. \\ & \quad \left. - |\psi_{Aij}(3)\rangle\langle\psi_{Aij}(3)| \right) \otimes \left(|\psi_{Bij}(1)\rangle\langle\psi_{Bij}(1)| - |\psi_{Bij}(3)\rangle\langle\psi_{Bij}(3)| \right) \\ & = 2|\psi_{Ai}\rangle\langle\psi_{Aj}| \otimes |\psi_{Bi}\rangle\langle\psi_{Bj}| + 2|\psi_{Aj}\rangle\langle\psi_{Ai}| \otimes |\psi_{Bj}\rangle\langle\psi_{Bi}|. \end{aligned}$$

Замечаем, что правая часть последнего равенства представляет собой симметризованную по перестановке ij структуру из последней строки (56). Пользуясь этим обстоятельством, получаем следующее выражение для исходного статистического оператора:

$$\begin{aligned} |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| &= \sum_i \rho_i |\psi_{Ai}\rangle\langle\psi_{Ai}| \otimes |\psi_{Bi}\rangle\langle\psi_{Bi}| + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} \sqrt{\rho_i \rho_j} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \left(|\psi_{Aij}(k)\rangle\langle\psi_{Aij}(k)| \otimes |\psi_{Bij}(k)\rangle\langle\psi_{Bij}(k)| - \right. \end{aligned}$$

$$-|\psi_{Aij}(k)\rangle\langle\psi_{Aij}(k)| \otimes |\psi_{Bij}(k \oplus 2)\rangle\langle\psi_{Bij}(k \oplus 2)| \Big).$$

Здесь символом \oplus обозначено суммирование по модулю 4. Мы действительно получили представление зацепленного состояния $|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|$ в виде (48), но с участием отрицательных "вероятностей". Зацепленность представляет собой, пожалуй, наиболее интригующий феномен квантовой механики. Описание её с помощью отрицательных вероятностей указывает ещё одну точку зрения для постижения странностей квантового мира.

6 Зацепленность в состояниях Вернера

Состояние Вернера пары систем с двухмерными гильбертовыми пространствами ($d_A = d_B = 2$) представляет собой смесь синглетного состояния $|\Psi_0\rangle$ (для случая частиц со спином $1/2$; для поляризаций пары световых квантов это состояние называют скалярным бифотоном) и максимально неупорядоченного состояния, когда статистические операторы каждой из подсистем равны $\hat{1}/2$:

$$\hat{\rho}_W(p) = \frac{1-p}{4} \hat{1} \otimes \hat{1} + p |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|. \quad (59)$$

Параметром состояния Вернера служит вероятность p – вес синглетного состояния в смеси. При $p = 1$ состояние Вернера совпадает с синглетным, $\hat{\rho}_W(1) = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$, и, естественно, является зацепленным. При $p = 0$ состояние (59) максимально неупорядочено ($\hat{\rho}_W(0) = \hat{1} \otimes \hat{1}/4$) и сепарабельно. Можно ожидать, что некоторое значение p_0 из $(0, 1)$ является погра-

ничным между множествами сепарабельных и зацепленных состояний.

Если не знать о критерии Переса-Городецки, в качестве "детектора" зацепленности можно использовать неравенство Белла. Действительно, как было показано в 1-ой части, сепарабельные состояния не нарушают неравенства Белла, поэтому его нарушение есть достаточное условие зацепленности состояния. Если обратиться к состояниям Вернера (59), можно заметить, что первое слагаемое в правой части вообще не даёт вклада в среднюю величину оператора Белла \hat{S}_{Bell} (выражение (13) из части 1). Поэтому

$$\langle \hat{S}_{Bell} \rangle_{\hat{\rho}_W(p)} = p \langle \Psi_0 | \hat{S}_{Bell} | \Psi_0 \rangle = \sqrt{2}p.$$

Получается, что при $p > 1/\sqrt{2}$ состояния Вернера зацеплены. У нас нет, однако, оснований полагать, что при всех $0 \leq p \leq 1/\sqrt{2}$ состояния (59) сепарабельны.

Обратимся критерию Переса-Городецки (53). Выберем некоторые ортонормированные базисы в пространствах \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B , которые в случае спинов отвечают их проекциям $\pm 1/2$ вдоль некоторого направления. Это позволит перейти к матричному представлению состояния Вернера. Выполним операцию транспонирования для подсистемы A (результат транспонирования для подсистемы B даст тот же самый результат):

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_W^{TA}(p) = & \frac{1-p}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ & p \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Поскольку предстоит исследовать положительность оператора $\hat{\varrho}_W^{TA}(p)$, его удобно записать в виде матрицы 4×4 :

$$\hat{\varrho}_W^{TA}(p) = \begin{pmatrix} \frac{1-p}{4} & 0 & 0 & -\frac{p}{2} \\ 0 & \frac{1+p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+p}{4} & 0 \\ -\frac{p}{2} & 0 & 0 & \frac{1-p}{4} \end{pmatrix}$$

Имея эту матрицу, легко вычислить левую часть в уравнении

$$\text{Det} \left(\hat{\varrho}_W^{TA}(p) - x \cdot \hat{1}_{\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B} \right) = 0 \quad (60)$$

для собственных значений оператора $\hat{\varrho}_W^{TA}(p)$. Из (60) получаем

$$\left(\frac{1+p}{4} - x \right)^3 \left(\frac{1-3p}{4} - x \right) = 0.$$

При $p > 1/3$ это уравнение имеет отрицательные решения и, следовательно, $\hat{\varrho}_W(p)$ оказывается зацепленным состоянием. Следует заметить, что критерий Переса оказывается более точным детектором зацепленности, чем неравенство Белла, т.к. состояния Вернера $\hat{\varrho}_W(p)$ при $1/3 < p \leq 1/\sqrt{2}$ не нарушают неравенства Белла, хотя являются зацепленными. Возникает тот же вопрос, что и выше при обнаружении границы нарушения неравенства Белла: можем ли мы утверждать, что при $p \leq 1/3$ состояния Вернера сепарабельны и нет ещё более точного критерия зацепленности? Покажем, что это так. Продемонстрируем сепарабельность состояния $\hat{\varrho}_W(1/3)$. С этой целью в пространстве каждой подсистемы

выберем три ортонормированных базиса, для обозначения которых будем пользоваться спиновой моделью подсистем. Первый базис

$$\{|z\rangle, |-z\rangle\}$$

отвечает проекциям $\pm 1/2$ спинов частиц вдоль оси z . Второй

$$\{|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z\rangle + |-z\rangle), |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z\rangle - |-z\rangle)\}$$

и третий

$$\{|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z\rangle + i|-z\rangle), |-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z\rangle - i|-z\rangle)\}$$

базисы имеют аналогичный смысл для осей x и y . Несложно проверить, что состояние $\hat{\rho}_W(1/3)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_W(1/3) = & \frac{1}{6} (\hat{P}_x \otimes \hat{P}_{-x} + \hat{P}_{-x} \otimes \hat{P}_x + \hat{P}_y \otimes \hat{P}_{-y} + \\ & + \hat{P}_{-y} \otimes \hat{P}_y + \hat{P}_z \otimes \hat{P}_{-z} + \hat{P}_{-z} \otimes \hat{P}_z), \end{aligned}$$

где фигурируют проекторы на соответствующие состояния. Правая часть данного выражения есть сепарабельное квантовое состояние. Пусть теперь $p \leq 1/3$. Имеем

$$\hat{\rho}_W(p) = 3p \hat{\rho}_W(1/3) + \frac{1-3p}{4} \hat{1} \otimes \hat{1}.$$

Это смесь (с весами $3p$ и $1-3p$) двух сепарабельных состояний и поэтому тоже сепарабельно.

В итоге мы убедились, что критерий зацепленности Переса-Городецки действительно является не только достаточным, но и необходимым на множестве состояний Вернера. Значение $p_0 = 1/3$ оказывается границей между сепарабельными и зацепленными состояниями.

7 Согласованные (неинтерферирующие) квантовые истории

Хорошей иллюстрацией идеи согласованных квантовых историй может служить знакомый всем физикам опыт Юнга с рождением частиц (например, фотонов) стационарным источником и их прохождением через пару щелей в непрозрачном экране (рис. 5). На другом экране регистрируются прошедшие через щели частицы. Места регистрации частиц могут при определённых условиях группироваться и образовывать интерференционную картину, демонстрируя явление, называемое в учебниках по квантовой механике корпускулярно-волновым дуализмом. Обнаружить интерференционную картину можно с помощью одного детектора, помещая его поочерёдно в разные точки экрана и определяя среднюю частоту регистраций. Известно также, что присутствие в эксперименте устройств, определяющих номер щели, через которую проходит очередная частица (для этого достаточно иметь подобное устройство возле одной из щелей), полностью разрушает интерференционную картину. Мы имеем ситуацию с которой уже встречались в первой части: рождение новой информации, проявляющейся как возникновение корреляции между путём частицы и состоянием прибора-определителя щели, разрушает когерентность между альтернативами прохода частицы через разные щели. Вместо нескольких максимумов и минимумов интерференционной картины имеет место плавный и широкий профиль распределения с одним максимумом.

Появление прибора-определителя щели может быть легко обнаружено, если детектор частиц находится, например, в точке x – в минимуме интерференционной картины. Дей-

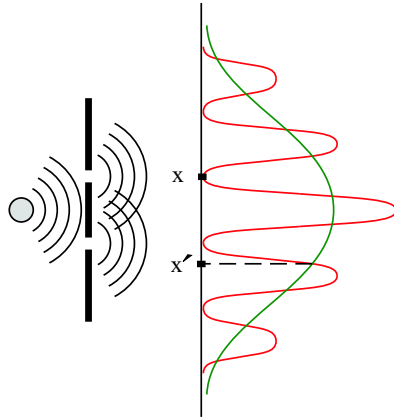


Рис. 5. Опыт Т.Юнга с двумя щелями. Показано два варианта освещённости экрана – с максимумами и минимумами интерференционной картины и без интерференции. Детектор помещается в точки x и x' . Дальнейшие пояснения в тексте.

ствительно, резкое возрастание частоты регистраций частиц следует интерпретировать как вызванное прибором разрушение интерференционной картины.

Предположим теперь, что детектор изначально был помещён в точку x' , где, как видно из рисунка, совпадают вероятности регистрации частиц при наличии интерференционной структуры и при её отсутствии. Ясно, что факт появления определителя пути не может быть обнаружен на основе анализа работы данного детектора. Разрушение когерентности, приносимое определителем пути, оказывается ненаблюдаемым. Это обстоятельство можно трактовать как изначальное отсутствие когерентных эффектов для *данного* положения детектора, что позволяет, не выходя за рамки "квантовой корректности", рассуждать о процессе распространения частиц от источника к детектору в точке x' в терминах их

реального прохода через ту или иную щель⁵. При этом нет необходимости уточнять ситуацию на предмет наличия или отсутствия в системе прибора-определителя пути. Заметим, что, обращаясь с траекториями частиц как с элементами физической реальности, мы можем говорить о вероятности прохода частицы через ту или иную щель. При наличии интерференционных эффектов не удаётся корректно ввести эти вероятности так, чтобы их сумма была равна единице.

Имея в распоряжении приведённый простой пример, обратимся к развитому в первом параграфе формализму цепочек измерений. Каждой истории α , представляющей исходы (13) последовательных измерений, удобно сопоставить оператор

$$\hat{h}_\alpha \doteq \hat{U}(t, t_0) \hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m) \dots \hat{P}_{i_1}^{(1)}(t_1).$$

Конечное состояние системы в момент t после реализации этой истории есть

$$\hat{\rho}_\alpha = \hat{h}_\alpha \hat{\rho}_0 \hat{h}_\alpha^\dagger.$$

След этого состояний не равен в общем случае единице и определяет, как было установлено, вероятность реализации истории α :

$$p_\alpha = \text{Tr}(\hat{h}_\alpha \hat{\rho}_0 \hat{h}_\alpha^\dagger). \quad (61)$$

Заметим, что суммирование операторов \hat{h}_α , отвечающих всем возможным историям, даёт оператор обычной унитарной эволюции на интервале $[t_0, t]$:

$$\sum_\alpha \hat{h}_\alpha = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_m} \hat{U}(t, t_0) \hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m) \dots \hat{P}_{i_1}^{(1)}(t_1) = \hat{U}(t, t_0). \quad (62)$$

⁵Такой образ мыслей диктуется нам классической интуицией и подвергается жёсткой критике, как помнит каждый, изучавший квантовую механику.

Все следы от проводимых измерений при суммировании исчезают вследствие условия (5) для каждого k . Более того, аналогичный явление возникает при суммировании только по результатам некоторых измерений, например, k -ого, где $1 \leq k \leq m$:

$$\hat{h}_{\alpha'} = \quad (63)$$

$$\sum_{i_k} \hat{U}(t, t_0) \hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m) \dots \hat{P}_{i_{k+1}}^{(k+1)}(t_{k+1}) \hat{P}_{i_k}^{(k)}(t_k) \hat{P}_{i_{k-1}}^{(k-1)}(t_{k-1}) \dots \hat{P}_{i_1}^{(1)}(t_1),$$

здесь

$$\alpha' = \{a_{i_1}^{(1)}, \dots, a_{i_{k-1}}^{(k-1)}, a_{i_{k+1}}^{(k+1)}, \dots, a_{i_m}^{(m)}\} \quad (64)$$

представляет собой более короткую историю, в которой отсутствует k -ое измерение.

С аналогичным суммированием для вероятности p_α из (61) дело обстоит сложнее. В общем случае

$$\sum_{i_k} Tr(\hat{h}_\alpha \hat{\rho}_0 \hat{h}_\alpha^\dagger) \neq Tr(\hat{h}_{\alpha'} \hat{\rho}_0 \hat{h}_{\alpha'}^\dagger). \quad (65)$$

Формальной причиной неравенства служит факт двойного присутствия проекторов $\hat{P}_{i_k}^{(k)}(t_k)$ в левой части данного выражения в отличие от ситуации с суммированием в выражении (65), где этот проектор присутствует однократно. С физической точки зрения неравенство (65) демонстрирует явление, аналогичное обсуждавшемуся выше разрушению интерференционной картины в эксперименте Юнга при появлении прибора-определителя щели. Действительно, рассматриваемому k -ому измерению следует сопоставить действие некоторого прибора-определителя неких альтернатив в эволюции системы. Даже если мы игнорируем показания этого прибора (что соответствует суммированию в левой части (65)), когерентность между альтернативами эволюции, отвечающими

его разным показаниям, оказывается разрушенной. Вероятность "траектории", задаваемой исходами остальных измерений не совпадает с вероятностью аналогичной траектории при отсутствии k -ого измерения (правая часть (65)).

Развивая аналогию с обсуждавшимся выше экспериментом Юнга, уместно задаться вопросом о возможности так организовать последовательность измерений, что наличие или отсутствие k -ого измерения никак не скажется на вероятности реализации истории α' из (64). Нетрудно проверить, что достаточным для превращения соотношения (65) в равенство является условие

$$\begin{aligned} \text{Re Tr}(\hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m) \dots \hat{P}_{i_k}^{(k)}(t_k) \dots \hat{P}_{i_1}^{(1)}(t_1) \hat{\rho}_0 \times \\ \hat{P}_{i_1}^{(1)}(t_1) \dots \hat{P}_{j_k}^{(k)}(t_k) \dots \hat{P}_{i_m}^{(m)}(t_m)) \propto \delta_{i_k j_k}. \end{aligned} \quad (66)$$

Мы можем пойти по пути обобщения далее и рассматривать на равных условиях все измерения в цепочке. Тогда прямым обобщением (66) станет условие

$$\text{Re Tr}(\hat{h}_{\alpha_1} \hat{\rho}_0 \hat{h}_{\alpha_2}^\dagger) = 0 \quad (67)$$

для пары любых *различных* историй α_1 и α_2 , отвечающих *заданной* последовательности наблюдений.

Может оказаться, что условие (67) не выполняется для исходного набора историй, когда известен точный исход $a_{i_k}^{(k)}$ каждого измерения, но выполняется для "огрублённых" историй, когда для каждого k задано множество $I^{(k)}$ на действительной оси, куда попадают результаты соответствующего измерения. Этой ситуации отвечают "огрублённые" проекторы

$$\hat{P}^{(k)}(t_k) = \sum_{a_{i_k}^{(k)} \in I^{(k)}} \hat{P}_{i_k}^{(k)}(t_k). \quad (68)$$

Огрублённая история β задаётся последовательностью

$$\beta = \{I_\beta^{(1)}, \dots, I_\beta^{(m)}\}$$

числовых множеств. Ей соответствует оператор

$$\hat{h}_\beta = \sum_{\alpha \in \beta} \hat{h}_\alpha$$

огрублённой истории, представимый как сумма операторов "точных" историй вида (63). Для каждого k проектор $\hat{P}_\beta^{(k)}(t_k)$ из \hat{h}_β определяется выражением (68). Именно в этом смысле следует понимать условие $\alpha \in \beta$ при суммировании.

Предположим, что для некоторой совокупности \beth (возможно огрублённых) историй выполняется соотношение (67), которое мы запишем в более информативном виде, включающем вероятности:

$$\text{Re Tr}(\hat{h}_\beta \hat{\rho}_0 \hat{h}_{\beta'}^\dagger) = \delta_{\beta\beta'} p_\beta \quad (69)$$

для любых историй β и β' из \beth . Если при этом имеет место условие полноты набора \beth в форме условия (62)

$$\sum_{\beta \in \beth} \hat{h}_\beta = \hat{U}(t, t_0),$$

что вместе с предыдущим даёт естественное равенство для вероятностей

$$\sum_{\beta \in \beth} p_\beta = 1,$$

совокупность \beth называется **согласованной**. Из этого определения ясно, что дальнейшее огрубление историй приведёт также к согласованным наборам.

Продолжим обсуждение мотивации введения понятия согласованных историй. Как уже отмечалось, помещение детектора в точку x' нивелирует декогерирующий эффект от рождения информации прибором-определителем пути. Когда в общем случае можно ожидать, что генерация новой информации окажется такой же "безболезненной"? Ясно, что так, в частности, будет, когда эта информация остаётся внутри эволюционирующей системы и не оказывается записанной в её окружении. Такая ситуация будет гарантирована, если окружение отсутствует! Это значит, что речь идёт о Вселенной в целом. В данном случае говорить о квантовых измерениях в обычном смысле, как мы делали до сих пор, не приходится. Изучение Вселенной мы ведём изнутри. При этом у нас сформировалось понятие "классического мира". Содержание определения классичности здесь касается правила сложения вероятностей: если в некоторое конечное состояние система может попасть несколькими путями, то вероятность оказаться в этом состоянии равна сумме вероятностей эволюции системы по всем данным путям. Как понятие классичности возникает во Вселенной, которая в своей основе предполагается квантовой? С надеждой получить ответ на этот вопрос и связана в значительной мере концепция согласованных историй. Есть основания предполагать, что существуют согласованные наборы (естественно, огрублённых) историй, реализующих картину классического мира. Классичность обеспечена тем, что внутри каждого набора выполнены обычные законы классической теории вероятностей: вероятность более грубой истории есть сумма вероятностей её составляющих, т.е.

$$p_\beta = \sum_{\alpha \in \beta} p_\alpha.$$

Практически с самого начала исследований концепции согла-

сованных историй было ясно, что существуют разные наборы историй, согласованных внутренне, но не между собой. Важно понять, как следует относиться к этой ситуации и не противоречит ли она конкретности окружающего нас мира. Однозначных и исчерпывающих ответов на эти вопросы пока нет. Некоторое время шли энергичные поиски критерия, который позволил бы из множества согласованных наборов указать один "реальный". Значительного успеха на этом направлении достичь не удалось. Существует также иная точка зрения. Возможно, что многообразие согласованных наборов, трактуемое как своего рода многообразие "точек зрения" на окружающий нас мир, принципиально необходимо. Некоторые недавние результаты подкрепляют такой взгляд.

Отметим следующее обстоятельство, обычно не обсуждаемое в публикациях по согласованным историям. Использование согласованных историй в космологии предполагает легитимность понятия статистического оператора Вселенной как целого. Допустимо ли это? Корректен ли такой подход в контексте реляционной трактовки квантовых состояний, о которой шла речь в Части 1? Эти частные вопросы, которые легче задать, чем ответить на них, крайне важны в свете центрального вопроса о правильном понимании того, что стоит за концепцией квантового состояния.

8 Квантовые системы с пост-селекцией. Правило АВЛ.

Идея согласованных квантовых историй близка к теме настоящего параграфа – к процессам в системах с пост-селекцией или, как часто называют это направление, к квантовой механике с симметрией прошлого и будущего

(time-symmetric QM). Также как и с квантовыми историями целесообразно начать с рассмотрения простой физической ситуации. Предположим, что имеется источник неполяризованных фотонов S , поляризатор P_1 и детектор D (рис 6). Поляризатор ориентирован так, что пропускает только

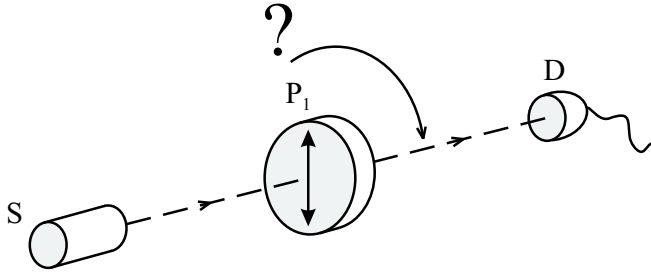


Рис. 6. Схема с источником фотонов S , детектором D и поляризатором P_1 , пропускающим вертикально-поляризованное излучение. Вопрос о характере поляризации фотона непосредственно перед детектированием.

вертикально-поляризованный свет. Детектор зарегистрировал очередной фотон. Уместен вопрос: какова *была* поляризация этого фотона на его пути от поляризатора к детектору? Заметим, что вопрос задаётся после регистрации фотона. Ответ представляется совершенно очевидным: фотон имел вертикальную поляризацию. Действительно, если выяснится, что в промежутке между P_1 и D кто-то проводил измерение поляризации фотона без его поглощения в базисе $\{|V\rangle, |H\rangle\}$ ("вертикальная поляризация", "горизонтальная поляризация") мы можем однозначно указать исход, который *был получен* – вертикальная поляризация. Следует подчеркнуть два важных обстоятельства в приведённых простых рассуждениях. Первое – мы высказываем утверждение о прошлом состоянии фотонов, о вероятности свершившегося

измерения, если оно было осуществлено. Второе – утверждение о поляризации относится в равной мере ко всем фотонам, зарегистрированным детектором, и, поэтому, к любому их более узкому подмножеству.

Теперь усложним схему. Поместим перед детектором на пути фотонов второй поляризатор P_2 , ориентированный так, чтобы пропускать излучение, поляризованное по правому кругу. Ограничимся рассмотрением только фотонов, зарегистри-

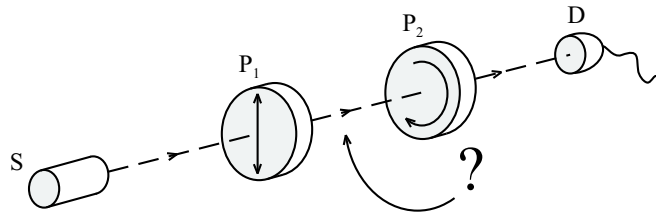


Рис. 7. В предыдущую схему добавлен поляризатор P_2 , пропускающим циркулярно-поляризованное излучение. Ретро-вопрос о характере поляризации *зарегистрированных* фотонов в промежутке между P_1 и P_2 .

стрированных детектором, и будем интересоваться их поляризацией при пролёте между P_1 и P_2 . Теперь мы имеем дело с некоторым подмножеством фотонов, зарегистрированных детектором в первой схеме, т.к. появление поляризатора P_2 позволяет достигнуть детектора не всем фотонам (половине при большом числе фотонов), прошедшим поляризатор P_1 . Поэтому, как было отмечено выше, вывод о вертикальной поляризации таких фотонов должен остаться верным. Однако, дело обстоит не совсем так, что можно показать, обратившись, как и в первом случае, к исходам поляризационных измерений в пространстве между P_1 и P_2 . Если выяснится, что измерение проводилось в базисе $\{|V\rangle, |H\rangle\}$, мы, как и

ранее, можем гарантировать, что все рассматриваемые фотоны были обнаружены в состоянии $|V\rangle$. Но если потребуются оценить вероятности исходов измерения в базисе круговых поляризаций $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, мы также можем быть уверены, что все зарегистрированные впоследствии фотоны были право-поляризованными (в состоянии $|R\rangle$). Подчеркнём лишний раз, что проводится не более одного измерения, первого или второго типа, но оба случая полностью равноправны. Поэтому есть основания в равной степени утверждать, что зарегистрированные в D фотоны были на пути от P_2 поляризованы вертикально и по правому кругу. Такое положение кажется странным с точки зрения привычной квантовой теории, хотя мы ни в одной букве не меняли её формализма. Следует констатировать, что обычное представление о квантовом состоянии как о статистическом операторе в гильбертовом пространстве (в данном случае в двумерном пространстве \mathbb{C}^2) не отвечает рассматриваемой ситуации, имеющей важную особенность. Обычно квантовой механике выделяют процедуру приготовления системы и процедуру проводимого над ней измерения в более поздний момент времени. Конкретные детали процедуры приготовления облакаются формализмом квантовой механики в понятие состояния. Далее это состояние используется для вычисления вероятностей различных исходов при измерении. В общем случае процедура приготовления не всегда завершается успешно. Поэтому она фактически представляет собой процедуру отбора (селекции) случаев успешного приготовления. В первой рассматриваемой схеме (рис.6) селекция осуществляется поляризатором P_1 . Это *пред-селекция*, *предшествующая* возможному измерению поляризации фотона. В схеме рис.7 вместе с *пред-селекцией* фотонов поляризатором P_1 присутствует *пост-селекция* поляризатором P_2 . Напомним, что рассмат-

ривались только фотоны, зарегистрированные детектором, т.е. прошедшие пред- и пост-селекцию. Именно для таких фотонов попытка указать их поляризацию в интервале между актами селекции сталкивается с проблемами.

Таким образом, обычное понятие квантового состояния системы как вектора в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_S или действующего в \mathcal{H}_S статистического оператора неотделимо от ситуации с пред-селекцией системы и приспособлено для вычисления вероятностей исходов *будущих* измерений. Это понятие становится неадекватным, когда делаются высказывания "задним числом" и определяются вероятности исходов измерений уже проведённых в прошлом после пред-селекции, но до пост-селекции.

Выше из простых физических соображений мы определили вероятности исходов двух выделенных типов поляризационных измерений между поляризаторами: если измерение проводилось в базисе $\{|V\rangle, |H\rangle\}$, исходом всегда будет $|V\rangle$, а если измеряли в базисе $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, исходом всегда будет $|R\rangle$. Какова вероятность исходов измерения в базисе $\{|\lambda\rangle, |\bar{\lambda}\rangle\}$ двух произвольных эллиптических поляризаций? Для этой цели обратимся к формуле (14). Вероятность неполяризованному фотону последовательно пройти поляризатор P_1 (которому отвечает проектор $\hat{P}^{(1)} = |V\rangle\langle V|$), далее обнаружить при измерении поляризацию λ (проектор $\hat{P}_\lambda = |\lambda\rangle\langle\lambda|$) и затем пройти через поляризатор P_2 (проектор $\hat{P}^{(2)} = |R\rangle\langle R|$) даётся выражением

$$p(\hat{P}^{(1)}, \hat{P}_\lambda, \hat{P}^{(2)} | \hat{\rho}_0) = \text{Tr} \hat{P}^{(2)} \hat{P}_\lambda \hat{P}^{(1)} \hat{\rho}_0 \hat{P}^{(1)} \hat{P}_\lambda \hat{P}^{(2)}. \quad (70)$$

Здесь при записи символа вероятности в явном виде выделены условия – статистический оператор $\hat{\rho}_0 = \hat{1}/2$. Считается также, что в интервалах между селекциями и измерением

поляризация фотонов не эволюционирует. Величина (70) является вероятностью сложного тройного события. Нас, однако, интересует вероятность p_λ исхода измерения *при условии* успешной пред- и пост-селекции. В соответствии с правилом Байеса вычисления условных вероятностей, искомая величина определяется отношением

$$p_\lambda \doteq p(\hat{P}_\lambda | \hat{\rho}_0, \hat{P}^{(1)}, \hat{P}^{(2)}) = \frac{p(\hat{P}^{(1)}, \hat{P}_\lambda, \hat{P}^{(2)} | \hat{\rho}_0)}{p(\hat{P}^{(1)}, \hat{P}_\lambda, \hat{P}^{(2)} | \hat{\rho}_0) + p(\hat{P}^{(1)}, \hat{P}_\lambda, \hat{P}^{(2)} | \hat{\rho}_0)},$$

где в знаменателе стоит вероятность успеха пред- и пост-селекции. Раскрывая значения вероятностей, входящих в последнее выражение, можно привести его к виду

$$p_\lambda = \frac{|\langle R | \hat{P}_\lambda | V \rangle|^2}{\sum_{\lambda'=\lambda, \bar{\lambda}} |\langle R | \hat{P}_{\lambda'} | V \rangle|^2}.$$

Мы получили частный вариант так называемого "правила ABL" (ABL roole). Аббревиатура образована по именам Я.Ааронова⁶, П.Бергманна⁷ и Дж.Лебовица⁸ (Yakir Aharonov, Peter Bergmann, and Joel Lebowitz, рис. 8), впервые обративших пристальное внимание на эффекты квантовой пост-селекции в 1964 г. Они предположили, что рассмат-

⁶р. 1932. Израильский физик-теоретик, профессор университета Тель-Авива. Степень получил в бристольском университете. Ученик Дэвида Бома; разделил с ним соавторство известного эффекта Ааронова-Бома (1959).

⁷1915-2002. Американский физик-теоретик. Окончил Германский университет в Праге в 1936, после чего продолжил карьеру ассистента и соавтора Эйнштейна в Принстонском Институте передовых исследований.

⁸р. 1930. Все родные погибли в Аушвице в 1944. Ученик Бергманна, сотрудничал с Ларсом Онсагером. Автор известных работ по статистической механике. Профессор университета Рутгерса.

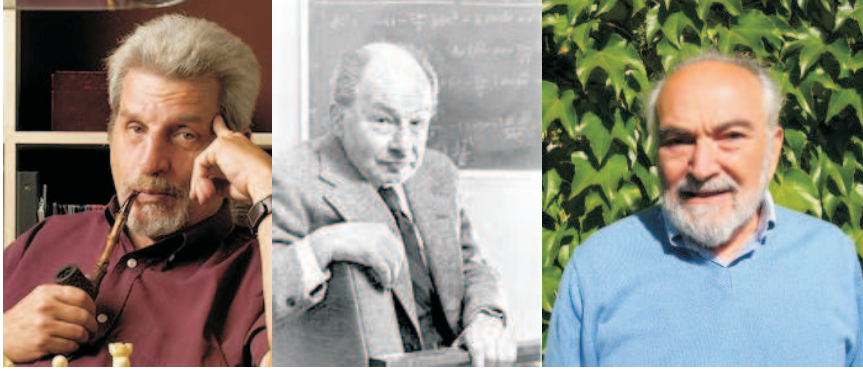


Рис. 8. Якир Ааронов, Петер Бергманн и Джоэл Лебовиц

риваемая система пред-селектирована в состоянии $|\Psi_{pre}\rangle$ в момент t_{pre} , далее эволюционирует по унитарному закону (2) до момента $t > t_{pre}$, подвергается измерению некоторой наблюдаемой \hat{A} и далее эволюционирует до момента $t_{post} > t$ пост-селекции в состоянии $|\Psi_{post}\rangle$. Буквально повторяя приведённый выше анализ ситуации с фотонами, мы получаем для вероятности исхода a измерения

$$p_a = \frac{|\langle \Psi_{post}(t) | a \rangle \langle a | \Psi_{pre}(t) \rangle|^2}{\sum_{a'} |\langle \Psi_{post}(t) | a' \rangle \langle a' | \Psi_{pre}(t) \rangle|^2}. \quad (71)$$

Здесь

$$|\Psi_{pre}(t)\rangle = \hat{U}(t, t_{pre})|\Psi_{pre}\rangle; \quad |\Psi_{post}(t)\rangle = \hat{U}(t, t_{post})|\Psi_{post}\rangle. \quad (72)$$

Главная особенность формулы (71) – невозможность представить её правую часть как

$$\langle a | \hat{\rho} | a \rangle$$

путём подбора статистического оператора $\hat{\rho}$. Мы вернулись к невозможности в обычном для квантовой механики смысле ретроспективно указать состояние системы, подвергшейся пост-селекции. Для такой ситуации АВЛ предложили обобщить понятие квантового состояния как пары $\{\langle \Psi_{post}(t) | \Psi_{pre}(t) \rangle\}$ бра- и кет-векторов. При этом, как следует из (72), кет-вектор $|\Psi_{pre}(t)\rangle$ эволюционирует из прошлого в будущее до момента измерения, а бра-вектор $\langle \Psi_{post}(t) |$ эволюционирует из будущего к прошлому моменту измерения. Такой взгляд интересен в контексте проблемы статуса квантового состояния. Как уже упоминалось, существует тенденция трактовать вектора гильбертова пространства \mathcal{H}_S системы как своеобразные элементы "объективной физической реальности", т.е. считать, что в каждый момент времени система находится в некотором (чистом) состоянии $|\Psi\rangle$, которое может зачастую не быть известным точно (тогда состояние смешано). Этот взгляд должен предполагать определённую устойчивость прошлой картины объективной физической реальности такого рода. Мы, однако, выше продемонстрировали лёгкость, с которой "дезаурируется" взгляд на квантовое состояние как на вектор в \mathcal{H}_S при ретроспективной оценке на основе пост-селекции. Таким образом, системы с пост-селекцией демонстрируют бóльшую адекватность эпистемологической (реляционной) трактовки квантового состояния как особым образом оформленного *знания* о системе. В этой связи вспомним также, что чистое состояние $|\Psi\rangle$ согласно обычному формализму квантовой механики представляет собой наиболее полное описание системы. Любая попытка уточнить описание наблюдаемой, для которой $|\Psi\rangle$ не является собственным состоянием, неизбежно приведёт к потере полноты описания некоторых других параметров. С точки зрения статистической физики $|\Psi\rangle$ представляет ан-

самбль, не способный к дальнейшей "пурификации", т.е. выделению подансамблей, отличных от исходного. Но всё это справедливо только в обычной постановке с пред-селекцией. Мы видим, что привлечение информации из будущего позволяет формировать подансамбли внутри $|\Psi_{pre}\rangle$. Насколько это специфично для квантовой физики. На первый взгляд в классике есть нечто похожее. В качестве примера рассмотрим процесс обработки поверхности сложной формы путём бомбардировки её частицами. В нашей власти организовать приготовление пучка частиц и их регистрацию после рассеяния на поверхности, т.е. пред- и пост-селекцию. Знание направления рассеяния частицы позволяет уточнить участок поверхности, на котором частица была рассеяна и, следовательно, степень обработки этого участка. Заметим, однако, что того же эффекта уточнения можно добиться лучшей коллимацией исходного пучка без всякой регистрации рассеянных частиц. Таким образом, в классической физике учёт пост-селекции не способен дать принципиально новой информации. Иное дело в квантовой механике. Приготовление чистого состояния $|\Psi_{pre}\rangle$ (аналог максимально качественной коллимации) всё равно не освобождает процедуру будущего измерения от имманентной квантовой случайности. В этих условиях как мы видели и как будет показано далее, пост-селекция приводит к нетривиальным эффектам.

9 Нарушение неравенства Белла при пост-селекции.*

В Части 1 содержится вывод неравенства Белла и показывается, как его нарушение опровергает принцип локальной причинности или, что эквивалентно, локальные мо-

дели скрытых параметров. Напомним основные моменты. Неравенство Белла (точнее, неравенство Клаузера-Хорна-Шимони-Холта-Белла) имеет вид (формулы (7) и (9) из Части 1):

$$\frac{1}{2} \left| \langle \mathcal{A}(\alpha_1) \mathcal{B}(\beta_1) \rangle + \langle \mathcal{A}(\alpha_1) \mathcal{B}(\beta_2) \rangle + \langle \mathcal{A}(\alpha_2) \mathcal{B}(\beta_1) \rangle - \langle \mathcal{A}(\alpha_2) \mathcal{B}(\beta_2) \rangle \right| \leq 1, \quad (73)$$

где \mathcal{A} и \mathcal{B} – наблюдаемые, принимающие значения ± 1 . Это могут быть, например, удвоенные проекции спинов пары нейтронов. Экспериментаторы Алиса и Боб, каждый в своей лаборатории, измеряют эти проекции для направлений α_1 и α_2 у Алисы и β_1 и β_2 у Боба. При наиболее правильной постановке эксперимента Алиса и Боб выбирают одно из двух направлений непосредственно перед измерением. При последующей встрече и обработке результатов подсчитывается комбинация четырех средних из (73) – комбинация Белла. При выполнении принципа локальной причинности оказывается выполненным и неравенство (73). В квантовой механике неравенство Белла может нарушаться, что было обнаружено экспериментально. Максимальное нарушение, допускаемое квантовым формализмом, называется границей Цирельсона и составляет для модуля комбинации Белла величину $\sqrt{2}$. Каждое из слагаемых в этой комбинации может в принципе принимать значения ± 1 . Как показано в §8 Части 1, для гипотетических "сверхквантовых" корреляций можно реализовать ситуацию

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(\alpha_1) \mathcal{B}(\beta_1) \rangle &= \langle \mathcal{A}(\alpha_1) \mathcal{B}(\beta_2) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{A}(\alpha_2) \mathcal{B}(\beta_1) \rangle = -\langle \mathcal{A}(\alpha_2) \mathcal{B}(\beta_2) \rangle = 1 \end{aligned}$$

и получить значение 2 для комбинации Белла, превысив границу Цирельсона в $\sqrt{2}$ раз.

Аналогичного эффекта можно достичь тривиальным образом без сверхквантовых и даже вообще без каких-либо корреляций простой селекцией экспериментальных данных. Действительно, результаты Алисы и Боба представляют собой последовательность пар чисел $\{a^{(n)}, b^{(n)}\}$ ($a^{(n)}, b^{(n)} = \pm 1$). Для пары с номером n экспериментаторы знают направления $\alpha^{(n)}$ и $\beta^{(n)}$, вдоль которых измерялись проекции спинов. Поэтому Алиса и Боб могут "сжульничать": если направления $\alpha^{(n)}$ и $\beta^{(n)}$ совпадают с направлениями из первых трёх слагаемых в комбинации Белла (73) и числа в n -ой паре одинаковы ($a^{(n)} = b^{(n)}$), она учитывается; в противном случае, т.е. при $a^{(n)} = -b^{(n)}$, пара учитывается только если $\alpha^{(n)} = \alpha_2$ и $\beta^{(n)} = \beta_2$. Комбинация Белла, подсчитанная на выбранных данных, оказывается, естественно, равной 2. Заметим, что для осуществления описанной селекции требуется знать как числа в n -ой паре, так и направления $\alpha^{(n)}$ и $\beta^{(n)}$. Можно ли снять эти требования, т.е. может ли третье лицо, назовём его Чарльз, не имея доступа к записям о направлениях измерений и их результатам, указать тем не менее номера пар, которые следует учесть при вычислении комбинации Белла, отбросив все остальные? Ответ положительный, если Чарльзу предоставят в распоряжение нейтронные пары, использовавшиеся ранее в измерениях Алисы и Боба, и позволят осуществить квантовую пост-селекцию.

Для определённости будем считать, как и в Части 1, что каждая пара перед измерением у Алисы и Боба была приготовлена в синглетном состоянии $|\Psi_0\rangle$:

$$|\Psi_{pre}\rangle = |\Psi_0\rangle.$$

Без пост-селекции, т.е. только с пред-селекцией, для любого

среднего $\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathcal{B}(\boldsymbol{\beta}) \rangle$ из комбинации Белла имеем

$$\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathcal{B}(\boldsymbol{\beta}) \rangle_{PS} = \sum_{a,b=\pm 1} ab \text{Prob}_{PS}(a,b|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}), \quad (74)$$

где условная вероятность при пред-селекции (PS – preselection)

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{PS}(a,b|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) &= \langle \Psi_0 | \hat{P}_a(\boldsymbol{\alpha}) \otimes \hat{P}_b(\boldsymbol{\beta}) | \Psi_0 \rangle = \\ &= \frac{1}{4}(1 - ab \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}). \end{aligned} \quad (75)$$

Только несколько изменёнными обозначениями это выражение отличается от (12) из Части 1. Подстановка (75) в (74) даёт известный результат

$$\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathcal{B}(\boldsymbol{\beta}) \rangle_{PS} = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда Чарльз осуществляет пост-селекцию в синглетное состояние:

$$|\Psi_{post}\rangle = |\Psi_0\rangle.$$

Теперь условная вероятность должна вычисляться по правилу ABL. Нетрудно заметить, что в нашем случае эта вероятность $\text{Prob}_{PPS}(a,b|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ (PPS – pre-post-selection) выражается через (75):

$$\begin{aligned} \text{Prob}_{PPS}(a,b|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) &= \frac{\text{Prob}_{PS}(a,b|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\sum_{a',b'=\pm 1} \text{Prob}_{PS}(a',b'|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - ab \frac{2\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}{1 + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right). \end{aligned} \quad (76)$$

Сравнение правых частей (75) и (76) немедленно приводит к выражению для среднего значения в случае пред- и пост-селекций:

$$\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathcal{B}(\boldsymbol{\beta}) \rangle_{PPS} = -\frac{2\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}{1 + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2}. \quad (77)$$

Для конфигурации векторов $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_1$ и $\boldsymbol{\beta}_2$, использованной в Части 1 (рисунок на стр. 26), правая часть (77) ещё более упрощается: $\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathcal{B}(\boldsymbol{\beta}) \rangle_{PPS} = -4\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}/3$. Следовательно, пост-селекция в синглетное состояние позволяет на треть превысить границу Цирельсона:

$$\sqrt{2} \rightarrow \frac{4}{3}\sqrt{2}. \quad (78)$$

Из физических соображений ясно, что пост-селекция в любое иное состояние уменьшит корреляции в отобранных селекцией парах частиц и, соответственно, уменьшит коэффициент в правой части (78).

10 Проблема "трёх коробок".

Наиболее известной модельной системой с квантовой пред- и пост-селекцией являются т.н. "три коробки". Стойкие ассоциации у любого, знакомого с российским реалиями 90-х годов, эта модель вызывает с игрой напёрсточников. Система состоит из "коробок" с номерами 1, 2 и 3, в которые можно поместить частицу⁹. Нахождению частицы в коробке с номером i отвечает вектор $|i\rangle$. Считаем, что частица в системе только одна. Пусть пред-селекции отвечает вектор

$$|\Psi_{pre}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle), \quad (79)$$

⁹Роль коробок могут играть, например, магнитные подуровни частицы с единичным спином.

а пост-селекции – вектор

$$|\Psi_{post}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle). \quad (80)$$

Для простоты полагаем, что собственная унитарная эволюция тривиальна (отсутствует). Промежуточное измерение состоит либо в открытии коробки 1, либо в открытии коробки 2. Исход каждого измерения бивалентен – можно либо обнаружить частицу, либо нет. Поэтому первому варианту отвечает пара проекторов

$$\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1| \quad (\text{частица обнаружена}); \quad (81)$$

$$\hat{1} - \hat{P}_1 = |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3| \quad (\text{частица не обнаружена}),$$

а второму –

$$\hat{P}_2 = |2\rangle\langle 2| \quad (\text{частица обнаружена}); \quad (82)$$

$$\hat{1} - \hat{P}_2 = |1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3| \quad (\text{частица не обнаружена}).$$

Применение правила АВЛ даёт

$$p(\hat{P}_1|\Psi_{pre}, \Psi_{post}) = p(\hat{P}_2|\Psi_{pre}, \Psi_{post}) = 1,$$

т.е. какая бы из коробок 1 и 2 ни была открыта, частица оказалась обнаруженной. Результат несколько странный, особенно если рассуждать о нём, используя сослагательное наклонение: "Была открыта коробка 1 (например) и обнаружена частица, но если бы *вместо этого* была открыта коробка 2, частица также была бы обнаружена". Это пример "контрфактуальных" (counterfactual) высказываний. Если следовать такому способу мышления, частица в некотором смысле

присутствует сразу в двух коробках! При этом смысл присутствия частицы в одновременно двух местах совершенно отличен, например, от не совсем точного объяснения интерференции в опыте Юнга как следствия пролёта частицы одновременно через обе щели. Противники контрфактуальных рассуждений представляют дело следующим образом: "Всегда открывалась только одна из коробок, и частица была обнаружена; если бы частицы в коробке не оказалось, не могло бы произойти успешной пост-селекции". Видно, что при таком взгляде ситуация с коробками выглядит значительно банальнее. Существует даже демонстрация аналогичного классического явления с использованием игральные карт. Квантовый характер модели превносит, однако, в проблему особую специфику. Мы вернёмся к этому в последнем параграфе, а пока покажем, что система трёх коробок может служить инструментом для опровержения идеи скрытых параметров. В Части 1 для этой цели использовался факт нарушения неравенства Белла. Будем, как и ранее, обозначать скрытый параметр символом λ . Напомним, что скрытый параметр задаёт "реальность", т.е. объективное "положение дел" в самом широком смысле. В частности, он задаёт исход любого квантового измерения, которое производится или может быть произведено по воле экспериментатора. При этом должны воспроизводиться результаты квантовой механики как некоторой феноменологии, надстроенной поверх теории со скрытыми параметрами. Применительно к любой паре ортогональных векторов $\{|\Psi\rangle, |\Psi^\perp\rangle\}$ из гильбертова пространства системы должно выполняться следующее **требование (а)**: *если некоторое значение скрытого параметра отвечает факту нахождения системы в состоянии $|\Psi\rangle$, оно должно отвечать факту её отсутствия в $|\Psi^\perp\rangle$* . Наша система коробок имеет трёхмерное пространство Гильберта. Поэтому должно быть

также выполнено **требование (b)**: значение скрытого параметра, отвечающее факту отсутствия системы в двух из трёх любых взаимно ортогональных вектор-состояниях, должно одновременно отвечать факту нахождения системы в третьем вектор-состоянии.

Проанализируем систему трёх коробок в рамках двух выделенных требований. Для этого заметим прежде всего, что проекторы из вторых строк выражений (81) и (82), отвечающие фактам необнаружения частиц, могут быть представлены как суммы проекторов на вектора $(|2\rangle \pm |3\rangle)/\sqrt{2}$ в первом случае и как сумма проекторов на вектора $(|1\rangle \pm |3\rangle)/\sqrt{2}$ во втором. В каждой из этих пар один вектор ортогонален $|\Psi_{pre}\rangle$, а второй – $|\Psi_{post}\rangle$. Расположим восемь векторов, используемых в задаче, в виде вершин следующей диаграммы. Рёбра диаграммы соединяют ортогональные пары. Су-

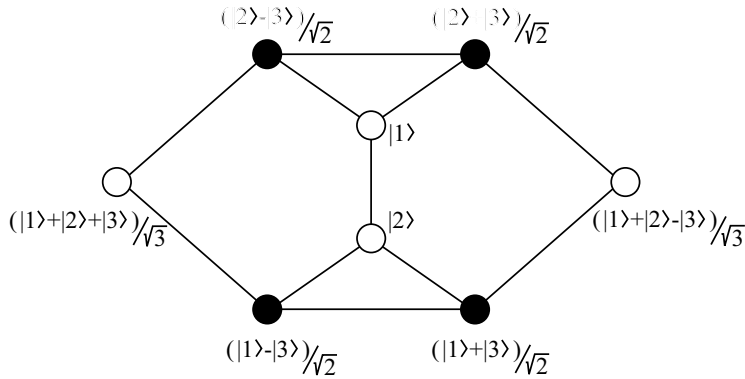


Рис. 9. Диаграмма ("кристалл Клифтона"), служащая для демонстрации невозможности скрытых параметров в модели "трёх коробок". Пояснения в тексте.

ществуют значения скрытых параметров, отвечающие факту одновременного нахождения системы в векторах $|\Psi_{pre}\rangle$ и

$|\Psi_{post}\rangle$, поскольку они не ортогональны и система действительно может быть пред- и пост-селектирована в этих состояниях. Будем рассматривать это множество значений и попробуем раскрасить вершины диаграммы, следуя требованиям (a) и (b). Светлая (тёмная) вершина будет отвечать факту (не)нахождения системы в соответствующем вектор-состоянии для всех значений скрытых параметров из рассматриваемого множества. По постановке крайняя левая и крайняя правая вершины должны быть светлыми. Соседние с ними вершины должны быть тёмными, как следствие требования (a). Замечаем, что в диаграмме имеются две тройки ортогональных векторов и в каждой тройке по паре вершин уже оказались тёмными. Оставшиеся вершины должны быть светлыми в соответствии с требованием (b). Но эти вершины – вектора $|1\rangle$ и $|2\rangle$ – взаимно ортогональны и не могут быть обе светлыми без нарушения требования (a). Мы не смогли согласованным образом раскрасить вершины, следуя гипотезе о скрытых параметрах.

Покажем, что проблема "трёх коробок" имеет прямое отношение к согласованным квантовым историям. Предположим полное незнание прошлой судьбы системы. Это соответствует выбору начального статистического оператора $\hat{\rho}_0 = \hat{1}/3$. В нашей модели присутствуют три операции: пред-селекция, открывание коробки и пост-селекция. Результат каждой операции бивалентен, т.к. селекция может осуществиться или не осуществиться, а частица – обнаружена или нет. Можно с каждым результатом связать эффективную наблюдаемую с собственным значением 1 (успех) и 0 (неудача). Несложно проверить, что естественным образом возникающие два набора \square_i ($i = 1, 2$), из восьми историй каждый,

являются согласованными:

$$\beth_i = \left(\{0_{prep}, 0_i, 0_{post}\}, \{0_{prep}, 0_i, 1_{post}\}, \dots, \{1_{prep}, 1_i, 1_{post}\} \right).$$

Здесь единице отвечает в соответствующем месте оператора (63) проектор \hat{P} из множества $(|\Psi_{pre}\rangle\langle\Psi_{pre}|, |i\rangle\langle i|, |\Psi_{post}\rangle\langle\Psi_{post}|)$, а нулю – проектор $\hat{1} - \hat{P}$.

Мы имеем два согласованных набора, не согласованных между собой. Особенностью данного примера является более сильное условие согласованности, заменяющее (69):

$$Tr(\hat{h}_\beta \hat{\rho}_0 \hat{h}_{\beta'}^\dagger) = \delta_{\beta\beta'} p_\beta.$$

В литературе это условие называют "сильной согласованностью". Заметим также, что, как было показано, вероятности историй $\{1_{prep}, 0_i, 1_{post}\}$ нулевые.

Стоит напомнить ещё раз, что для согласованных наборов историй \beth_1 и \beth_2 не предполагает действительного выполнения актов селекции и промежуточного измерения. Оставаясь внутри одного набора мы можем классическим образом приписывать вероятности различным историям как реализующимся самопроизвольно без какого-либо нашего участия.

11 Проблема "жестокоего короля".

Следующая иллюстрация необычных свойств квантовой пост-селекции получила оформление в виде истории о короле, не чаявшем души в кошках и жестоко карающем за плохое к ним отношение. Прознав об экспериментах с кошкой Шредингера, король стал круто обходиться со всеми физиками. К нему в лапы попала Алиса. Оставляя жертве шанс, король предложил Алисе приготовить по её усмотрению частицу со

спином $1/2$. Слуги короля заберут частицу и выполнят по его приказу измерение проекции спина на одну из осей \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y или \mathbf{e}_z . После этого частица вернётся к Алисе. Далее Алиса должна предстать перед королём и, узнав от него номер оси, попробовать угадать результат измерения. Естественно, что в случае неверного ответа Алиса отправляется к палачу.

Ясно, что спасение Алисы заключается в правильной организации пред- и пост-селекции. Если бы жестокий король ограничился только осями \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y , задача была бы проста: Алисе достаточно приготовить частицу с определённой проекцией спина на ось \mathbf{e}_x и по частицы измерить проекцию её спина вдоль \mathbf{e}_y (или наоборот). Но король усложнил задачу до трёх возможных направлений. Спасение Алисы возможно и в этом случае. Она должна приготовить зацепленное состояние пары частиц. Для определённости возьмём

$$|\Psi_{pre}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 + |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 \right),$$

где $|\pm\rangle$ – состояния с проекциями спина $\pm 1/2$ вдоль оси \mathbf{e}_z . Частицу 1 Алиса отдаёт королю. Когда частицу ей возвращают, Алиса проводит пост-селектирующее измерение снова над парой частиц 1 и 2. Это измерение некоторой наблюдаемой \hat{A} , имеющей собственными состояниями четвёрку векто-

ров

$$\begin{aligned}
|\Psi_{post}^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(|-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \exp(i\pi/4) + |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 \exp(-i\pi/4)\right), \\
|\Psi_{post}^{(2)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 - \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(|-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \exp(i\pi/4) + |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 \exp(-i\pi/4)\right), \\
|\Psi_{post}^{(3)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(|-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \exp(-i\pi/4) + |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 \exp(i\pi/4)\right), \\
|\Psi_{post}^{(4)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 - \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(|-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \exp(-i\pi/4) + |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 \exp(i\pi/4)\right),
\end{aligned} \tag{83}$$

которым отвечают различные собственные числа. Их конкретные значения не важны; главное, что такое измерение позволяет однозначно пост-селектировать состояние пары по одному из векторов (83). В информации о результатах селекции спасение Алисы. Правило АВЛ позволяет определить условную вероятность $p(\pm|\Psi_{pre}, \Psi_{post}^{(i)}; \mathbf{e}_j)$ получения королевскими слугами результата $\pm 1/2$ при измерении проекции спина вдоль оси \mathbf{e}_j в условиях результата $|\Psi_{post}^{(i)}\rangle$ пост-селекции у Алисы:

$$p(\pm|\Psi_{pre}, \Psi_{post}^{(i)}; \mathbf{e}_j) = \frac{|\langle \Psi_{post}^{(i)} | \hat{P}_j(\pm) | \Psi_{pre} \rangle|^2}{\sum_{s=\pm 1} |\langle \Psi_{post}^{(i)} | \hat{P}_j(s) | \Psi_{pre} \rangle|^2}.$$

Здесь $\hat{P}_j(\pm) = (1 \pm \mathbf{e}_j \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})/2$ – проектор на соответствующие спиновые состояния. Вычисление показывает, что вероятности равны либо 0, либо 1. Результаты сведены в таблицу, где в клетках стоят знаки обнаруженных проекций в зависимости от $|\Psi_{post}^{(i)}\rangle$ и \mathbf{e}_j .

	\mathbf{e}_x	\mathbf{e}_y	\mathbf{e}_z
$ \Psi_{post}^{(1)}\rangle$	+	+	+
$ \Psi_{post}^{(2)}\rangle$	–	–	+
$ \Psi_{post}^{(3)}\rangle$	+	–	–
$ \Psi_{post}^{(4)}\rangle$	–	+	–

Отправляясь к королю Алиса узнает номер i , услышав от короля номер оси j , она заглядывает в таблицу и даёт спасительный ответ.

12 Слабые измерения и "слабые значения".

До сих пор мы предполагали все измерения чёткими и изложили соответствующую феноменологическую теорию в первом параграфе. Результаты таких измерений представлены собственными значениями оператора измеряемой величины. После измерения система оказывается в собственном состоянии, отвечающем полученному собственному значению. Важно, что этот сценарий реализуется при *любом* начальном состоянии, которым определяется только вероятность получить то или иное собственное значение измеряемой величины. Если представить себе измерительный прибор со стрелкой, то результатам чёткого измерения соответствует мно-

жество дискретных и хорошо отличимых друг от друга положений стрелки. Платой за недвусмысленность и чёткость показания прибора служит вышеупомянутое радикальное изменение состояния системы с полной потерей памяти о её начальном состоянии. В свете реляционной парадигмы квантового состояния, как особым образом "упакованном" знании о системе, естественно ожидать, что при нечётком измерении, когда показания стрелки *a priori* менее информативны, изменение состояния системы окажется менее резким. Такие "мягкие" или, как принято говорить, "слабые" измерения представляют особый интерес при исследовании эффектов квантовой пост-селекции.

При слабом измерении показания стрелки измерительного прибора уже не дискретны и могут пробегать некоторый интервал действительных значений. Ясно, что работа такого нечёткого измерителя и интерпретация его показаний неотделима от ошибок. Механизм возникновения ошибок лежит в квантовой области и важен для дальнейшего. Рассмотрим некоторую систему, подвергшуюся пред- и пост-селекции с промежуточным измерением. Пока не считаем его слабым. Процесс возникновения показания стрелки прибора требует рассмотрения его взаимодействия с системой, и сделать это достаточно в рамках следующей простой модели. Пусть x – координата стрелки, q – её канонически сопряжённый импульс, т.е. $[\hat{x}, \hat{q}] = i$. Предположим следующий вид гамильтониана $\hat{H}(t)$ взаимодействия системы и прибора, измеряющего наблюдаемую \hat{A} :

$$\hat{H}(t) = g(t)\hat{A} \otimes \hat{q}. \quad (84)$$

Здесь $g(t)$ – некоторая функция, отличная от нуля только вблизи момента измерения t_m , задающая "силу" взаимодействия и обеспечивающая в общем случае правильную раз-

мерность гамильтониана. Тензорное произведение в (84) напоминает, что оператор \hat{A} действует в пространстве \mathcal{H}_S состояний системы, а \hat{q} – в пространстве \mathcal{H}_M стрелки измерительного прибора. Будем считать, что начальное состояние расширенной системы, включающей прибор, есть произведение $|\Phi_{pre}\rangle \otimes |\phi\rangle$ состояния системы $|\Phi_{pre}\rangle$, созданное предселекцией, и некоторого чистого состояния $|\phi\rangle$ стрелки прибора¹⁰. Рассмотрим амплитуду

$$\left(\langle \Phi_{post} \otimes \langle x | \right) \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(t) dt \right] \left(|\Phi_{pre}\rangle \otimes |\phi\rangle \right) \quad (85)$$

вероятности перехода расширенной системы в состояние с показанием стрелки x и результатом пост-селекции $|\Phi_{post}\rangle$. Обозначим

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$$

и воспользуемся спектральным представлением (4) оператора \hat{A} . Тогда

$$\exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(t) dt \right] = \sum_{i=1}^n |a_i\rangle \langle a_i| \otimes \exp[-i g a_i \hat{q}]. \quad (86)$$

Экспоненты из правой части (86) представляют собой операторы сдвига в координатном пространстве стрелки. Поэтому амплитуда вероятности (85) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n \langle \Phi_{post} | a_i \rangle \langle a_i | \Phi_{pre} \rangle \langle x - g a_i | \phi \rangle. \quad (87)$$

¹⁰В данной простой модели считается, что показание стрелки является единственной координатой прибора.

Каждому собственному значению a_i измеряемой наблюдаемой соответствует сдвиг стрелки на величину ga_i . Для определённости предположим гауссов вид начальной волновой функции стрелки:

$$\phi(x) \equiv \langle x|\phi\rangle = \left(\frac{1}{\pi\Delta^2}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta^2}\right] \quad (88)$$

с шириной Δ . Если эта ширина мала по сравнению с разницей сдвигов из (87), т.е.

$$\Delta \ll g(a_i - a_{i'}) \quad (89)$$

для всех $i \neq i'$, волновые функции стрелки из (87) практически ортогональны:

$$\int \phi(x - ga_i)^* \phi(x - ga_{i'}) dx \simeq \delta_{ii'}. \quad (90)$$

В этом случае величины ga_i являются хорошо различимыми положениями стрелки и мы возвращаемся к случаю чёткого измерения. Коэффициенты $\langle \Phi_{post}|a_i\rangle \langle a_i|\Phi_{pre}\rangle$ из (87) являются амплитудами вероятности получить то или иное положение стрелки. В условиях (90) эти амплитуды не интерферируют и при вычислении вероятностей положения стрелки дают формулу ABL (71).

Если параметр g мал или велика ширина Δ , условие (89) нарушается. Реализуется ситуация нечёткого измерения, представляющая для нас основной интерес. В этих условиях для амплитуды (85) верна оценка

$$\begin{aligned} & \left(\langle \Phi_{post} \otimes \langle x| \right) \left[1 - ig\hat{A} \otimes \hat{q} \right] \left(|\Phi_{pre}\rangle \otimes |\phi\rangle \right) = \\ & \langle \Phi_{post} | \Phi_{pre} \rangle \langle x | [1 - ig\langle \hat{A} \rangle_w \hat{q}] | \phi \rangle \simeq \end{aligned} \quad (91)$$

$$\langle \Phi_{post} | \Phi_{pre} \rangle \langle x | \exp[-ig\langle \hat{A} \rangle_w \hat{q}] | \phi \rangle = \langle \Phi_{post} | \Phi_{pre} \rangle \phi(x - g\langle \hat{A} \rangle_w),$$

где введено обозначение для так называемого "слабого значения" оператора \hat{A} :

$$\langle \hat{A} \rangle_w \doteq \frac{\langle \Phi_{post} | \hat{A} | \Phi_{pre} \rangle}{\langle \Phi_{post} | \Phi_{pre} \rangle}.$$

При $|\Phi_{pre}\rangle = |\Phi_{post}\rangle$ эта величина превращается в обычное среднее значение наблюдаемой. Для более строгой оценки разложим экспоненту из (85) в ряд Тейлора:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ig)^k}{k!} \langle x | \hat{q}^k | \phi \rangle \langle \Phi_{post} | \hat{A}^k | \Phi_{pre} \rangle. \quad (92)$$

Характерной величиной импульса стрелки для состояния $|\phi\rangle$ есть Δ^{-1} . Предположим, что для всех k выполнено неравенство

$$g^k (\langle \hat{A}^k \rangle_w - \langle \hat{A} \rangle_w^k) \ll \Delta^k.$$

Это позволяет переписать амплитуду (92) в виде

$$\langle \Phi_{post} | \Phi_{pre} \rangle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ig)^k}{k!} \langle x | \hat{q}^k | \phi \rangle \langle \hat{A} \rangle_w^k,$$

что возвращает нас к (91).

Предположим пока, что величина $\langle \hat{A} \rangle_w$ вещественна. Тогда первый множитель $\langle \Phi_{post} | \Phi_{pre} \rangle$ в правой части последней строки (91) оказывается амплитудой вероятности успеха пост-селекции в $|\Phi_{post}\rangle$ при условии пред-селекции в $|\Phi_{pre}\rangle$. Примечательно, что на величине этой амплитуды никак не сказывается факт возможного слабого измерения между селекциями. Второй множитель есть волновая функция

стрелки, сдвинутая на величину $g\langle\hat{A}\rangle_w$. В отсутствие взаимодействия прибора с системой стрелку можно было обнаружить в пределах широкого интервала длины $\sim \Delta$ с центром в нуле. Как и следовало ожидать, прибор оказывается очень неточным и всё время генерирует ошибки. После измерения показания стрелки также подвержены, но теперь они группируются вокруг точки $g\langle\hat{A}\rangle_w$. Это можно обнаружить многократным повторением эксперимента и отбором только показаний при успешной пред- и пост-селекциях.

Применим развитый подход к модели "трёх коробок" и к анализу странных свойств пост-селекции. Как и ранее, будем предполагать, что частица в системе только одна. Поэтому в том же смысле, в каком из пост-селекции в $|\Psi_{post}\rangle$ следует присутствие этой частицы одновременно в коробках 1 и 2, следует наличие *минус одной частицы* в коробке 3. Это замечание будет важно для дальнейшего рассмотрения. Слабое измерение будет состоять в организации пролёта вблизи коробок трёх зондирующих частиц и приближённом отслеживании отклонения их траекторий вследствие притяжения к частице в коробках. Качественно этот эффект можно описывать в рамках гамильтониана типа (84):

$$\hat{H}(t) = g(t) \sum_{i=1}^3 \hat{P}_i \otimes \hat{q}_i,$$

где $\hat{P}_i = |i\rangle\langle i|$ – наблюдаемая, отвечающая факту наличия или отсутствия частицы в коробке i (собственные значения 1 и 0). Слабые значения этих наблюдаемых для состояний $|\Psi_{pre}\rangle$ и $|\Psi_{post}\rangle$ из (79) и (80)

$$\langle\hat{P}_1\rangle_w = \langle\hat{P}_2\rangle_w = -\langle\hat{P}_3\rangle_w = 1$$

Начальные волновые функции для зондирующих частиц-стрелок можно для определённости считать одинаковыми и

совпадающими с (88). Амплитуда вероятности (85) для нашего случая принимает вид

$$\frac{1}{3} \phi(x_1 - g) \phi(x_2 - g) \phi(x_3 + g).$$

Данный результат отражён на рис. 10. Две первые короб-

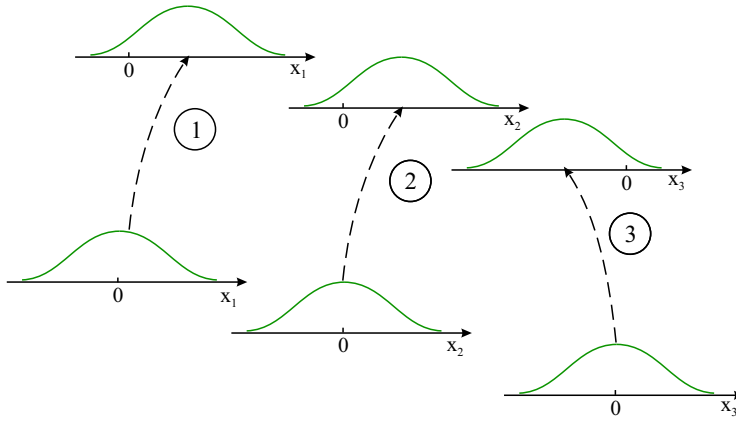


Рис. 10. Вариант слабого измерения в модели "трёх коробок". Пунктиром обозначены условные средние траектории зондирующих частиц. Имеет место притяжение к двум первым коробкам и отталкивание от третьей. Дальнейшие пояснения в тексте.

ки притягивают траектории частиц-стрелок так, как будто в каждой из них находится частица, а третья коробка отталкивает, демонстрируя своего рода "антигравитацию". Интерпретация с минус одной частицей в коробке 3 действительно имеет под собой некоторое основание!

Для дальнейшего обсуждения удобно снова привлечь Алису и Боба для разделения ролей. Алиса проводит слабые измерения, а Боб отвечает за пред- и пост-селекции и сообщает Алисе об успехе. В такой постановке при многократном

повторении эксперимента Алиса заметит, что в тех случаях, когда приходит сообщение от Боба, зондирующие частицы после пролёта действительно имеют тенденцию группироваться так, как это показано на рис. 10. Пост-селекция будет успешной в $(1/3)^2 = 1/9$ случаев.

А что произойдёт, если слабое значение наблюдаемой окажется комплексным? Так будет, например, если Боб, ничего не сказав Алисе, начнёт осуществлять пост-селекцию в состоянии

$$|\Psi'_{post}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + i|2\rangle - |3\rangle). \quad (93)$$

Заметим, что в этом случае

$$\langle \hat{P}_1 \rangle_w = i; \quad \langle \hat{P}_2 \rangle_w = 1; \quad \langle \hat{P}_3 \rangle_w = -i.$$

Если мы проследим приведённый выше вывод назад до формулы (91), то заметим, что комплексность слабых значений приводит к неэрмитовости эффективного гамильтониана в показателе экспоненты. Одним из следствий этого в нашей модели с тремя коробками, как и в общем случае, окажется изменение успеха пост-селекции. Она не равна теперь величине $|\langle \Psi'_{post} | \Psi_{pre} \rangle|^2$. Нетрудно также проверить, что для первой и третьей зондирующих частиц, в отличие от второй, произойдут встречные сдвиги не в координатных, а *импульсных* пространствах на величины $\pm g/\Delta^2$. Алиса, обескураженная результатом своего измерения (частицы-стрелки вместо того, чтобы занять определённые положения, пришли в движение), окажется смущена ещё больше, узнав, что Боб находится в курсе её проблем. Таким образом, осуществляя пост-селекцию в состоянии (93), Боб перенацелился на выявление таких нештатных ситуаций. Можно обеспечить N -кратное усиление эффекта слабых измерений при увеличении до N

числа частиц в коробках. Пред-селекция при этом осуществляется в состоянии $|\Psi_{pre}\rangle^{\otimes N}$, а пост-селекция – в состоянии $|\Psi_{post}\rangle^{\otimes N}$.

Список рекомендуемой литературы

1. фон Нейман И. Математические основы квантовой механике. М.: Наука, 1964. 368 с.
2. Менский М.Б. Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология. М.: Физматлит, 2001. 232 с.
3. Aharonov Y., Bergmann P.G., and Lebowitz J.L. Time Symmetry in the Process of Measurement // Phys. Rev. 1964. Vol. 134. P. B1410.
4. Vaidman L., Aharonov Y., and Albert D. How to Ascertain the Values of σ_x , σ_y , and σ_z of a Spin-1/2 Particle // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 1385.
5. Aharonov Y., Albert D., and Vaidman L. How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin-1/2 Particle Can Turn Out to be 100 // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60. P. 1351.
6. Bub J. and Brown H. Curious Properties of Quantum Ensembles Which Have Been Both Preselected and Post-selected // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 2337.

Список используемых сокращений

QM – quantum mechanics
 PS – preselected
 PPS – pre- and post-selected
 ABL – Aharonov, Bergmann, Lebowitz
 ЭПР – Эйнштейн, Подольский, Розен